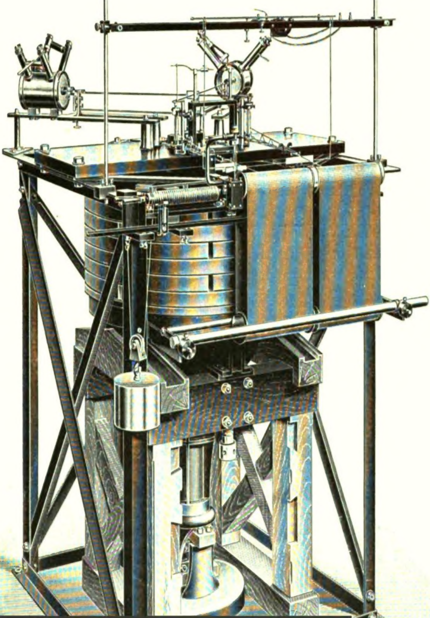


Vorlesungen über Seismometrie

Boris Borisovich Golit□s□yn, Oskar Hecker, Clara Reinfeldt

Digitized by Google

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE

Digitized by Google

Digitized by Google

ARTES VERITAS SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM CIRCUMSPICE

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

FÜRST B. GALITZIN

VORLESUNGEN ÜBER SEISMOMETRIE

DEUTSCHE BEARBEITUNG
UNTER MITWIRKUNG VON CLARA REINFELDT

HERAUSGEGEBEN VON

O. HECKER

MIT 162 ABBILDUNGEN IM TEXT

TG

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1914

Digitized by Google

GE
541
.G635

COPYRIGHT 1914 BY B. G. TEUBNER IN LEIPZIG.

ALLE RECHTE, EINSCHLIESSLICH DES ÜBERSETZUNGSRECHTS, VORBEHALTEN

Digitized by Google

VORWORT DES HERAUSGEBERS

Es ist in dem Vorwort, das Fürst Galitzin seinen „Vorlesungen über Seismometrie" vorangestellt hat, darauf hingewiesen worden, daß bisher ein Mangel an systematischen Darstellungen des Teils der Seismologie, der sich mit der exakten Messung der seismischen Erscheinungen beschäftigt, besteht.

Eine solche Darstellung, die zugleich eine Übersicht über die wichtigsten Fragen der Seismologie gibt, dürfte um so wertvoller sein, als vielfach seismische Stationen im Anschluß an Institute gegründet werden, die mit der Geophysik nur in sehr lockerem Zusammenhange stehen. Den Leitern solcher Stationen wird es deswegen häufig kaum möglich sein, sich eingehender mit der Seismometrie vertraut zu machen, weil ihnen die erforderliche Literatur schwer zugänglich ist.

Aus diesem Grunde habe ich die Bearbeitung einer deutschen Ausgabe der vorliegenden „Vorlesungen über Seismometrie" unternommen. Im Einverständnis mit dem Fürsten B. Galitzin habe ich eine Reihe von einschlägigen Arbeiten, die seit dem Erscheinen der russischen Ausgabe veröffentlicht wurden, berücksichtigt und ihre Ergebnisse nachgetragen.

Es kommen hierbei hauptsächlich die Kapitel über die Bestimmung des Epizentrums eines Bebens, die mikroseismische Unruhe und die Deformation des Erdkörpers unter der Attraktionswirkung von Sonne und Mond in Betracht. Ferner wurde das Kapitel über die Seismographen und Erschütterungsmesser, das naturgemäß hauptsächlich die an den russischen Stationen gebräuchlichen Instrumente berücksichtigte, stark erweitert.

An einzelnen Stellen schien mir eine Kürzung der mathematischen Entwickelung bei der Ableitung der Formeln zulässig zu sein. Ein Verzeichnis der Arbeiten, auf die in den „Vorlesungen" besonders Bezug genommen wird, ist im Anhange gegeben.

Meinen besonderen Dank möchte ich schließlich für ihre Mitarbeit noch vor allem Fräulein Clara Reinfeldt, die die erste Übersetzung der „Vorlesungen über Seismometrie" besorgte und eine vollständige Korrektur las und weiter noch den Herren J. Wilip, der ebenfalls eine vollständige, und B. Gutenberg, der einen Teil der Korrektur las, aussprechen.

Straßburg, im Februar 1914.

O. Hecker.

268625

Digitized by Google

VORWORT

Die vorliegenden „Vorlesungen über Seismometrie" wurden im Laufe des Frühlings und Sommers des Jahres 1911 zur Ausbildung des wissenschaftlichen Personals, das zur Leitung der russischen seismischen Stationen und zur Ausführung verschiedener wissenschaftlicher Arbeiten am Zentralbureau der russischen Seismologischen Kommission bestimmt war, gehalten.

Die Vorlesungen, im ganzen 89, wurden in den Räumen des Physikalischen Laboratoriums der Akademie der Wissenschaften abgehalten. Neben der Beteiligung an dem theoretischen Kursus beschäftigten sich die Zuhörer unter der Leitung der Herren Assistenten J. Wilip und P. Nikiforov noch mit verschiedenen praktischen Arbeiten, so mit der Untersuchung verschiedener seismischer Instrumente, der Bestimmung der Konstanten derselben, mit der Bearbeitung von Seismogrammen usw.

Der vorliegende Kursus kann gewiß nicht als erschöpfend gelten, da einige Fragen nur beiläufig erwähnt werden konnten, jedoch sind in diesen Vorlesungen die Hauptfragen der gegenwärtigen Seismometrie behandelt.

Die Beschreibung der verschiedenen Typen von Seismographen leidet insbesondere an Unvollständigkeit, weil das Hauptziel der Vorlesungen darin bestand, die Zuhörer mit den Typen der Apparate und Methoden der Beobachtung bekannt zu machen, die an den russischen seismischen Stationen angewandt werden, und nicht so sehr darin, eine Beschreibung der Konstruktionseinzelheiten als vielmehr die Prinzipien der Konstruktion der verschiedenen Typen der Seismographen zu geben.

Der geologische Teil der Seismologie ist außer acht gelassen; ich habe mich hauptsächlich auf den messenden Teil der Seismologie beschränkt. Infolgedessen ist auch der Kursus als „Vorlesungen über Seismometrie" betitelt worden. Die Zuhörer hatten jedoch die Möglichkeit, sich mit dem geologischen Teil durch einige Vorlesungen, die von Herrn A. Gerasimov in denselben Räumen des Physikalischen Laboratoriums abgehalten wurden, bekannt zu machen.

In dem vorliegenden Kursus war ich bestrebt, so weit als möglich jeden ausgesprochenen Grundsatz und jede angeführte Formel zu beweisen, was zuweilen recht weitläufige und ermüdende Entwickelungen erforderte. Dabei mußte ich notwendigerweise auf verschiedene nebensächliche Einzelheiten eingehen, um die Ausführungen klar und überzeugend zu gestalten.

Mit Rücksicht hierauf erwies es sich als erforderlich, das ganze erste Kapitel der Ableitung der Grundsätze der Elastizitätstheorie zu widmen, ohne deren Kenntnis es sehr schwer fallen würde, die Theorie der Fort-

Digitized by Google

pflanzungsgesetze der verschiedenen Arten von seismischen Wellen zu verstehen.

Aus dem gleichen Grunde ist auch § 2 des VII. Kapitels der Methode der kleinsten Quadrate gewidmet, die häufig bei der Auswertung der Resultate verschiedener physikalischer Messungen eine wichtige praktische Bedeutung hat.

Naturgemäß werden die vorliegenden Vorlesungen an manchen Mängeln leiden, aber es dürfte doch wegen des Fehlens an systematischen Darstellungen in der gegenwärtigen seismischen Literatur die Herausgabe derselben wohl von Nutzen sein und eine Lücke in diesem Wissenszweige ausfüllen.

Denn wenn auch die Seismometrie eine noch recht junge Wissenschaft ist, so hat sie doch in der kurzen Zeit ihrer Entwickelung bereits eine ganze Reihe wichtiger, im höchsten Grade interessanter Fragen der Geophysik angeregt und den Weg zu ihrer Lösung anzubahnen verstanden. Sie beschäftigt sich schon jetzt mit den kompliziertesten Aufgaben, u. a. dem inneren Bau der Erdkugel, den Elastizitätseigenschaften des Erdkörpers als ganzes; gewiß werden sich in ihrer weiteren Entwickelung noch ganz neue Ausblicke geophysikalischer Art eröffnen.

Ein wesentliches Hindernis für das Studium dieser jungen Wissenschaft, die so viel Neues und Interessantes bietet und sich, wenn man das Wort Physik im weiteren Sinne des Wortes auffaßt, so unmittelbar an diese Disziplin anschließt, bildet der Umstand, daß bis zu dieser Zeit fast an keiner russischen Universität ein systematischer Kursus der Seismometrie gelesen wird. Diejenigen, welche sich für dieses Fach interessieren, müssen aus der äußerst zerstreuten seismischen Literatur, aus einzelnen wissenschaftlichen Abhandlungen und Arbeiten schöpfen, wodurch das Studium dieser Wissenschaft sehr erschwert wird.

Die vorliegenden Vorlesungen dürften daher vielleicht manchem als Lehrmittel von Nutzen sein.

St. Petersburg, August 1911.

B. Galitzin.

Digitized by Google

INHALTSVERZEICHNIS

Seite

Vorwort des Herausgebers III

Vorwort IV

Einleitung 1

Erstes Kapitel.

Grundsätze der Elastizitätstheorie.

§ 1. Innere Kräfte 3
§ 2. Die Deformationen 20
§ 3 Beziehung zwischen elastischen Kräften und Deformationen 27

Zweites Kapitel

Die Fortpflanzung elastischer Schwingungen.

§ 1. Longitudinale und transversale Schwingungen 39
§ 2. Die Theorie der Oberflächenwellen 64

Drittes Kapitel.

Die seismischen Strahlen.

§ 1. Die Ableitung der Grundgleichungen 94
§ 2. Die Laufzeitkurve oder der Hodograph 104
§ 3. Die Bestimmung des Emergenzwinkels 115
§ 4. Die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen von der Tiefe 119
§ 5. Über die Herdtiefe eines Bebens 142

Viertes Kapitel.

Die Hauptprobleme der Seismometrie.

§ 1. Untersuchung verschiedener seismischer Erscheinungen 147
§ 2. Die Hauptaufgabe der Seismometrie 169
§ 3. Die wichtigsten Typen von Seismographen 183
Das einfache Vertikalpendel 183
Das Horizontalpendel 187
Der Vertikalseismograph 200

Digitized by Google

Seite
Erschütterungsmesser 204
Die mechanische Registrierung 216
Die optische Registrierung 220
Die galvanometrische Registrierung 222

Fünftes Kapitel.

Theorie des Horizontalpendels.

§ 1. Ableitung der Grunddifferentialgleichung der Bewegung des Pendels 234
§ 2. Die Untersuchung der Eigenbewegung des Pendels 246
§ 3. Die Bewegung des Pendels unter dem Einfluß von horizontalen Bodenverschiebungen 256
§ 4. Bestimmung der maximalen Amplitude der Bodenverschiebung 271
Die Vergrößerung des Pendels 276

Sechstes Kapitel.

Die galvanometrische Registriermethode.

§ 1. Theorie des Galvanometers 285
§ 2 Bestimmung der Konstanten des Galvanometers 290
§ 3. Theorie der galvanometrischen Registrierung 299
§ 4. Die Vergrößerung 307

Siebentes Kapitel.

Bestimmung der Konstanten des Seismographen.

§ 1. Bestimmung der Pendelkonstanten n und l 312
§ 2 Methode der kleinsten Quadrate 317
§ 3. Bestimmung der Konstanten μ^2, T und k 340
§ 4. Direkte Bestimmung des Übertragungsfaktors k 374
§ 5. Anwendung des Shunt 376

Achtes Kapitel.

Theorie des Vertikalseismographen. 380

Neuntes Kapitel.

Untersuchung der Neigungen. 390

Zehntes Kapitel.

Auswertung von Seismogrammen.

§ 1. Bestimmung des Azimuts des Epizentrums 401
§ 2. Bestimmung des Emergenzwinkels 427
§ 3. Bestimmung der Schwingungsebene der Bodenteilchen in den transversalen Wellen der zweiten Vorphase 437
§ 4. Bestimmung der Bodenverschiebungen in der Maximalphase eines Bebens und bei der mikroseismischen Unruhe 443
§ 5. Methode der gliedweisen Integration 452

Digitized by Google

Elftes Kapitel. Seite

Untersuchungen der Schwankungen der Lotlinie unter dem Einfluß der Attraktion der Sonne und des Mondes . 469

Zwölftes Kapitel.

Theorie der mechanischen Registrierung.

§ 1. Elementare Theorie der mechanischen Registrierung 484
§ 2. Einführung einer zweiten Korrektionsgröße 493
§ 3. Bestimmung der Bodenverschiebungen in der Maximalphase eines Bebens 518

Literatur 536

Digitized by Google

Einleitung.

Die Erdbeben zerfallen ihrer Entstehung nach in drei Hauptklassen:

1. Vulkanische Erdbeben, die die Eruptionen von Vulkanen begleiten, ihnen meistens vorangehen, bisweilen jedoch auch folgen.

2. Einsturzbeben, die auf den Zusammenbruch unterirdischer, durch Auslaugung entstandener Hohlräume zurückzuführen sind.

3. Tektonische Erdbeben, die bei Verschiebungen und Lagenveränderungen von Schollen der Erdrinde entstehen.

In allen drei Fällen verursacht die in den inneren Schichten auftretende Gleichgewichtsstörung elastische Schwingungen, die an der Oberfläche der Erdrinde die Erscheinungen hervorrufen, die unter dem Namen Erdbeben bekannt sind.

Derjenige Ort in der Erdrinde, an dem die Störung des Gleichgewichts der Schichten entstanden ist, heißt der Herd des Erdbebens oder das Hypozentrum; der dem Hypozentrum am nächsten liegende Punkt der Erdoberfläche heißt das Epizentrum. Das Hypozentrum, das Epizentrum und der Mittelpunkt der Erde liegen somit auf einer geraden Linie. An der Oberfläche der Erde beobachtet man die stärksten Wirkungen des Erdbebens im Epizentrum.

Zweifellos sind sowohl das Hypozentrum, wie auch das Epizentrum nicht punktförmig, sondern mehr oder weniger ausgedehnte Gebiete. Diese Gebiete, welche im Falle tektonischer, an einer Bruchlinie auftretender Erdbeben eine größere Erstreckung haben können, sind im Vergleich zur Größe des Erdkörpers so klein, daß wir sie in größerer Entfernung der Einfachheit halber als Punkte betrachten werden; wir verstehen dann unter dem Ausdrucke Epizentrum die Mitte der wirklichen Epizentralfläche.

Bei den ersten beiden Klassen von Erdbeben, die seltener beobachtet werden, liegt das Hypozentrum gewöhnlich nicht sehr tief unter der Erdoberfläche. Deswegen haben sie auch fast ausnahmslos eine nur lokale Bedeutung und werden selbst in einer verhältnismäßig geringen Entfernung vom Epizentrum nicht mehr gefühlt.

Die große Mehrzahl der Erdbeben ist tektonischen Ursprungs; es sind dieses die eigentlich zerstörenden Beben. Liegt der Herd eines stärkeren Erdbebens dieser Art tief, so macht es sich auf einem großen Gebiete der Erdoberfläche bemerkbar, und es werden die von ihm erzeugten Bodenschwingungen selbst in großer Entfernung von der Epizentralfläche von Menschen gefühlt; empfindliche Seismographen registrieren ein solches Erdbeben an jeder Stelle der Erdoberfläche.

Digitized by Google

Tektonische Erdbeben verdanken ihre Herkunft den Dislokationsprozessen, die in der Erdrinde infolge der allmählichen Abkühlung und Schrumpfung des Erdballs vor sich gehen. Die Gesteinsmassen erleiden dabei Brüche, Verschiebungen, Verwerfungen u. dgl.; manche Gesteinsschichten gelangen dadurch in einen Zustand starker elastischer Spannungen. Diese treten eng verbunden mit den Prozessen der Gebirgsbildung auf und werden am häufigsten in den Gebieten bedeutender Geosynklinalen oder in der Nachbarschaft von großen Meerestiefen beobachtet. Dort, wo viele Faltengebirge oder überhaupt starke und rasche Veränderungen des Oberflächenreliefs vorhanden sind, zeigen sich auch die größten Elastizitätsspannungen in den oberen Schichten des Erdkörpers. Mit der Zeit kann das Gleichgewicht solcher Schichten sehr unstabil werden, und es genügt dann irgendein unbedeutender äußerer Impuls, um ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze und eine plötzliche Verschiebung der Schichten zu bewirken, wodurch dann ein tektonisches Erdbeben hervorgerufen wird.

Die Schichten der Erde, die sich im Zustande der Elastizitätsspannung befinden, sind somit unmittelbar der Wirkung verschiedener elastischer Kräfte unterworfen. Entsteht an irgendeinem Orte aus einem beliebigen Anlaß eine starke Gleichgewichtsstörung der Schichten, so müssen auch die sich anschließenden Erdschichten, den Grundsätzen der Elastizitätstheorie entsprechend, bestimmte Einwirkungen erleiden und in den Bewegungszustand kommen. Diese Bewegungen werden weniger intensiv sein, als im Herde selbst; an entfernteren Orten, wo die Elastizitätsgrenze nicht überschritten worden ist, werden sich die Bewegungen durch kleine Schwingungen um eine gewisse mittlere Gleichgewichtslage charakterisieren. Diese Schwingungen werden also ausnahmslos durch die elastischen Kräfte bedingt, welche durch die Verlagerung der Schichten hervorgerufen werden.

Die Lehre von den Erdbeben, die hiernach einen mechanischen Vorgang darstellen, ist somit eng mit der Elastizitätstheorie verbunden.

Diese Theorie gibt die Möglichkeit, die Bebenerscheinungen von einem neuen Gesichtspunkte aus zu betrachten; sie gibt den Schlüssel zu den komplizierten Schwingungsvorgängen in der ganzen Erdrinde, die auftreten müssen, wenn in einem Gebiete aus irgendeinem Grunde eine Gleichgewichtsstörung der Erdschichten stattgefunden hat.

Die Untersuchung der Erdbebenerscheinungen nach dieser Richtung hin ist außerordentlich interessant und fruchtbringend, leider aber verhältnismäßig noch wenig durchgearbeitet. Wir werden im folgenden hiermit beginnen, zur größeren Klarheit der weiteren Ausführungen aber nicht gleich die fertigen Formeln und Grundsätze der Elastizitätstheorie anwenden, sondern der Entwickelung der Grundsätze der Elastizitätslehre ein besonderes Kapitel widmen.

Digitized by Google

Erstes Kapitel.

Grundsätze der Elastizitätstheorie.

§ 1. Innere Kräfte.

Wir beschränken uns auf die Betrachtungen isotroper Körper, die zum Unterschied von den kristallinischen Körpern dadurch ausgezeichnet sind, daß die verschiedenen physikalischen Eigenschaften nicht von der Richtung abhängen, sondern in allen Richtungen gleich sind. Bei dem Erdball als Einheit kann man von Gleichartigkeit natürlich nicht sprechen, denn mit der Entfernung von der Oberfläche nach der Tiefe zu wechseln die Dichte und die Elastizitätseigenschaften der Schichten. Diesen Umstand wollen wir im folgenden berücksichtigen, uns aber zunächst nur auf geringe, in gewisser Entfernung von dem Erdzentrum liegende Gebiete beschränken, die wir dann in betreff ihrer physikalischen Eigenschaften mit hinreichender Genauigkeit als gleichartig betrachten und auf die wir die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, die für isotrope Körper gelten, anwenden können.

Wir setzen also voraus, daß wir einen isotropen Körper M haben (Fig. 1), welcher der Wirkung eines Kraftsystems ausgesetzt ist.

Durch diesen Körper wollen wir uns eine willkürliche Fläche S gelegt denken und ein unendlich kleines Element dS derselben betrachten. Wir stellen uns nun vor, daß der ganze Teil N des Körpers, der rechts von dieser Fläche S liegt, entfernt worden ist. Dann muß man zur Wiederherstellung des Gleichgewichts an jedem Element dS der Fläche S eine äußere Kraft angreifen lassen, die ihrer Größe und Richtung nach der Wirkung des entfernten Teiles N auf dieses Flächenelement dS entspricht und die also dessen Wirkung gänzlich ersetzt. Diese Kraft wollen wir F nennen.

Fig. 1.

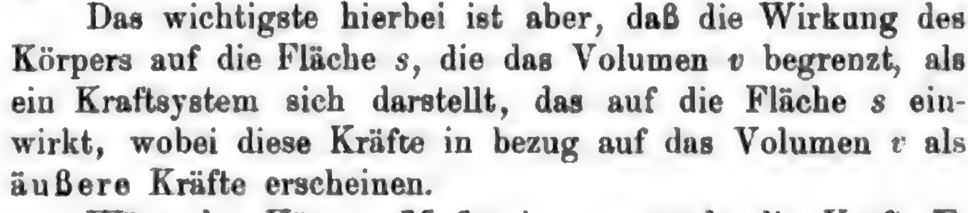
Die Kraft F wird immer für die Flächeneinheit berechnet, so daß die tatsächliche Kraft, die auf das Element dS wirkt, gleich FdS wird. Diese Kraft heißt die resultierende Spannung in einem Punkte der Fläche S, wobei in den festen Körpern die Richtung F im allgemeinen einen Winkel mit der Normalen zur Fläche n bildet. Die Spannungen werden als positiv bezeichnet, wenn sie nach außen, d. h. von dem Flächenelement in der Richtung des entfernt gedachten Teiles N, gerichtet sind.

Denken wir uns ein abgegrenztes Volumen v; dann läßt sich die Wir-

Digitized by Google

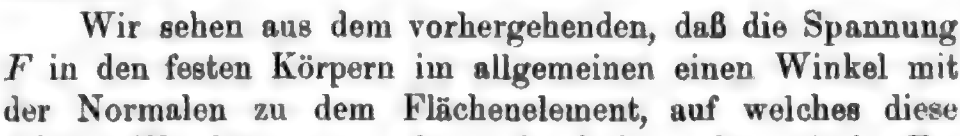
kung der übrigen Teile des Körpers M auf ein Kraftsystem reduzieren, das auf die das Volumen v begrenzende Oberfläche s gleichmäßig verteilt ist.

Dabei ist es selbstverständlich, daß wegen des Grundsatzes der Mechanik, nach welchem die Wirkung immer der Gegenwirkung gleich und entgegengesetzt ist, auf jedes Flächenelement dS in entgegengesetzter Richtung eine andere Kraft wirkt, die der Kraft F gleich und entgegengesetzt ist, und die von denjenigen Teilen des Körpers M ausgeht, die links von der Fläche S liegen. Wenn wir von dem Körper jedoch ein bestimmtes Volumen v, wie oben angegeben, abteilen, so können wir diese inneren Kräfte außer acht lassen.



Das wichtigste hierbei ist aber, daß die Wirkung des Körpers auf die Fläche s, die das Volumen v begrenzt, als ein Kraftsystem sich darstellt, das auf die Fläche s einwirkt, wobei diese Kräfte in bezug auf das Volumen v als äußere Kräfte erscheinen.

Wäre der Körper M flüssig, so würde die Kraft F, die auf das Flächenelement dS wirkt, nichts anderes sein als der Druck der Flüssigkeit, wobei dieser Druck nach den Gesetzen der Hydrostatik senkrecht zu dS und von dem Teile N nach links gerichtet wäre. Man kann somit den Druck in flüssigen Körpern als negative Spannung betrachten.



Wir sehen aus dem vorhergehenden, daß die Spannung F in den festen Körpern im allgemeinen einen Winkel mit der Normalen zu dem Flächenelement, auf welches diese Kraft einwirkt, bildet. Wir können uns davon durch folgende einfache Erwägungen überzeugen.

Fig. 2.

Wir stellen uns eine zylindrische Stange MC vor, die oben in M befestigt ist und einer ausdehnenden Kraft P ausgesetzt ist (Fig. 2).

Wir wollen den Normalschnitt AB der Stange nehmen und die Fläche desselben mit S bezeichnen.

Dann wird die auf die Flächeneinheit AB wirkende Kraft

$$F = \frac{P}{S}$$

sein.

Diese Kraft entspricht der oben erwähnten Spannung. In diesem Falle fallen diese Spannung und die Normale zu AB zusammen.

Wir wollen jetzt einen anderen Schnitt $A'B'$, der zu dem Normalschnitt unter dem Winkel φ geneigt ist, nehmen. Bedeute S' die Fläche dieses Schnittes, so ist

$$S' = \frac{S}{\cos\varphi}.$$

Auf diesen Schnitt wirkt auch der Zug P, aber in diesem Falle ist die entsprechende auf die Flächeneinheit bezogene Spannung

$$F' = \frac{P}{S'} = \frac{P}{S}\cos\varphi = F\cos\varphi. \qquad (1)$$

Digitized by Google

Die Spannung F' fällt jetzt nicht mehr mit der Normalen zu $A'B'$ zusammen, sondern bildet den Winkel φ mit ihr.

Die Kraft F' kann man nun in zwei Kräfte zerlegen: in die Kraft N', die der Richtung nach mit der Normalen zu $A'B'$ zusammenfällt, und in die andere T', die in der Ebene $A'B'$ wirkt.

Aus der Zeichnung und der Formel (1) ergibt sich

$$N' = F\cos^2\varphi \tag{2}$$

und

$$T' = F\cos\varphi\sin\varphi. \tag{3}$$

Die Kraft N' heißt die Normalspannung und T' die Tangentialspannung.

Die Kraft T' kann man natürlich auch in zwei beliebige andere, zueinander senkrechte Richtungen in der Ebene $A'B'$ zerlegen.

Auf diese Weise kann die Spannung, die auf ein jedes im Innern des festen Körpers gewähltes Flächenelement einwirkt, durch ein gleichbedeutendes System von drei zueinander senkrechten Kräften oder Spannungen ersetzt werden, von denen die eine mit der Normalen zum erwähnten Flächenelement zusammenfällt und die zwei anderen in einem rechten Winkel zueinander und zur Ebene parallel wirken.

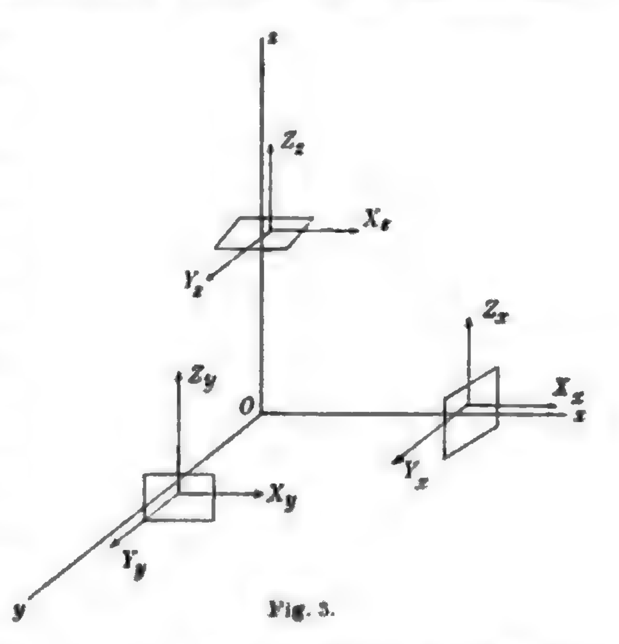


Fig. 3.

Wir wollen uns nun ein Flächenelement auf der Achse x eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen Anfangspunkt in einem beliebigen Punkte im Körper angenommen werden kann, denken, das senkrecht zur x-Achse steht (Fig. 3). Die entsprechende Normalspannung, wie üblich, auf die Flächeneinheit bezogen, bezeichnen wir mit X_x, die entsprechende Tangentialspannung aber zerlegen wir parallel zu den Achsen y und z. Die analogen Komponenten bezeichnen wir mit Y_x und Z_x. Das angehängte x soll hier bedeuten, daß das betrachtete Flächenelement senkrecht zur x-Achse steht. Wir betrachten alle diese Spannungen als positiv, wenn sie in der Richtung zunehmender Koordinaten wirken.

Ist das Flächenelement zur Achse y senkrecht, so erhält man wieder eine Normalspannung Y_y und zwei Tangentialspannungen X_y und Z_y; ist sie schließlich zur Achse z senkrecht, so sind die entsprechenden Spannungen Z_z, X_z, Y_z.

Also haben wir in einem beliebigen Punkte des festen Körpers je nach der Richtung der Fläche folgende neun Projektionen zu beachten:

$$\begin{matrix} X_x, & Y_x, & Z_x, \\ X_y, & Y_y, & Z_y, \\ X_z, & Y_z, & Z_z. \end{matrix}$$

Digitized by Google

Die gegenseitige Lage dieser Kräfte ergibt sich aus Fig. 3.

Die Kräfte, die in der gegebenen Tabelle längs der Diagonalen von links oben nach rechts stehen, bilden die Normalspannungen.

Wir betrachten nun ein Flächenelement, das eine beliebige Lage in bezug auf die Koordinatenachsen hat. Die resultierende Spannung, wie üblich, auf die Flächeneinheit bezogen, sei F, und die Projektionen auf die Koordinatenachsen X, Y, Z (ohne Index).

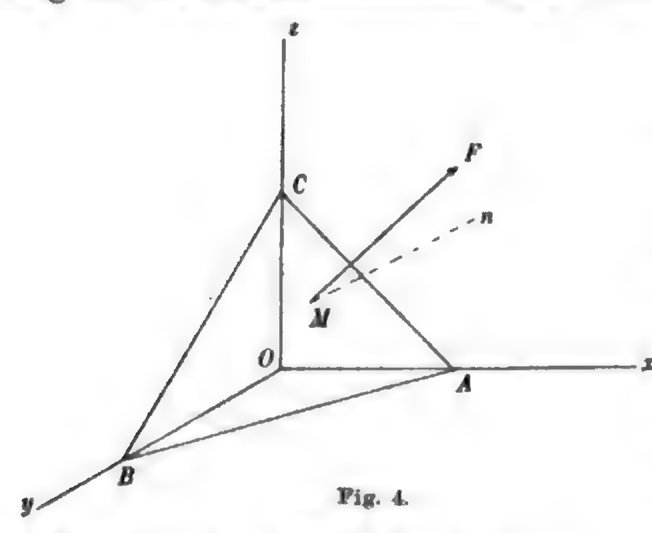


Fig. 4.

Wir wollen jetzt die Beziehungen von X, Y, Z zu den oben angegebenen Größen X_x, X_y, X_z, Y_x, ... aufsuchen.

Zu diesem Zwecke wählen wir auf den Achsen unseres Koordinatensystems in sehr geringer Entfernung vom Anfangspunkt 0 drei Punkte A, B und C in der Weise, daß sie in die Fläche des Flächenelementes, für die wir die Projektionen der resultierenden Spannung F suchen, fallen, und verbinden diese Punkte durch Gerade (Fig. 4).

Wir erhalten so ein Dreieck, dessen Fläche wir mit S bezeichnen wollen.

Es bilde die Normale Mn zu der Fläche ABC mit den Koordinatenachsen x, y, z die Winkel α, β und γ, die Richtung der Kraft F bilde ferner einen Winkel mit der Normalen Mn.

Wir bezeichnen die Seitenflächen des entstandenen Tetraeders in folgender Weise:

$$\text{Fläche } OBC = S_x$$
$$\text{„} \quad OCA = S_y$$
$$\text{„} \quad OAB = S_z.$$

Es ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned} S_x &= S\cos\alpha \\ S_y &= S\cos\beta \\ S_z &= S\cos\gamma \end{aligned}\right\}. \tag{4}$$

Wir wollen jetzt die Gleichgewichtsbedingungen unseres Elementartetraeders aufstellen.

Für den Gleichgewichtszustand ist erforderlich, daß die Summe der Projektionen aller auf das Tetraeder wirkenden Kräfte für jede Koordinatenachse gleich Null ist. Diese Bedingung ist erforderlich, damit das Tetraeder keine fortschreitende Bewegung längs einer Achse hat. Da die Seitenflächen S_x, S_y, S_z des Tetraeders den negativen Koordinatenachsen zugewandt sind und die Spannungen von der Fläche nach außen wirken, so erhalten wir

Digitized by Google

folgende Gleichgewichtsbedingungen für die Projektionen der Kräfte auf die x-Achse:

$$XS - X_x S_x - X_y S_y - X_z S_z = 0.$$

Man müßte eigentlich diesen Spannungskräften noch die Projektionen der äußeren Kräfte, die unmittelbar auf das Volumen des Tetraeders $OABC$ wirken, beifügen. Doch sind diese äußeren Kräfte, z. B. die Schwerkraft, dem Volumen des Elementartetraeders proportional, die Spannungen sind aber seinen Seitenflächen proportional. Es sind somit, wenn das Tetraeder unendlich klein ist, die Seitenspannungen unendlich kleine Größen zweiter Ordnung und die übrigen Kräfte unendlich kleine Größen dritter Ordnung; wir können sie daher im Vergleich zu den ersteren vernachlässigen.

Wir erhalten ebenso für die zwei anderen Achsen die Beziehungen:

$$YS - Y_x S_x - Y_y S_y - Y_z S_z = 0$$

$$ZS - Z_x S_x - Z_y S_y - Z_z S_z = 0.$$

Setzt man in diesen Ausdrücken statt S_x, S_y und S_z die entsprechenden Größen aus den Formeln (4) und dividiert durch S, so erhält man schließlich:

$$\left.\begin{aligned} X &= X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma \\ Y &= Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma \\ Z &= Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + Z_z \cos\gamma \end{aligned}\right\} . \qquad (5)$$

Die Formeln (5) geben uns die Projektionen der Spannung F, welche auf eine beliebige Fläche wirkt, deren Normale mit den Koordinatenachsen die Winkel α, β und γ bildet.

Wir wollen jetzt die Gleichgewichtsbedingungen für ein Elementarparallelepipedon aufstellen.

In einem jeden Punkte eines gegebenen festen Körpers haben die Projektionen der Spannungen X_x, X_y, X_z, Y_x usw. eine bestimmte Bedeutung; wird aber der Punkt im Körper verschoben, so ändern sich alle neun Größen. Also müssen die Größen X_x, X_y usw. als Funktionen der Koordinaten x, y, z, die die Lage des Punktes bestimmen, betrachtet werden.

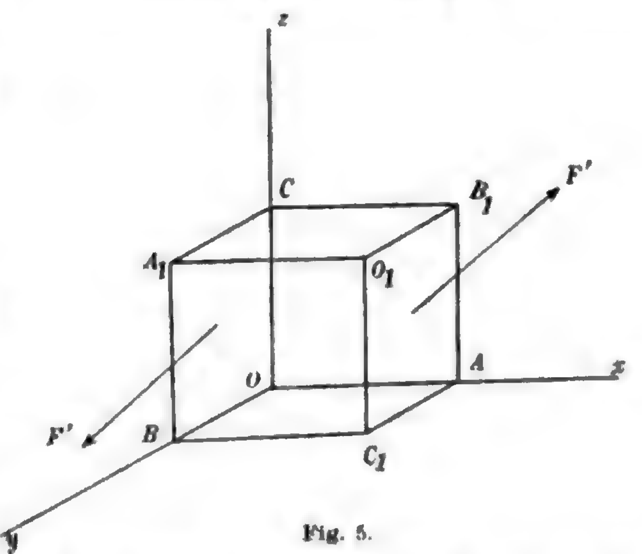


Fig. 5.

Wir wollen jetzt ein Elementarparallelepipedon nehmen, dessen Seiten $OA = dx$, $OB = dy$ und $OC = dz$ sind (Fig. 5).

Das Volumen dieses Parallelepipedons ist

$$d\tau = dx\,dy\,dz.$$

Digitized by Google

Die Spannung F', welche auf die zur Achse x senkrechte Fläche $AC_1 O_1 B_1$ wirkt, ist von links nach rechts, d. h. von der Fläche nach außen gerichtet. Die auf die Fläche OBA_1C, die der negativen Achse zugewandt ist, wirkende Spannung F'' ist nach der entgegengesetzten Seite gerichtet, wobei im Falle eines Elementarparallelepipedons diese beiden Kräfte sich voneinander nur um eine unendlich kleine Größe unterscheiden. Wir sehen also, daß, wenn die Elementarfläche einer negativen Koordinatenachse zugewandt ist, den entsprechenden Projektionen das Minuszeichen beigelegt worden ist.

Wir werden jetzt die Gleichgewichtsbedingungen unseres Elementarparallelepipedons aufstellen. Diese erfordern, daß die Summe der Projektionen aller auf eine jede Koordinatenachse wirkenden Kräfte gleich Null sei.

Wir wollen nun diejenigen Kräfte, die zur Achse x parallel wirken, betrachten.

Auf die Fläche OBA_1C wirkt die Kraft

$$- X_x \, dy \, dz.$$

Für die Fläche $AC_1 O_1 B_1$ aber ist die entsprechende Kraft gleich

$$+ \left(X_x + \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \right) dy \, dz,$$

weil für diese Fläche die Koordinate x um dx vermehrt ist.

Die Resultante dieser beiden Kräfte ist

$$+ \frac{\partial X_x}{\partial x} dx \, dy \, dz = \frac{\partial X_x}{\partial x} d\tau.$$

Wir wollen jetzt zu der Fläche OAB_1C übergehen.

Die entsprechende Projektion der Spannung, die zur Achse x parallel wirkt, ist gleich

$$- X_y \, dx \, dz.$$

Für die Fläche $A_1 O_1 C_1 B$ ist die entsprechende Projektion

$$+ \left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy \right) dx \, dz.$$

Die Resultante dieser beiden Kräfte ist gleich

$$\frac{\partial X_y}{\partial y} d\tau.$$

Wir nehmen jetzt die beiden Flächen, die senkrecht zu der z-Achse sind.

Für die Fläche OAC_1B ist die Projektion der Spannung, die zur x-Achse parallel wirkt, gleich

$$- X_z \, dx \, dy,$$

für die Fläche $CB_1 O_1 A_1$ aber gleich

$$+ \left(X_z + \frac{\partial X_z}{\partial z} dz \right) dx \, dy$$

Die Resultante ist also

$$\frac{\partial X_z}{\partial z}\, d\tau.$$

Folglich ist die Summe der Projektionen aller Spannungen auf die x-Achse, die auf die sechs Seitenflächen unseres Parallelepipedons wirken, gleich

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) d\tau.$$

Diese Summe ist eine unendlich kleine Größe dritter Ordnung in bezug auf das Zunehmen der Koordinaten.

Außer den Elastizitätskräften (Spannungen) können auf unser Parallelepipedon auch andere äußere Kräfte wirken. Dieselben werden gewöhnlich auf die Masseneinheit bezogen.

Ist die Massendichte des Parallelepipedons, d. h. die Masse einer Volumeneinheit gleich ϱ, so ist die Gesamtmasse des Parallelepipedons gleich $\varrho\, d\tau$.

Wir bezeichnen die äußere Kraft, die auf die Masseneinheit wirkt, mit F_1, ihre Projektionen auf die Koordinatenachsen mit X_1, Y_1 und Z_1. Der Angriffspunkt dieser Kraft liegt im Schwerpunkte des unendlich kleinen Parallelepipedons. Multipliziert man X_1, Y_1 und Z_1 mit $\varrho\, d\tau$, so erhält man die Projektionen der wahren äußeren Kräfte, die auf unser Parallelepipedon wirken.

Diese äußeren Kräfte können jetzt aber nicht vernachlässigt werden, denn sie können von derselben Größenordnung wie die Resultante der Elastizitätsspannungen sein.

Es ist somit die Gesamtsumme der Projektionen aller wirkenden Kräfte auf die x-Achse

$$\left(\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z}\right) d\tau + \varrho X_1 d\tau.$$

Für den Gleichgewichtszustand des Parallelepipedons ist es erforderlich, daß diese Summe gleich Null sei. Wenn wir sie also Null setzen und durch $d\tau$ dividieren, so erhalten wir die erste Gleichgewichtsbedingung für das Parallelepipedon.

In der gleichen Weise finden wir die Gleichgewichtsbedingungen für die Projektionen der Kräfte auf die y- und z-Achse.

Wir erhalten somit die folgenden drei Grundbedingungen für das Gleichgewicht des Parallelepipedons:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X_1 = 0\\
\frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y_1 = 0\\
\frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z_1 = 0
\end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

Digitized by Google

Sind die Bedingungen erfüllt, so kann das Parallelepipedon keine fortschreitende Bewegung parallel zu einer Koordinate haben.

Diese Bedingungen sind aber für den Gleichgewichtszustand noch nicht genügend, denn außer den fortschreitenden Bewegungen können auch Drehungen des Parallelepipedons um eine Achse, die durch den Schwerpunkt geht, zustande kommen. Wir wollen also durch den Schwerpunkt des Parallelepipedons zu den Koordinatenachsen parallele Achsen legen und die Bedingungen, unter denen die Summe der Momente aller wirkenden Kräfte in bezug auf eine jede dieser Achsen gleich Null ist, ausdrücken. Dann erhalten wir drei neue Bedingungen, welche mit den Gleichungen (6) uns die erforderlichen sechs Bedingungen des Gleichgewichts unseres Elementarparallelepipedons geben werden.

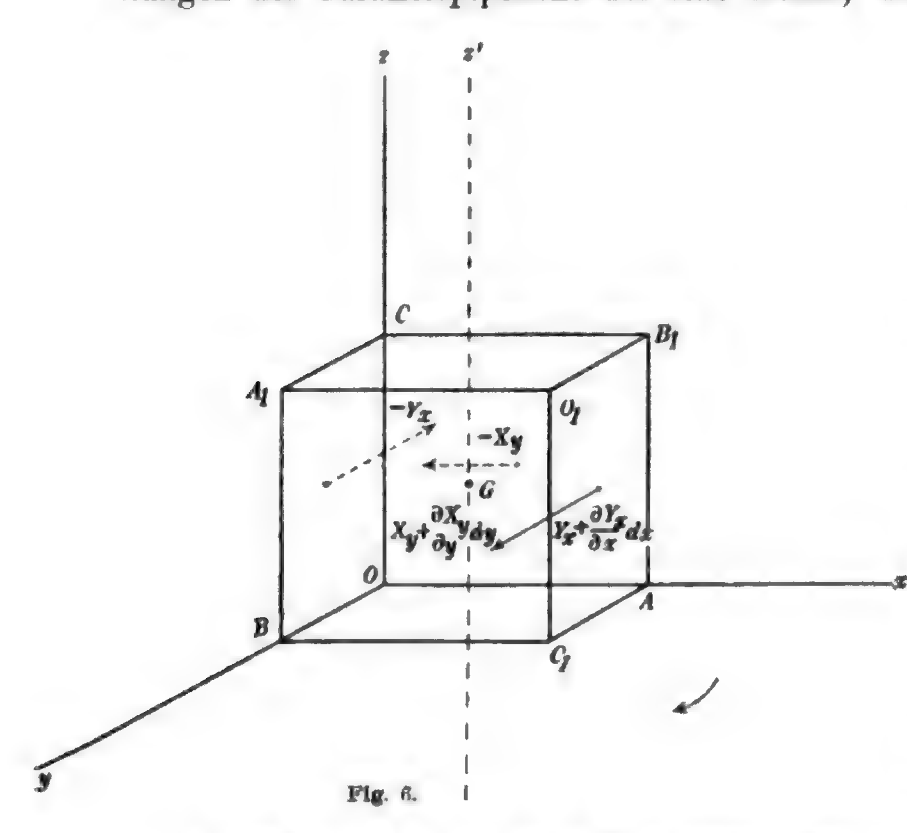


Fig. 6.

Wir wollen zunächst die Gleichgewichtsbedingung für die Achse, welche zu der z-Achse parallel ist und durch den Schwerpunkt des Parallelepipedons geht (Fig. 6), aufstellen und dazu die Summe der Momente aller Kräfte in bezug auf die Achse Gz' bestimmen.

Wir werden das Kraftmoment als positiv auffassen, wenn es das Bestreben hat, den Körper in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers zu drehen, wenn man die Achse entlang nach dem Koordinatenanfang sieht.

Auf die hintere Fläche OBA_1C wirkt die Kraft $-Y_x dy dz$; der Arm ist gleich $\frac{dx}{2}$.

Das entsprechende Moment ist positiv und gleich

$$Y_x dy dz \frac{dx}{2}.$$

Auf die vordere Fläche $AC_1O_1B_1$ wirkt die Kraft

$$\left(Y_x + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx\right) dy dz,$$

der Arm ist gleich $\frac{dx}{2}$.

Das entsprechende Moment ist ebenfalls positiv und gleich

$$Y_x dy dz \frac{dx}{2} + \frac{\partial Y_x}{\partial x} dx \cdot dy dz \cdot \frac{dx}{2}.$$

Digitized by Google

Das resultierende Moment der Kräfte, welche auf die Flächen OBA_1C und $AC_1O_1B_1$ wirken, ist gleich der Summe der beiden Ausdrücke, wobei wir die Größen vierter Ordnung vernachlässigen können.

Also erhalten wir für das gesuchte Moment

$$Y_z dy dz dx.$$

Wir wollen uns jetzt den Flächen $AOCB_1$ und $A_1O_1C_1B$, die senkrecht zur y-Achse stehen, zuwenden.

Auf die hintere Fläche $AOCB_1$ wirkt die Kraft $-X_y dx dz$; der Arm ist gleich $\frac{dy}{2}$. Dieses Kraftmoment ist negativ, denn es strebt das Parallelepipedon in der Richtung, die der des Uhrzeigers entgegengesetzt ist, zu drehen.

$$-X_y dx dz \frac{dy}{2}.$$

Auf die vordere Fläche $A_1O_1C_1B$ wirkt die Kraft

$$\left(X_y + \frac{\partial X_y}{\partial y} dy\right) dx dz,$$

der Arm ist gleich $\frac{dy}{2}$. Das Moment ist ebenfalls negativ, also

$$-X_y dx dz \frac{dy}{2} - \frac{\partial X_y}{\partial y} dy dx dz \frac{dy}{2}.$$

Vernachlässigen wir wieder die Größen höherer Ordnung, so erhalten wir für das resultierende Moment

$$-X_y dx dz dy.$$

Die anderen Spannungsprojektionen geben kein Drehungsmoment um die Achse Gz'.

Was die äußeren Kräfte anbetrifft, so können dieselben nicht in Betracht kommen, denn ihr Moment kann äußerstenfalls kaum eine Größe vierter Ordnung sein; da aber die äußeren Kräfte im Schwerpunkte angreifen, so ist ihr Moment in bezug auf die Achse Gz' selbst gleich Null.

Folglich ist das gesamte Drehungsmoment aller Kräfte in bezug auf die Achse Gz'

$$(Y_z - X_y) dx dy dz.$$

Wenn wir diesen Ausdruck gleich Null setzen und ihn durch das Produkt der Differentiale dividieren, so erhalten wir eine neue Gleichgewichtsbedingung.

Ganz auf dieselbe Weise können wir auch die Gleichgewichtsbedingung, (die Abwesenheit eines resultierenden Drehungsmomentes), in bezug auf die zwei anderen Achsen, die durch G gezogen und zu den Achsen Ox und Oy parallel sind, finden.

Digitized by Google

Also haben wir die folgenden drei neuen Gleichgewichtsbedingungen:

$$\left.\begin{aligned} Y_x &= X_y \\ Z_y &= Y_z \\ X_z &= Z_x \end{aligned}\right\} . \tag{7}$$

Diese Formeln zeigen uns, daß die zwei Tangentialspannungen, welche in den angrenzenden Ebenen zu ein und derselben Kante des Parallelepipedons gerichtet sind, einander gleich sind (Fig. 3).

Diese Ausdrücke sind leicht im Gedächtnis zu behalten, indem man die Buchstaben zyklisch versetzt.

Die Gleichungen (6) und (7) drücken also die endgültigen, notwendigen und hinreichenden Gleichgewichtsbedingungen unseres Elementarparallelepipedons aus.

Die Gleichungen (7) zeigen uns die interessante Eigenschaft der Tangentialspannungen, daß sie immer paarweise einander gleich sind.

Wir sehen also, daß wir statt der früheren neun einzelnen Spannungsprojektionen eigentlich nur sechs Größen zu betrachten haben.

Für diese letzteren wollen wir zweckmäßigere und bequemere Bezeichnungen einführen, d. h. x durch 1, y durch 2 und z durch 3 ersetzen. Setzen wir also

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= X_x \\ N_2 &= Y_y \\ N_3 &= Z_z \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= Z_y = Y_z \\ T_2 &= X_z = Z_x \\ T_3 &= Y_x = X_y \end{aligned}\right\} . \tag{9}$$

Die einzelnen Zahlen N sind die Normalspannungen, die einzelnen T die Tangentialspannungen, wobei der Index bei T darauf hinweist, welcher Buchstabe in der entsprechenden Projektion fehlt.

Wir haben im vorhergehenden gesehen, daß auf eine jede Elementarfläche im Körper eine Normalspannung und zwei zueinander senkrechte Tangentialspannungen wirken.

Jetzt entsteht aber die Frage, ob es keine solche Lage für die Elementarfläche im Körper um den gewählten Punkt geben könne, wo die Tangentialspannungen gleich Null sind, die resultierende Spannung also der Richtung nach mit der Normalen zur Fläche zusammenfällt.

Digitized by Google

Es erweist sich, daß dieses möglich ist, und daß es im ganzen drei Richtungen gibt, für welche die resultierende Spannung mit der Richtung der Normalen zur Fläche zusammenfällt und ferner, daß diese Richtungen senkrecht zueinander stehen.

Zum Beweis nehmen wir ein beliebiges rechtwinkliges Koordinatensystem und eine Elementarfläche an, zu der die Normale mit den Achsen die Winkel α, β und γ bildet.

Auf diese Fläche wirkt die Spannung F, deren Projektionen auf die Koordinaten X, Y, Z seien.

Wir haben früher die Formeln (5) abgeleitet, welche die Abhängigkeit der Projektionen X, Y und Z von den Werten X_x, X_y, X_z, Y_z usw. festsetzen.

Führt man jetzt die neuen Bezeichnungen aus den Gleichungen (8) und (9) ein, so ergeben sich aus den Formeln (5) folgende Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} X &= N_1 \cos\alpha + T_3 \cos\beta + T_2 \cos\gamma \\ Y &= T_3 \cos\alpha + N_2 \cos\beta + T_1 \cos\gamma \\ Z &= T_2 \cos\alpha + T_1 \cos\beta + N_3 \cos\gamma \end{aligned}\right\} . \tag{10}$$

Wir fordern, daß die resultierende Spannung F mit der Normalen zur Fläche zusammenfalle.

Dazu müssen folgende Bedingungen erfüllt werden:

$$X = F\cos\alpha$$
$$Y = F\cos\beta$$
$$Z = F\cos\gamma .$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formeln (10) ein, so ergibt sich:

$$(N_1 - F)\cos\alpha + T_3\cos\beta + T_2\cos\gamma = 0 \tag{11}$$

$$T_3\cos\alpha + (N_2 - F)\cos\beta + T_1\cos\gamma = 0 \tag{12}$$

$$T_2\cos\alpha + T_1\cos\beta + (N_3 - F)\cos\gamma = 0 . \tag{13}$$

Außerdem ist

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 . \tag{14}$$

Wir setzen voraus, daß in diesen Gleichungen die Projektionen der Spannungen N_1, N_2, N_3, T_1, T_2 und T_3 gegeben sind.

Wir haben also vier Gleichungen, aus denen wir die vier unbekannten Größen α, β, γ und F bestimmen können, was im folgenden geschehen soll.

Wir multiplizieren die Gleichung (11) mit T_1, und die Gleichung (12) mit $-T_2$ und addieren die beiden Ausdrücke. Wir erhalten

$$\{T_1(N_1 - F) - T_2 T_3\}\cos\alpha + \{T_1 T_3 - T_2(N_2 - F)\}\cos\beta = 0$$

oder

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{T_2(N_2 - F) - T_1 T_3}{T_1(N_1 - F) - T_2 T_3} . \tag{15}$$

Digitized by Google

Jetzt multiplizieren wir die Gleichung (12) mit $(N_3 - F)$, die Gleichung (13) mit $-T_1$ und addieren dieselben. Wir erhalten

$$\{T_3(N_3 - F) - T_1 T_2\} \cos\alpha + \{(N_2 - F)(N_3 - F) - T_1^2\} \cos\beta = 0$$

oder

$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} = \frac{T_1^2 - (N_2 - F)(N_3 - F)}{T_3(N_3 - F) - T_1 T_2}. \tag{16}$$

Setzt man die Ausdrücke für $\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$ in den Formeln (15) und (16) einander gleich, so erhält man

$$[T_2(N_2 - F) - T_1 T_3][T_3(N_3 - F) - T_1 T_2] \\ - [T_1(N_1 - F) - T_2 T_3][T_1^2 - (N_2 - F)(N_3 - F)] = 0.$$

Wir öffnen die Klammern, ordnen dann die Glieder nach den Potenzen der Größe F.

$$T_2 T_3(N_2 - F)(N_3 - F) - T_1 T_3^2(N_3 - F) - T_1 T_2^2(N_2 - F) + T_1^2 T_2 T_3 \\ - T_1^3(N_1 - F) + T_1^2 T_2 T_3 + T_1(N_1 - F)(N_2 - F)(N_3 - F) \\ - T_2 T_3(N_2 - F)(N_3 - F) = 0.$$

In diesem Ausdrucke heben sich das erste und letzte Glied gegenseitig auf. Dividiert man dann den Ausdruck durch T_1, so erhält man:

$$- T_3^2 N_3 + T_3^2 F - T_2^2 N_2 + T_2^2 F + 2 T_1 T_2 T_3 - T_1^2 N_1 + T_1^2 F \\ + (N_1 - F)(N_2 N_3 - N_2 F - N_3 F + F^2) = 0$$

oder

$$\{- T_3^2 N_3 - T_2^2 N_2 - T_1^2 N_1 + 2 T_1 T_2 T_3\} + \{T_3^2 + T_2^2 + T_1^2\} F \\ + N_1 N_2 N_3 - N_1 N_2 F - N_1 N_3 F + N_1 F^2 - N_2 N_3 F + N_2 F^2 + N_3 F^2 - F^3 = 0,$$

oder

$$- F^3 + (N_1 + N_2 + N_3) F^2 + \{T_3^2 + T_2^2 + T_1^2 - N_1 N_2 - N_1 N_3 - N_2 N_3\} F \\ + \{N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - T_3^2 N_3 - T_2^2 N_2 - T_1^2 N_1\} = 0.$$

Ändert man die Zeichen und ordnet die Glieder etwas anders, so erhält man schließlich

$$F^3 - \{N_1 + N_2 + N_3\} F^2 + \{N_1 N_2 + N_1 N_3 + N_2 N_3 - T_1^2 - T_2^2 - T_3^2\} F \\ - \{N_1 N_2 N_3 + 2 T_1 T_2 T_3 - N_1 T_1^2 - N_2 T_2^2 - N_3 T_3^2\} = 0. \tag{17}$$

Wir erhalten also für die gesuchte Größe F eine Gleichung dritten Grades.

Eine jede solche Gleichung hat aber wenigstens eine reelle Wurzel. Es ist folglich evident, daß es wenigstens eine Richtung gibt, für welche die resultierende Spannung auf unsere Elementarfläche mit der Normalen zur Fläche zusammenfällt und wo also die Tangentialspannungen gleich

Digitized by Google

Null sind. Die entsprechende Lage der Flächenebene heißt die Hauptebene, und die entsprechende Spannung F die **Hauptspannung**.

Wir setzen voraus, daß diese reelle Wurzel der Gleichung (17) A ist.

$$F = A.$$

Dann ist also A die Hauptspannung.

Nachdem wir diese festgestellt haben, drehen wir der Bequemlichkeit der weiteren Betrachtungen halber die Koordinatenachsen so, daß die Ebene yz zu der Hauptebene parallel ist.

Dann sind die Tangentialspannungen auf die zur Achse x senkrechte Fläche gleich Null.

Folglich

$$X_x = N_1 = A$$
$$Y_x = T_3 = 0$$
$$Z_x = T_2 = 0.$$

Dann erhalten auch die Gleichungen (11), (12) und (13) folgende einfache Form:

$$(A - F)\cos\alpha = 0 \tag{18}$$
$$(N_2 - F)\cos\beta + T_1\cos\gamma = 0 \tag{19}$$
$$T_1\cos\beta + (N_3 - F)\cos\gamma = 0. \tag{20}$$

Dieses Gleichungssystem mit der Bedingungsgleichung (14), nach der

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

ist, kann folgende Lösungen haben.

Die erste Lösung ist

$$\alpha = 0, \quad \cos\alpha = 1, \quad \cos\beta = 0, \quad \cos\gamma = 0 \quad \text{und} \quad F = A.$$

Diese Lösung entspricht der schon früher festgesetzten Hauptebene mit der Hauptspannung A.

Die zweite Lösung ist

$$\cos\alpha = 0,$$

ferner aus der Gleichung (19)

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\frac{T_1}{N_2 - F} \tag{21}$$

und aus der Gleichung (20)

$$\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} = -\frac{N_3 - F}{T_1}. \tag{22}$$

Vergleicht man diese zwei Ausdrücke, so erhält man

$$\frac{T_1}{N_2 - F} = \frac{N_3 - F}{T_1}$$

oder

$$F^2 - (N_2 + N_3)F + (N_2 N_3 - T_1^2) = 0. \tag{23}$$

Digitized by Google

Wir sind also zu einer quadratischen Gleichung für F gelangt, welche, wie sich leicht nachweisen läßt, zwei reelle Wurzeln hat.

Wir bezeichnen sie mit B und C.

Löst man diese Gleichung (23), so ergibt sich

$$B = \frac{1}{2}\left[(N_2 + N_3) + \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4\,T_1^2}\right] \quad (24)$$

$$C = \frac{1}{2}\left[(N_2 + N_3) - \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4\,T_1^2}\right]. \quad (25)$$

Die Größe unter dem Wurzelzeichen ist immer positiv und es sind daher die beiden Wurzeln reell.

Wir sehen also, daß die kubische Gleichung (17) drei reelle Wurzeln A, B und C hat, wobei $A = N_1$ ist. Es sind somit für einen jeglichen Punkt im festen Körper immer drei Hauptspannungen und infolgedessen auch drei Lagen der Elementarfläche vorhanden, für welche die resultierende Spannung mit der Normalen zur Fläche zusammenfällt.

Wir wollen jetzt die entsprechenden Lagen der Fläche, oder besser ausgedrückt, die Richtung der entsprechenden Normalen aufsuchen.

Die eine Richtung fällt laut der früheren Annahme mit der x-Achse zusammen. Dann ist

$$\alpha = 0, \quad \beta = 90^0, \quad \gamma = 90^0.$$

Die zwei anderen Lösungen bezeichnen wir entsprechend mit

$$\alpha', \quad \beta', \quad \gamma'$$
$$\alpha'', \quad \beta'', \quad \gamma''.$$

Wir haben uns soeben überzeugt, daß diese zwei Lösungen dem Falle

$$\cos\alpha' = 0 \quad \text{und} \quad \cos\alpha'' = 0$$

entsprechen.

Es folgt daraus, daß die zwei anderen Richtungen zu der Ebene yz parallel sind.

Um dieselben zu finden, eliminieren wir aus den Gleichungen (21) und (22) F.

Zur Abkürzung führen wir folgende Bezeichnung ein

$$\xi = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}. \quad (26)$$

Dann ergibt sich aus der Gleichung (21)

$$\xi N_2 - \xi F + T_1 = 0 \quad (27)$$

und aus der Gleichung (22)

$$\xi T_1 - F + N_3 = 0. \quad (28)$$

Multiplizieren wir die Gleichung (28) mit $-\xi$ und addieren die Gleichung (27), so erhalten wir

$$N_2\xi + T_1 - T_1\xi^2 - N_3\xi = 0,$$

dividieren wir diese Gleichung durch $-T_1$, so wird

$$\xi^2 - \frac{N_2 - N_3}{T_1}\,\xi - 1 = 0. \tag{29}$$

Diese quadratische Gleichung hat zwei reelle Wurzeln. Wir bezeichnen sie durch ξ_1 und ξ_2

$$\xi_1 = \frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'},$$

$$\xi_2 = \frac{\cos\beta''}{\cos\gamma''}.$$

Aus Gleichung (29) erhalten wir

$$\frac{\cos\beta'}{\cos\gamma'} = \frac{1}{2\,T_1}\left[(N_2 - N_3) + \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4\,T_1^2}\right] \tag{30}$$

$$\frac{\cos\beta''}{\cos\gamma''} = \frac{1}{2\,T_1}\left[(N_2 - N_3) - \sqrt{(N_2 - N_3)^2 + 4\,T_1^2}\right]. \tag{31}$$

Kombiniert man diese Gleichungen mit den Bedingungsgleichungen

$$\cos^2\beta' + \cos^2\gamma' = 1$$

$$\cos^2\beta'' + \cos^2\gamma'' = 1,$$

so findet man alle vier unbekannte Größen $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$, $\cos\beta''$ und $\cos\gamma''$.

Aus der Theorie der quadratischen Gleichungen wissen wir, daß das Produkt der Wurzeln gleich dem konstanten Gliede in der Gleichung ist, wenn sie auf dieselbe Form, wie die Gleichung (29) gebracht worden ist.

Folglich ist

$$\xi_1 \xi_2 = -1$$

oder

$$\cos\beta' \cos\beta'' + \cos\gamma' \cos\gamma'' = 0.$$

Diese Gleichung zeigt uns, daß die beiden gesuchten Richtungen der Normalen, die zu der Ebene yz parallel sind, zueinander senkrecht sind; die dritte Richtung ist zur x-Achse parallel.

Wir sehen also, daß es bei einem beliebigen rechtwinkligen Koordinatensystem in einem jeden Punkte des festen Körpers drei zueinander senkrechte Richtungen gibt, für welche die resultierende Spannung mit der Normalen zur Fläche zusammenfällt. Es gibt also immer drei Hauptebenen und drei Hauptspannungen.

Wir benutzen jetzt das bekannte Theorem der Theorie der kubischen Gleichungen, daß nämlich die Summe der drei Wurzeln dem Koeffizienten der unbekannten Größe in der zweiten Potenz mit umgekehrtem Zeichen gleich ist.

Aus Gleichung (17) ergibt sich darnach

$$N_1 + N_2 + N_3 = A + B + C. \tag{32}$$

Digitized by Google

A, B und C sind für einen gegebenen Punkt ganz bestimmte Werte, sowohl der Größe als auch der Richtung nach; N_1, N_2 und N_3 hängen aber von der Auswahl der Richtung der Koordinatenachsen ab.

Die Gleichung (32) drückt also folgenden Lehrsatz aus:

Bei einer willkürlichen Auswahl eines rechtwinkligen Koordinatensystems ist die Summe der Normalspannungen für die drei zueinander senkrechten Flächen eines Parallelepipedons immer eine konstante Größe.

Wir wollen jetzt ein bestimmtes Koordinatensystem wählen, das durch die Spannungsprojektionen N_1, N_2, N_3, T_1, T_2 und T_3 charakterisiert wird.

Es möge die Richtung der Hauptspannung A in dem von uns ausgewählten Punkte mit den Koordinatenachsen Winkel bilden, deren cos dementsprechend l_1, m_1, n_1 sind. Für die Hauptspannung B seien die entsprechenden Größen l_2, m_2, n_2 und für die Spannung C schließlich l_3, m_3, n_3.

Die zusammengehörigen Größen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

	x	y	z
A	l_1	m_1	n_1
B	l_2	m_2	n_2
C	l_3	m_3	n_3

Die Richtungen, auf die sich diese Größen beziehen, sind in jeder vertikalen und horizontalen Gruppe dieser Tabelle zueinander senkrecht.

Auf Grund der Gleichungen (10) können wir folgende 9 Gleichungen niederschreiben:

$$\left.\begin{aligned} A l_1 &= N_1 l_1 + T_3 m_1 + T_2 n_1 \\ A m_1 &= T_3 l_1 + N_2 m_1 + T_1 n_1 \\ A n_1 &= T_2 l_1 + T_1 m_1 + N_3 n_1 \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

$$\left.\begin{aligned} B l_2 &= N_1 l_2 + T_3 m_2 + T_2 n_2 \\ B m_2 &= T_3 l_2 + N_2 m_2 + T_1 n_2 \\ B n_2 &= T_2 l_2 + T_1 m_2 + N_3 n_2 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

$$\left.\begin{aligned} C l_3 &= N_1 l_3 + T_3 m_3 + T_2 n_3 \\ C m_3 &= T_3 l_3 + N_2 m_3 + T_1 n_3 \\ C n_3 &= T_2 l_3 + T_1 m_3 + N_3 n_3 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

Diese Formeln geben uns die Projektionen der Hauptspannungen A, B und C, ausgedrückt durch die Projektionen der Spannungen N und T auf die Koordinatenachsen.

Digitized by Google

Erhebt man jede der Gleichungen (33) zum Quadrat, so findet man die absolute Größe A, wenn man die Beziehung

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,$$

beachtet. Auf gleiche Weise findet man auch B und C.

Es ist jedoch wichtiger, die Spannungen N und T, ausgedrückt durch die Hauptspannungen A, B und C, zu kennen.

Hierfür ist das System der vorhergehenden Gleichungen in bezug auf N_1, N_2 usw. zu lösen, was sich sehr einfach folgendermaßen ausführen läßt.

Wir wollen z. B. den Ausdruck für N_1 aufsuchen.

Dazu multiplizieren wir die erste Gleichung der Gruppe (33) mit l_1, die erste Gleichung der Gruppe (34) mit l_2, und die erste Gleichung der Gruppe (35) mit l_3 und addieren dieselben. Dann ergibt sich

$$Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2 = N_1\{l_1^2 + l_2^2 + l_3^2\} + T_3\{l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3\} + T_2\{l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3\}.$$

l_1, l_2, l_3 sind die cos der Winkel, welche die x-Achse mit den drei zueinander senkrechten Richtungen A, B und C bildet, folglich ist

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1.$$

Andererseits stellt $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3$ die Summe der Produkte der cos der Winkel, welche die Richtungen x und y mit den entsprechenden Richtungen A, B und C bilden, dar, d. h. die Summe ist gleich dem cos des Winkels zwischen den Achsen x und y. Da dieser aber ein rechter Winkel ist, so ist $l_1 m_1 + l_2 m_2 + l_3 m_3 = 0$.

Genau auf dieselbe Weise beweisen wir, daß

$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0.$$

Folglich ist

$$N_1 = Al_1^2 + Bl_2^2 + Cl_3^2. \tag{36}$$

Auf dieselbe Art lassen sich die zwei anderen Normalspannungen bestimmen

$$N_2 = Am_1^2 + Bm_2^2 + Cm_3^2 \tag{37}$$

$$N_3 = An_1^2 + Bn_2^2 + Cn_3^2. \tag{38}$$

Wir wollen jetzt den Ausdruck für die Tangentialspannung T_1 aufsuchen.

Dazu multiplizieren wir die zweite Gleichung in jeder Gruppe (33), (34) und (35) dementsprechend mit n_1, n_2 und n_3, und addieren die drei Gleichungen. Wir erhalten

$$Am_1 n_1 + Bm_2 n_2 + Cm_3 n_3 = T_3(l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3) + N_2(m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3) + T_1(n_1^2 + n_2^2 + n_3^2).$$

Digitized by Google

Da aber auf Grund derselben Erwägungen

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$
$$l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3 = 0$$
$$m_1 n_1 + m_2 n_2 + m_3 n_3 = 0$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$T_1 = A m_1 n_1 + B m_2 n_2 + C m_3 n_3. \tag{39}$$

In gleicher Weise finden wir

$$T_2 = A l_1 n_1 + B l_2 n_2 + C l_3 n_3 \tag{40}$$
$$T_3 = A l_1 m_1 + B l_2 m_2 + C l_3 m_3. \tag{41}$$

Die Formeln (36) bis (41) geben uns die Projektionen der Normal- und Tangentialspannungen, ausgedrückt durch die Hauptspannungen A, B und C.

Diese Formeln haben eine symmetrische und elegante Form.

§ 2. **Die Deformationen.**

Wir haben bisher die Eigenschaften der elastischen Kräfte, welche im festen Körper wirken, kennen gelernt. Jetzt wollen wir uns mit der Deformation des festen Körpers beschäftigen, und zwar nur vom geometrischen Standpunkte aus, also ohne die Gründe zu berühren, die eine Deformation verursachen.

Die Verschiebung des festen Körpers als eines Ganzen werden wir nicht betrachten, sondern nur die relative Verrückung einiger Teilchen des festen Körpers gegen die anderen, d. h. die Deformationen, untersuchen.

Zu diesem Zwecke denken wir uns ein Koordinatensystem, das eine feste Lage hat, und dessen Anfangspunkt sich in irgendeinem Punkte M im festen Körper befindet; die Koordinaten dieses Punktes seien x, y, z.

Durch die Deformation erleidet dieser Punkt eine kleine Verrückung, deren Projektionen auf die Koordinatenachsen u, v, w seien.

Diese drei Größen sind nicht nur Funktionen von der Zeit t, sondern auch von den Koordinaten x, y, z des Punktes, also etwa

$$u = f(t, x, y, z).$$

Wir nehmen jetzt einen angrenzenden Punkt M', dessen Koordinaten

$$x + \Delta x,\ y + \Delta y,\ z + \Delta z$$

seien, mit den Projektionen der entsprechenden Verrückung

$$u',\ v',\ w'.$$

Digitized by Google

Δx, Δy, Δz bedeuten keine Differentiale, sondern einen kleinen Zuwachs der Koordinaten.

Dann können wir setzen

$$u' = u + \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$$

$$v' = v + \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z$$

$$w' = w + \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z.$$

Die Elastizitätstheorie behandelt nur kleine Deformationen, bei denen nicht nur u, v, w sondern auch die neun Differentiale $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$ usw., welche die Koeffizienten von Δx, Δy, Δz bilden, klein sind, wenigstens so klein, daß man die Produkte und Quadrate dieser Größen vernachlässigen darf.

Führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= u' - u \\ \Delta v &= v' - v \\ \Delta w &= w' - w \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

so nehmen die vorhergehenden Gleichungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} \Delta u &= \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z \\ \Delta v &= \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z \\ \Delta w &= \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial w}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Die Normaldistanz zwischen den Punkten M und M' sei s; nach der Deformation ist diese Distanz gleich $s + \Delta s$, wobei

$$s = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

und von derselben Größenordnung ist, wie Δx, Δy, Δz; ferner ist Δs der entsprechende Zuwachs dieser Größe.

Nach der Deformation sind die neuen Koordinaten der Punkte M und M' dementsprechend

$$x + u, \quad y + v, \quad z + w$$

und

$$x + \Delta x + u', \quad y + \Delta y + v', \quad z + \Delta z + w'.$$

Also erhalten wir unter Berücksichtigung der Beziehungen (42) und Vernachlässigung der Quadrate von Δu, Δv und Δw für die neue Distanz $s + \Delta s$ folgenden Ausdruck:

Digitized by Google

$$s + \Delta s = \sqrt{(\Delta x + \Delta u)^2 + (\Delta y + \Delta v)^2 + (\Delta z + \Delta w)^2}$$
$$= \sqrt{\{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2\} + 2\{\Delta x \cdot \Delta u + \Delta y \cdot \Delta v + \Delta z \cdot \Delta w\}}$$
$$= s\sqrt{1 + 2\left\{\frac{\Delta x}{s^2}\Delta u + \frac{\Delta y}{s^2}\Delta v + \frac{\Delta z}{s^2}\Delta w\right\}}$$
$$= s + \frac{1}{s}[\Delta x \cdot \Delta u + \Delta y \cdot \Delta v + \Delta z \cdot \Delta w]$$

oder

$$\Delta s = \frac{1}{s}[\Delta u \cdot \Delta x + \Delta v \cdot \Delta y + \Delta w \cdot \Delta z].$$

Führt man in diesen Ausdruck die Werte von Δu, Δv und Δw aus den Formeln (43) ein, so erhält man schließlich:

$$\Delta s = \frac{1}{s}\left[\frac{\partial u}{\partial x} \cdot \Delta x^2 + \frac{\partial v}{\partial y} \cdot \Delta y^2 + \frac{\partial w}{\partial z} \cdot \Delta z^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\Delta x \cdot \Delta y \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) \cdot \Delta y \Delta z + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) \cdot \Delta z \Delta x\right] \qquad (44)$$

Dies ist der allgemeine Ausdruck für Δs.

Setzen wir nun voraus, daß die anfängliche Richtung s zu der Achse x parallel war, dann ist

$$\Delta x = s, \quad \Delta y = 0 \quad \text{und} \quad \Delta z = 0.$$

Die Gleichung (44) gibt in diesem Falle

$$\Delta s = \Delta(\Delta x) = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Setzt man ebenso voraus, daß s zu den Achsen y und z parallel ist, so erhält man

$$\Delta(\Delta y) = \frac{\partial v}{\partial y}\Delta y$$
$$\Delta(\Delta z) = \frac{\partial w}{\partial z}\Delta z.$$

Sind also die Seiten des Elementarparallelepipedons, dessen Kanten den Koordinatenachsen parallel sind, vor der Deformation Δx, Δy, Δz, so werden sie nach der Deformation nach den soeben gefundenen Ausdrücken

$$\Delta x\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right), \quad \Delta y\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right), \quad \Delta w\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Das anfängliche Volumen V des Parallelepipedons ist gleich dem Produkte $\Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z$.

$$V = \Delta x \Delta y \Delta z.$$

Nach der Deformation wird das Volumen

$$V + \Delta V = \Delta x \cdot \Delta y \cdot \Delta z\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\left(1 + \frac{\partial v}{\partial y}\right)\left(1 + \frac{\partial w}{\partial z}\right).$$

Digitized by Google

Vernachlässigt man die Glieder höherer Ordnung, und zieht von den beiden Seiten der Gleichung V ab, so erhält man

$$\Delta V = V\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right].$$

Die Summe dieser drei ersten Derivierten spielt in der Theorie eine sehr wichtige Rolle. Wir bezeichnen sie mit θ. Dann ist

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{45}$$

und

$$\frac{\Delta V}{V} = \theta. \tag{46}$$

Die Größe θ ist also nichts anderes, als die Vergrößerung der Volumeneinheit um den Punkt M; θ kann natürlich auch negativ sein, dann liegt der Fall einer Kompression der Volumeneinheit vor.

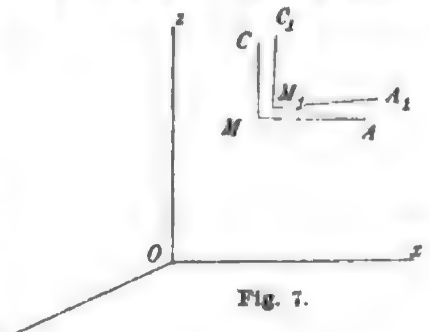


Fig. 7.

Bei den Deformationen eines festen Körpers kann eine Gerade, welche zwei nahe liegende Punkte M und M' verbindet, nicht nur ihre Länge (Formel (44)), sondern auch ihre Richtung in bezug auf die unbeweglichen Koordinatenachsen ändern.

Wir wollen wieder ein Elementarparallelepipedon mit den Seiten Δx, Δy, Δz nehmen und dabei nur zwei Seiten dieses Parallelepipedons MA und MC, die zu den Achsen Ox und Oy parallel sind (Fig. 7), betrachten.

Vor der Deformation waren die Koordinaten

Punkt M	Punkt A
x, y, z	$x + \Delta x, y, z.$

Nach der Deformation sind sie für

Punkt M_1	Punkt A_1
$x + u, y + v, z + w$	$x + \Delta x + u + \Delta u, y + v + \Delta v, z + w + \Delta w$

(Formel 42).

Also sind die Projektionen der Geraden M_1A_1 auf die Koordinatenachsen

$$\Delta x + \Delta u, \quad \Delta v \quad \text{und} \quad \Delta w,$$

wo Δu, Δv, Δw aus den Formeln (43), in denen für den Punkt A Δy und Δz gleich Null sind, abgeleitet werden können.

Auf Grund des vorhergehenden lassen sich diese Projektionen folgendermaßen ausdrücken:

$$\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right)\Delta x, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\Delta x, \quad \frac{\partial w}{\partial x}\Delta x.$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir die Winkel, welche die Richtung $M_1 A_1$ mit den Koordinatenachsen bildet, mit α_1, β_1 und γ_1 so erhalten wir unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung:

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_1 &= \frac{1+\frac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}\\ \cos\beta_1 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}\\ \cos\gamma_1 &= \frac{\frac{\partial w}{\partial x}}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}}\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

Auf dieselbe Weise finden wir für die Projektionen von $M_1 C_1$ auf die Koordinatenachsen

$$\Delta u, \quad \Delta v, \quad \Delta z + \Delta w,$$

wobei in den Formeln (43) Δx und Δy gleich Null sind.

Die Projektionen für $M_1 C_1$ sind also

$$\frac{\partial u}{\partial z}\Delta z, \quad \frac{\partial v}{\partial z}\Delta z, \quad \left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\Delta z.$$

Bezeichnet man die Winkel, welche die Richtung $M_1 C_1$ mit den Koordinatenachsen bildet, mit α_3, β_3 und γ_3, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\cos\alpha_3 &= \frac{\frac{\partial u}{\partial z}}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\\ \cos\beta_3 &= \frac{\frac{\partial v}{\partial z}}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\\ \cos\gamma_3 &= \frac{\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)}{\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Der anfängliche Winkel zwischen der Richtung $M_1 A_1$ und $M_1 C_1$ (vor der Deformation) war gleich $\frac{\pi}{2}$. Nach der Deformation verkleinerte sich dieser Winkel. Wir bezeichnen diese Verkleinerung mit $2\varphi_2$, wobei der Index 2 angibt, daß die entsprechende Größe sich auf die Seiten, welche zu den Achsen Ox und Oz parallel sind, bezieht. Diese Art der Bezeich-

Digitized by Google

nung ist der analog, welche wir früher für die Tangentialspannungen T festgesetzt haben.

Nach einem bekannten Theorem der analytischen Geometrie erhalten wir für den Kosinus des Winkels zwischen $M_1 A_1$ und $M_1 C_1$ folgenden Ausdruck:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2\varphi_2\right) = \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 + \cos\beta_1 \cos\beta_3 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_3$$

oder, mit Bezugnahme auf die Formeln (47) und (48),

$$\sin 2\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{1+2\frac{\partial u}{\partial x}}\cdot\sqrt{1+2\frac{\partial w}{\partial z}}}\left[\left(1+\frac{\partial u}{\partial x}\right)\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\left(1+\frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],$$

oder schließlich, unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right].$$

φ_2 ist die Hälfte des Winkels, um welchen die Seiten des Parallelepipedons, die zu den Achsen Ox und Oz entsprechend parallel waren, sich einander genähert haben.

Wenn wir die entsprechenden Größen für die Seiten Δy und Δx mit φ_3, und für die Seiten Δz und Δy mit φ_1 bezeichnen, so erhalten wir in gleicher Weise die folgenden Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \varphi_2 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \varphi_3 &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\} \tag{49}$$

Um uns die geometrische Bedeutung dieser Größen klar zu machen, setzen wir voraus, daß von den neun Differentialkoeffizienten $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ usw. alle mit Ausnahme von $\frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$ gleich Null sind.

Also

$$\left.\begin{matrix} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & \frac{\partial v}{\partial x} = 0, & \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0, & \frac{\partial v}{\partial y} = 0, & \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ & \frac{\partial v}{\partial z} = 0, & \end{matrix}\right\} \tag{50}$$

Dieser Fall entspricht einer speziellen Art von Deformationen.

Da nämlich nach der Voraussetzung $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ gleich Null sind, so ändern die Seiten des Parallelepipedons Δx, Δy, Δz nach der Deformation ihre Länge nicht.

Digitized by Google

Aus den Formeln (49) folgt

$$\varphi_1 = 0$$

und

$$\varphi_3 = 0.$$

Es bleibt also nur φ_2 übrig.

Da für uns nur die Bestimmung der Größe der Deformationen oder der relativen Verschiebung der Seiten des Parallelepipedons wichtig ist, so können wir voraussetzen, daß der Punkt M fest ist, d. h. u, v und w gleich Null sind.

Da nach Formel (50) $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ und $\frac{\partial v}{\partial z} = 0$ und folglich $\Delta v = 0$ ist (Formel 43), so treten die Punkte des Parallelepipedons, welche in einer und derselben Ebene, die zur Achse y senkrecht ist, liegen, bei der Deformation nicht aus dieser Ebene.

Fig. 8.

Wir wollen jetzt die Seiten des Parallelepipedons, welche zu den Achsen Ox und Oz parallel sind, betrachten (Fig. 8).

$$MA = \Delta x, \qquad MC = \Delta z.$$

Wir erhalten dann das Rechteck $MCDA$, wobei, was gerade bewiesen ist, die verschiedenen Punkte dieses Schnittes während der Deformation nicht aus dieser Ebene treten.

Bei der Untersuchung der Frage, wie die obere Seite des Rechtecks CD sich im Vergleich zur unteren MA verschieben wird, können wir die Gerade MA als unbeweglich annehmen.

Wir haben schon früher gesehen, daß der Winkel zwischen MA und MC um die Größe

$$2\varphi_2 = \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right)$$

sich verringert; folglich bilden die Richtungen MC und MC_1, und auch AD und AD_1 untereinander den Winkel $2\varphi_2$.

Andererseits ist auf Grund der Beziehungen (50), nach denen

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \text{ist,}$$

$$CD = C_1 D_1$$

$$MC = MC_1 \quad \text{und also auch} \quad AD = AD_1.$$

Wir sehen also, daß die betreffende Deformation sich als eine Verschiebung der oberen Seitenfläche CD des Parallelepipedons gegen die untere MA darstellt, und zwar in der Richtung, auf die der Pfeil hinweist.

Die Größe dieser Verschiebung charakterisiert sich durch $2\varphi_2$.

Aus diesem Grunde werden auch die Größen, welche aus den Formeln (49) bestimmt werden können, Schiebungen oder Scherungen genannt.

Digitized by Google

Infolge einer solchen Verschiebung verwandelt sich das anfängliche Rechteck mit den Seiten Δx und Δz in das Parallelogramm MC_1D_1A mit denselben Seiten.

Die Fläche des Rechtecks ist $MCDA = \Delta x \Delta z$, die Fläche des Parallelogramms $MC_1D_1A = \Delta x \Delta z \cdot \cos 2\varphi_2$.

Zerlegt man $\cos 2\varphi_2$ in eine Reihe nach Potenzen von φ_2, so erhält man

$$\cos 2\varphi_2 = 1 - 2\varphi_2^2.$$

φ_2 ist von derselben Größenordnung, wie $\frac{\partial u}{\partial z}$ und $\frac{\partial w}{\partial x}$; da wir aber in dieser Theorie die Quadrate und Produkte dieser kleinen Größen vernachlässigen, so können wir annäherungsweise annehmen, daß

$$\cos 2\varphi_2 = 1.$$

Also ist die Fläche des Parallelogramms MC_1D_1A gleich der des Rechtecks, oder besser ausgedrückt, die Verschiebung ist nicht mit einer Veränderung des Volumens des Elementarparalellepipedons verbunden. Dies folgt auch aus

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta = 0.$$

Wir sehen somit, daß als Hauptelemente der Deformation auftreten: erstens, die Vergrößerung der Volumeneinheit, die durch die Größe

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Fig. 9.

charakterisiert wird, und zweitens, die Verschiebungen, die durch die Größen φ_1, φ_2, φ_3, welche aus den Formeln (49) sich bestimmen lassen, charakterisiert werden.

§ 3. Beziehung zwischen elastischen Kräften und Deformationen.

In den zwei vorhergehenden Paragraphen haben wir ganz unabhängig voneinander die Eigenschaften der elastischen Kräfte, die im festen Körper wirken, und die Deformationen kennen gelernt.

Jetzt wollen wir dazu übergehen, die unmittelbare Beziehung zwischen diesen Größen festzustellen, und wollen uns hierbei auf den folgenden Versuch stützen.

Wir nehmen eine zylindrische Stange von der Länge L (Fig. 9) mit einem kreisförmigen Querschnitt, dessen Durchmesser d sei.

Dann ist die Fläche des Schnittes

$$q = \frac{1}{4}\pi d^2.$$

Wir befestigen das untere Ende der Stange in CD und setzen es dem Zug P aus, der in der Achsenrichtung der Stange erfolgen soll.

Digitized by Google

Die Größe des Zuges, auf die Einheit des Querschnitts bezogen, ist

$$F = \frac{P}{q}. \tag{51}$$

Unter dem Einflusse dieser Kraft verlängert sich die Stange um die Größe ΔL.

Wir wollen jetzt untersuchen, wovon ΔL abhängen kann.

Wenn wir uns auf kleine Deformationen beschränken, können wir ΔL als proportional zu der Kraft F auffassen. Andererseits ist ΔL proportional der anfänglichen Länge L der Stange. Es muß also auch ΔL dem Produkte $L\frac{P}{q}$ proportional sein.

Der Koeffizient muß von den Eigenschaften des Stoffes, aus dem die Stange besteht, abhängen. Bezeichnen wir diesen Proportionalitätsfaktor mit $\frac{1}{E}$. Dann erhalten wir folgende Grundbeziehung:

$$\Delta L = \frac{1}{E} \cdot L\frac{P}{q}. \tag{52}$$

Daraus ergibt sich

$$E = \frac{L}{\Delta L} \cdot \frac{P}{q}. \tag{53}$$

Der Versuch zeigt in der Tat, daß E eine konstante Größe ist, solange die Elastizitätsgrenze nicht überschritten ist, d. h., ΔL ist in der Tat zu P proportional.

Der Koeffizient E heißt der Längenelastizitätsmodul oder Youngscher Modul. Dieser Modul erscheint als eine charakteristische Größe, die die Elastizitätseigenschaften des betreffenden Stoffes bestimmt.

Um sich die physikalische Bedeutung der Grösse E besser klar zu machen, setzen wir für kurze Zeit voraus, daß die Formel (52), welche das Dehnungsgesetz der Stange bestimmt, richtig und für eine jede Größe P gültig sei; wir nehmen jetzt P so groß, daß $\Delta L = L$, d. h. daß unsere Stange auf das Doppelte verlängert würde. In Wirklichkeit wird dieses nicht zutreffen können, denn bei einem so großen P ist die Elastizitätsgrenze überschritten und die Stange würde dann zerreißen; wir wollen es aber nur deswegen voraussetzen, um uns klar zu machen, was die Größe E darstellen würde, wenn die Formel (52) immer anwendbar wäre.

Setzen wir noch $q = 1$, so erhalten wir aus der Formel (53)

$$E = P.$$

Diesen Wert nennen wir den Elastizitätsmodul, es ist also die Kraft, welche am Ende einer Stange, deren Querschnitt gleich Eins ist, angreifen muß, um die Stange auf das Doppelte zu verlängern.

Dies ist die physikalische Bedeutung des Moduls E.

E wird gewöhnlich in Kilogramm pro Quadratmillimeter ausgedrückt; da die festen Körper im allgemeinen einer Längenänderung großen Widerstand entgegensetzen, so ist E meistens eine große Zahl.

Digitized by Google

Für die experimentelle Bestimmung des Elastizitätsmoduls wendet man die Formel (52) an. Man bestimmt die Verlängerung ΔL einer Stange oder eines Drahtes bei einem verhältnismäßig geringen Gewicht P und kann daraus die Größe E ableiten, da die Werte von L und q bekannt sind.

In der folgenden Tabelle ist der Elastizitätsmodul für einige Stoffe angegeben.

	E kg/mm²		E kg/mm²
Stahl	22 000	Silber (weiches)	7140
Eisen (weiches)	20 790	Blei ungefähr	1800
Platin (hartes)	17 040	Holz { Tanne parallel der Faser	1113
Kupfer (hartes)	12 450	Holz { Kiefer „ „ „	564

Diese Zahlen sind nicht als absolute aufzufassen, da ihre Größe sich innerhalb gewisser Grenzen ändert, und zwar wegen der Abhängigkeit von der Reinheit und den physikalischen Eigenschaften des betreffenden Stoffes.

Der Elastizitätsmodul E wird zuweilen auch in Einheiten des absoluten Systems C. G. S. ausgedrückt, d. h. in Dynen pro Quadratzentimeter.

Ist q gleich einem Quadratzentimeter, so müssen alle Zahlen der angeführten Tabelle hundertfach vergrößert werden.

Da ferner 1 Kilogramm = 1000 Gramm = 981 000 Dynen ist, so muß man, um den Elastizitätsmodul in Einheiten des absoluten Systems auszudrücken, die vorhergehenden Zahlen mit $0{,}981 \cdot 10^8$ multiplizieren.

Der Elastizitätsmodul für Stahl ist hiernach

$$E = 2{,}16 \cdot 10^{12} \qquad \text{C. G. S.}$$

In dem vorhergehenden Versuche zur Bestimmung des Youngschen Moduls setzten wir voraus, daß das untere Ende der Stange A befestigt ist und der Zug P an der oberen Grundfläche B angreift. Es ist leicht zu ersehen, daß die Gegenwirkung der Befestigung CD durch eine ebensolche Kraft P, die in entgegengesetzter Richtung auf die untere Grundfläche A der Stange wirkt, ersetzt werden kann (Fig. 9).

Wir können uns also vorstellen, daß die Stange frei und dem Einflusse zweier Kräfte P, die in entgegengesetzten Richtungen auf die Grundflächen der zylindrischen Stange A und B wirken, ausgesetzt ist. Das Resultat wird dadurch nicht geändert.

Die Formel (52) kann auf Grund der Beziehung (51) in folgender Form geschrieben werden:

$$F = E \cdot \frac{\Delta L}{L}, \tag{54}$$

wo $\frac{\Delta L}{L}$ die Verlängerung der Längeneinheit und F die entsprechende Normalspannung, wie üblich, auf die Flächeneinheit bezogen, bedeutet.

$\frac{\Delta L}{L}$ ist eine reine Zahl.

Digitized by Google

Diese Formel zeigt, daß, je größer der Elastizitätsmodul ist, eine desto größere Kraft angewandt werden muß, um eine bestimmte relative Verlängerung der Stange hervorzurufen.

Selbstverständlich erhalten wir, wenn F in entgegengesetzter Richtung wirkt, keine Verlängerung, sondern eine Verkürzung.

Für die relative Verlängerung oder Verkürzung $\frac{\Delta L}{L}$ haben wir den Ausdruck

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{E}. \tag{55}$$

Bei der Dehnung der Stange unter dem Einflusse des Zuges P beschränkt sich die Deformation nicht nur auf eine Verlängerung der Stange um die Größe ΔL.

Der Versuch zeigt, daß dabei auch die Querdimensionen der Stange sich ändern. Der Schnitt bleibt, wie früher, ein kreisförmiger, aber der Durchmesser der Stange d wird um den Betrag Δd kleiner.

Die relative Verkleinerung des Durchmessers ist $\frac{\Delta d}{d}$, wobei wir Δd als positiv auffassen, d. h. wir verstehen unter Δd den absoluten Wert der Veränderung des Durchmessers d.

Es zeigt nun der Versuch, daß das Verhältnis der relativen Verkleinerung der Querschnitte der Stange $\frac{\Delta d}{d}$ zu der relativen Verlängerung $\frac{\Delta L}{L}$ eine konstante Größe ist. Wir bezeichnen sie mit σ.

$$\sigma = \frac{\frac{\Delta d}{d}}{\frac{\Delta L}{L}} \tag{56}$$

Ersetzen wir hier $\frac{\Delta L}{L}$ durch seinen Wert aus der Gleichung (55), so erhalten wir

$$\sigma = E\,\frac{\frac{\Delta d}{d}}{F}$$

$$\frac{\Delta d}{d} = \sigma \cdot \frac{F}{E} \tag{56}$$

σ ist eine reine Zahl und heißt der Modul der Querkontraktion oder Poissonsche Konstante.

Die Koeffizienten E und σ sind, wie wir sehen werden, zwei Größen, die vollkommen die elastischen Eigenschaften eines jeden homogenen und isotropen festen Körpers charakterisieren.

Durch Versuche ist nachgewiesen worden, daß der Modul der Querkontraktion konstant ist. Nicht nur für ein und dasselbe, sondern für fast alle Materialien behält er denselben Wert; im allgemeinen unterscheidet sich σ wenig von $\frac{1}{4}$. Während E, wie wir gesehen haben, von den Eigenschaften

Digitized by Google

des betreffenden Materiales abhängig und großen Schwankungen unterworfen ist, bleibt σ erfahrungsgemäß stets etwa gleich $\frac{1}{4}$.

Diese Bedingung $\sigma = \frac{1}{4}$ entspricht der Theorie von Poisson.

Nachdem wir die Begriffe von den Moduln der Längendehnung und der Querkontraktion festgestellt haben, können wir zur Bestimmung der Abhängigkeit zwischen den Elastizitätsspannungen und den Deformationen übergehen.

Zu dem Zweck schneiden wir aus dem betreffenden Material ein rechtwinkeliges Parallelepipedon mit den Seiten Δx, Δy, Δz parallel zu den Koordinatenachsen aus (Fig. 10).

Die Koordinaten des Punktes M seien x, y, z.

Wir setzen die Flächen dieses Parallelepipedons paarweise den ausdehnenden Normalspannungen N_1, N_2, N_3, die auf die entsprechenden Flächen entgegengesetzt wirken, aus.

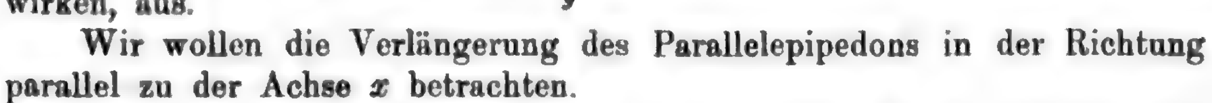


Fig. 10.

Wir wollen die Verlängerung des Parallelepipedons in der Richtung parallel zu der Achse x betrachten.

Entsprechend der Formel (55) ist die Verlängerung der Längeneinheit in der erwähnten Richtung gleich $\frac{N_1}{E}$.

Die Kräfte N_2 und N_3, die das Parallelepipedon in den Richtungen zur Achse x senkrecht ausdehnen, veranlassen einzeln infolge der Querkontraktion die Verkürzung des Parallelepipedons in der Richtung Ox.

Die relative Verkürzung der Längeneinheit in der gegebenen Richtung, veranlaßt durch die Kraft N_2 und N_3, ist nach Formel (56).

$$\sigma \frac{N_2}{E}$$

und

$$\sigma \frac{N_3}{E}.$$

Die relative Verlängerung der Kanten Δx des Parallelepipedons wird sich in folgender Weise ausdrücken lassen:

$$\frac{1}{E}[N_1 - \sigma(N_2 + N_3)].$$

Andererseits haben wir gesehen (Folgerung aus Formel (44)), daß die Verlängerung der Kante Δx des Parallelepipedons gleich ist

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x.$$

Digitized by Google

Folglich ist die Verlängerung der Längeneinheit in der gegebenen Richtung $\frac{\partial u}{\partial x}$ gleich.

Vergleicht man diese Ausdrücke, so ergibt sich

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}[N_1 - \sigma(N_2 + N_3)]. \tag{57}$$

Auf gleiche Weise finden wir die zwei folgenden Beziehungen durch zyklische Vertauschung der Buchstaben:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{E}[N_2 - \sigma(N_3 + N_1)]. \tag{58}$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{E}[N_3 - \sigma(N_1 + N_2)]. \tag{59}$$

Diese drei Formeln stellen die Beziehungen zwischen den Normalspannungen N_1, N_2, N_3 und den Derivierten der Verrückungen u, v und w nach x, y, z dar.

Addiert man diese drei Ausdrücke und berücksichtigt, daß

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \theta,$$

(Formel (45) und (46)), d. h. gleich der Vergrößerung der Volumeneinheit ist, so erhält man

$$\theta = \frac{1}{E}[1 - 2\sigma][N_1 + N_2 + N_3]. \tag{60}$$

Im festen Körper ist die Summe der drei Normalspannungen

$$N_1 + N_2 + N_3$$

für den betreffenden Punkt, wie schon früher bewiesen ist, immer eine konstante Größe, die von der Richtung der Koordinatenachsen unabhängig ist.

Diese Größe ist gleich der Summe der drei Hauptspannungen $A + B + C$ (Formel (32)).

Aus der Formel (60) finden wir

$$N_1 + N_2 + N_3 = \frac{E}{1 - 2\sigma} \cdot \theta. \tag{61}$$

Es ist selbstverständlich, daß die Vergrößerung der Volumeneinheit von der Wahl der Richtungen der Koordinatenachsen nicht abhängt, was auch durch die Formel (61) bestätigt wird, da

$$N_1 + N_2 + N_3 = A + B + C$$

für einen gegebenen Punkt im festen Körper eine konstante Größe ist.

Wir werden jetzt jede Normalkomponente durch die Elemente der Deformation des Parallelepipedons ausdrücken.

Addiert man zu der rechten Seite der Gleichung (57)

$$+\frac{1}{E}\sigma N_1 \quad \text{und} \quad -\frac{1}{E}\sigma N_1,$$

Digitized by Google

so erhält man

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{E}\left[(1+\sigma)N_1 - \sigma(N_1 + N_2 + N_3)\right],$$

oder mit Bezugnahme auf Formel (61)

$$E\frac{\partial u}{\partial x} = (1+\sigma)N_1 - \frac{\sigma}{(1-2\sigma)}\cdot E\theta.$$

Daraus erhalten wir schließlich

$$N_1 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}. \tag{62}$$

In gleicher Weise finden wir

$$N_2 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} \tag{63}$$

$$N_3 = \frac{\sigma E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}\,\theta + \frac{E}{1+\sigma}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}. \tag{64}$$

Diese Formeln, in denen die Normalspannungen durch die Elemente der Deformation ausgedrückt sind, haben eine einfache und dabei elegante Form. Sie enthalten die Konstanten E und σ, die die elastischen Eigenschaften des festen Körpers charakterisieren.

Statt die elastischen Eigenschaften des Stoffes durch die Koeffizienten E und σ zu charakterisieren, kann man sie mit Lamé durch zwei andere Konstanten λ und μ charakterisieren, welche mit E und σ in folgenden Beziehungen stehen:

$$\lambda = \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}E \tag{65}$$

$$\mu = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma}. \tag{66}$$

Dann nehmen unsere Gleichungen für die Normalspannungen folgende einfache Form an:

$$\left.\begin{aligned} N_1 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x} \\ N_2 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y} \\ N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned}\right\}. \tag{67}$$

Wir wollen noch σ und E durch λ und μ ausdrücken.

Aus Gleichung (66) folgt

$$\frac{E}{1+\sigma} = 2\mu. \tag{68}$$

Setzt man diesen Wert in die Formel (65) ein, so ergibt sich

$$\lambda(1-2\sigma) = 2\mu\sigma$$

oder

$$\lambda = 2\sigma(\lambda+\mu).$$

Also haben wir schließlich

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lambda}{\lambda + \mu}. \tag{69}$$

λ und μ sind ihrer physikalischen Bedeutung nach (Formel (67) und (68)) immer positiv.

Andererseits ist

$$\sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Wir können nun ohne jegliche Voraussetzung in bezug auf die Zahlenwerte λ und μ die Grenzen, zwischen denen σ liegt, bestimmen. Es sind nämlich die möglichen Grenzen des Verhältnisses $\frac{\lambda}{\mu}$ 0 und ∞; folglich muß σ bestimmt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{1}{2}$ liegen. In der Tat ist für die Mehrzahl der Körper σ ungefähr der halben Summe dieser Werte gleich, d. h. gleich $\frac{1}{4}$.

Aus der Formel (69) erhalten wir

$$1 + \sigma = \frac{1}{2} \cdot \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu}$$

und

$$1 - 2\sigma = \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Folglich ist

$$\frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} = \frac{\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\lambda+\mu}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{3\lambda+2\mu}{\lambda+\mu}\cdot\frac{\mu}{\lambda+\mu}} = \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{\lambda+\mu}{3\lambda+2\mu}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formel (65) ein, so findet man E.

$$E = \frac{\mu}{\lambda + \mu}(3\lambda + 2\mu). \tag{70}$$

Die Formeln (69) und (70) geben die Ausdrücke σ und E durch die neuen Konstanten λ und μ.

Der Konstanten μ hat man eine besondere Benennung gegeben, nämlich Starrheits- oder Schiebungsmodul. Warum diese Konstante so benannt ist, werden wir weiter unten erfahren, wenn wir den Ausdruck für die Tangentialspannungen als Funktion der Deformationselemente abgeleitet haben.

In der Elastizitätstheorie kommt noch eine Konstante vor, die folgendermaßen bestimmt ist.

Wir setzen voraus, daß auf unser Parallelepipedon von allen Seiten auf jede Fläche ein äußerer, für jede Fläche normaler, gleicher Druck p wirkt.

Dann ist

$$N_1 = N_2 = N_3 = -p.$$

Digitized by Google

Das Parallelepipedon wird dann der allseitigen Kompression ausgesetzt, und θ negativ sein.

Addiert man jetzt die drei Gleichungen (67), so erhält man (siehe auch die Formel (45))

$$-3p = 3\lambda\theta + 2\mu\theta$$

oder

$$p = -[\lambda + \tfrac{2}{3}\mu]\,\theta.$$

Der Koeffizient von θ, den wir mit k bezeichnen, ist

$$k = \lambda + \tfrac{2}{3}\mu. \tag{71}$$

Er charakterisiert die Größe des äußeren Druckes, welcher die betreffende allseitige Kompression θ veranlaßt.

Also

$$p = -k\theta. \tag{72}$$

k heißt der Modul der allseitigen Kompression.

Wir drücken k durch E und σ aus.

Auf Grund der Gleichungen (71), (65) und (66) haben wir

$$k = \frac{E}{1+\sigma}\left[\frac{\sigma}{1-2\sigma} + \frac{1}{3}\right] = \frac{E}{1+\sigma} \cdot \frac{3\sigma + 1 - 2\sigma}{3(1-2\sigma)},$$

oder

$$k = \frac{1}{3} \cdot \frac{E}{1-2\sigma}. \tag{73}$$

Wir wollen nun sehen, was uns die verschiedenen Formeln geben, welche die verschiedenen Elastizitätskoeffizienten verbinden, wenn wir nach Poisson σ gleich $\frac{1}{4}$ setzen.

Aus den Formeln (65), (66) und (73) ergibt sich dann

$$\lambda = \tfrac{2}{5}E \tag{74}$$

$$\mu = \tfrac{2}{5}E \tag{75}$$

$$k = \tfrac{2}{3}E \tag{76}$$

$$\lambda = \mu. \tag{77}$$

Ist also $\sigma = \frac{1}{4}$, so ist die Konstante λ dem Starrheitsmodul μ gleich, ferner ist der Starrheitsmodul gleich $\frac{2}{5}$ des Moduls der Längenelastizität.

Wir wollen jetzt die Abhängigkeit der Tangentialspannung T von den Elementen der Deformation unseres Parallelepipeds ableiten.

Wir nehmen wiederum ein rechtwinkliges Parallelepipedon an, machen einen Schnitt parallel zur zx-Ebene und erhalten ein Rechteck.

Wir setzen ferner voraus, daß auf die untere und obere Grundfläche AB und CD des Parallelepipeds in entgegengesetzten Richtungen normal zu ihnen die Dehnungskraft F wirkt, wo F laut unserer Voraussetzung auf die Flächeneinheit bezogen ist.

Digitized by Google

Wir wollen nun durch das Parallelepipedon vier Schnitte zur y-Achse parallel in der Weise nehmen, so daß wir in der Ebene $ABCD$ das Rechteck $EGHK$ erhalten.

Infolge der Dehnungskräfte F, welche die Längenausdehnung und die Querkontraktion des Parallelepipeds veranlassen, nimmt das letztere die Form des abgebildeten Rechtecks $AB_1C_1D_1$ an, wobei wir der Bequemlichkeit wegen das neue Parallelepiped so gezeichnet haben, daß seine linke und obere Fläche AD und AB der Richtung nach mit ihrer anfänglichen Lage vor der Dehnung zusammenfallen.

Fig. 11.

Bei der Deformation unseres Parallelepipedons unter dem Einfluß der Normalspannungen F verwandelt sich nun das Rechteck $EGHK$ in das Parallelogramm $E_1G_1H_1K_1$. Wir bezeichnen den spitzen Winkel zwischen den Geraden AG und EG mit ψ, also

$$\sphericalangle AGE = \psi.$$

Wird die dem Teile AG entsprechende Fläche mit S und die dem Teile EG entsprechende mit S_1 bezeichnet, so ist

$$S_1 = \frac{S}{\cos\psi}.$$

Die volle auf AG und EG wirkende Kraft ist gleich $F \cdot S$, und die auf die Flächeneinheit EG wirkende Spannung gleich F_1, wo

$$F_1 = \frac{FS}{S_1} = F\cos\psi.$$

Diese Kraft ist vertikal nach oben gerichtet.

Die Projektion dieser Spannung auf die Richtung EG, d. h. die Tangentialspannung T parallel zur Ebene zx, wird also ausgedrückt durch

$$T = F\cos\psi\sin\psi \quad \text{(s. auch Formel (3)).} \qquad (78)$$

Da der Winkel $BGH = \frac{\pi}{2} - \psi$ ist, so finden wir auch für die Tangentialspannungen nach der Richtung HG

$$T = F\cos\psi\sin\psi.$$

Also sind die beiden Tangentialspannungen, die auf die Fläche EG und GH in der Richtung nach dem Punkte G wirken, einander gleich, was mit den Auseinandersetzungen des § 1 übereinstimmt.

Digitized by Google

Bezeichnen wir ferner die Verlängerung der Längeneinheit in der Richtung AD mit s, und die Verkürzung der Längeneinheit in der Richtung AB mit s'.

Es ergibt sich dann infolge der Beziehungen (55) und (56)

$$s = \frac{F}{E} \tag{79}$$

und

$$s' = \sigma \frac{F}{E}. \tag{80}$$

Nach der Deformation wird der Winkel $AGE = \psi$ gleich dem Winkel AG_1E_1, d. h. er wird um den Wert $\Delta\psi$ größer.

Aus dem Dreieck AG_1E_1 haben wir

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \frac{AE_1}{AG_1}.$$

Andererseits ist

$$AE_1 = AE(1 + s),$$

$$AG_1 = AG(1 - s')$$

und

$$\frac{AE}{AG} = \operatorname{tg}\psi;$$

folglich

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \operatorname{tg}\psi \cdot \frac{1+s}{1-s'}. \tag{81}$$

Da $\Delta\psi$, s und s' kleine Größen sind, so erhalten wir unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$\operatorname{tg}(\psi + \Delta\psi) = \frac{\operatorname{tg}\psi + \Delta\psi}{1 - \Delta\psi \cdot \operatorname{tg}\psi} = (\operatorname{tg}\psi + \Delta\psi)(1 + \Delta\psi \operatorname{tg}\psi)$$
$$= \operatorname{tg}\psi + \Delta\psi(1 + \operatorname{tg}^2\psi) = \operatorname{tg}\psi + \frac{\Delta\psi}{\cos^2\psi}$$

und

$$\frac{1+s}{1-s'} = (1+s)(1+s') = 1 + s + s'$$

oder den Beziehungen (79) und (80) zufolge

$$\frac{1+s}{1-s'} = 1 + (1+\sigma)\frac{F}{E}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (81) ein, so ergibt sich

$$\frac{\Delta\psi}{\cos^2\psi} = \operatorname{tg}\psi \cdot (1+\sigma)\frac{F}{E}$$

oder

$$\Delta\psi = \frac{1+\sigma}{E} \cdot F \cdot \sin\psi\cos\psi.$$

$F\sin\psi\cos\psi$ ist aber nach der Formel (78) gleich der Tangentialspannung T, wir finden somit schließlich

$$\Delta\psi = \frac{1+\sigma}{E} \cdot T. \tag{82}$$

Digitized by Google

Wir sehen also, daß die Änderung des Winkels ψ der Tangentialspannung T proportional ist.

Da aber in der Richtung HG dieselbe Tangentialspannung T wirkt, so verwandelt sich der Winkel BGH in BG_1H_1, indem er sich um $\Delta\psi$ vergrößert.

Der anfänglich rechte Winkel EGH wird sich also wegen der Deformation in $E_1G_1H_1$ verwandeln, d. h. er verringert sich um $2\Delta\psi$.

Um dieselbe Größe $2\Delta\psi$ vergrößert sich der Winkel GHK; er wird gleich $G_1H_1K_1$.

Wir sehen also, wenn wir nur die relative Deformation des Rechtecks in Betracht ziehen, daß der Winkel $2\Delta\psi$ die Winkelverschiebung der oberen Fläche EG in bezug auf die untere KH charakterisiert.

Wir drehen jetzt die Achsen z und x so, daß die Achse Oz senkrecht zu der oberen Fläche EG wird, dann wird T der x-Achse parallel sein und nichts anderes darstellen als die Tangentialspannung, welche wir früher mit X_z oder T_2 bezeichnet haben (Fig. 3 und Formel (9)). Außerdem ist $2\Delta\psi$ der entsprechende Verschiebungswinkel, den wir mit $2\varphi_2$ bezeichnet haben (Fig. 8).

Folglich ist

$$\Delta\psi = \varphi_2.$$

Nach der zweiten Formel (49) aber ist

$$\varphi_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \Delta\psi.$$

Setzt man diesen Ausdruck $\Delta\psi$ in die Formel (82) ein, so erhält man

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right) = \frac{1+\sigma}{E}\cdot T_2$$

oder

$$T_2 = \frac{1}{2}\,\frac{E}{1+\sigma}\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

und schließlich nach Formel (66)

$$T_2 = \mu\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right). \tag{83}$$

Da aber $\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$ dem ganzen Verschiebungswinkel $2\varphi_2$ gleich ist, so ist

$$T_2 = \mu\cdot(2\varphi_2).$$

Wir sehen also, daß die Konstante μ die Eigenschaften des betreffenden Stoffes, einer Verschiebung Widerstand zu leisten, charakterisiert; denn je größer μ ist, desto größer muß die Tangentialspannung sein, welche für eine gewisse Verschiebung $(2\varphi_2)$ erforderlich ist. Infolgedessen hat man die Konstante μ, worauf wir schon früher hingewiesen haben, den Schiebungsmodul genannt. Die Verrückung ist immer mit einer Änderung der Form des Körpers verbunden. Es charakterisiert daher auch μ die

Digitized by Google

Eigenschaft des betreffenden Stoffes, einer Veränderung seiner Form Widerstand zu leisten, weshalb es auch Starrheitsmodul genannt worden ist.

In gleicher Weise, wie wir den Ausdruck für die Tangentialspannung T_2 als Funktion der Elemente, die die Deformation des festen Körpers charakterisieren, abgeleitet haben, können wir ihn auch für die zwei anderen Tangentialspannungen T_3 und T_1 ableiten.

Die entsprechenden Ausdrücke lassen sich sehr einfach auf Grundlage der früher angeführten Formel (83) durch zyklische Vertauschung bilden.

Wir haben also schließlich

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} \\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} \\ T_3 &= \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{84}$$

Die Aufgabe, die wir uns am Anfange dieses Abschnittes gestellt haben, ist hiermit gelöst.

Die Formeln (67) geben uns die Größen der drei Normalspannungen und die Formeln (84) die drei Tangentialspannungen, ausgedrückt durch die Elemente der Deformation, d. h. durch die Derivierten der Projektionen der Verrückungen u, v, w des betreffenden Punktes nach x, y und z und durch die zwei Konstanten λ und μ, welche die elastischen Eigenschaften des betreffenden festen Körpers charakterisieren.

Auf diese Ableitung der vorstehenden Grundsätze der Elastizitätstheorie wollen wir uns hier beschränken.

Zweites Kapitel.

Die Fortpflanzung elastischer Schwingungen.

§ 1. Longitudinale und transversale Schwingungen.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir die Eigenschaften der Elastizitätsspannungen im festen Körper, dann die Deformationen eines Elementarparallelepipeds kennen gelernt und ferner die Beziehungen zwischen den elastischen Kräften und Deformationen abgeleitet.

Jetzt wollen wir die Grundgleichungen der Bewegung für einen beliebigen Punkt eines gegebenen festen Körpers ableiten.

Wir denken uns in einem festen Körper um einen willkürlichen Punkt M mit den Koordinaten x, y, z ein Elementarparallelepiped konstruiert, dessen Seiten dx, dy und dz seien. Bezeichnet ρ die Stoffdichte in dem gegebenen Punkte, so ist die Masse des Parallelepipeds gleich $\rho d\tau$, wo $d\tau = dx dy dz$ ist.

Digitized by Google

Bei einer Verrückung des Punktes M seien die entsprechenden Projektionen auf die Koordinatenachsen wie früher u, v und w.

Diese Größen sind nicht nur Funktionen der Koordinaten des Punktes M, d. h. von x, y, z, sondern auch der Zeit t.

Die zweiten Derivierten der Verrückung nach der Zeit, d. h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

sind die Projektionen der Beschleunigung der Bewegung des Punktes M.

Nach einem Grundtheorem der Mechanik muß das Produkt der Masse des Elementarparallelepipedons und der Beschleunigung $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ der Summe der Projektionen aller auf das gegebene Parallelepiped wirkenden Kräfte auf die x-Achse gleich sein.

In § 1 des vorhergehenden Kapitels, bei der Ableitung der Formeln (6), die die Gleichgewichtsbedingungen des Elementarparallelepipeds bestimmen, haben wir gesehen, daß die Summe aller auf das Parallelepiped parallel zur Achse x wirkenden Kräfte, gleich war:

$$\left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X_1\right] d\tau,$$

wo X_1 die Projektion der äußeren Kraft, welche auf die Masseneinheit des Punktes M_1 wirkte, ist, und X_x, X_y und X_z die Projektionen der Spannungen sind.

Also erhalten wir

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} d\tau = \left[\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X_1\right] d\tau.$$

Ähnliche Gleichungen können wir auch für die zwei anderen Beschleunigungskomponenten hinschreiben. Dividiert man diese Gleichungen durch $d\tau$, so ergibt sich folgende Gruppe von Grundgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} + \frac{\partial X_z}{\partial z} + \varrho X_1 \\
\varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} + \frac{\partial Y_z}{\partial z} + \varrho Y_1 \\
\varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial Z_x}{\partial x} + \frac{\partial Z_y}{\partial y} + \frac{\partial Z_z}{\partial z} + \varrho Z_1
\end{aligned}\right\} . \tag{1}$$

Dies sind die Bewegungsgleichungen des Punktes M. Im Gleichgewichtszustande sind die linken Seiten dieser Gleichungen gleich Null; wir erhalten dann die bekannte Gruppe von Gleichungen (6) § 1, Kap. I, welche die Gleichgewichtsbedingungen des Elementarparallelepipeds bestimmen.

Wir wollen nun in die Gleichungen (1) die Bezeichnungen einführen, welche wir für die Normal- und Tangentialspannungen gewählt haben (Formel (8) und (9) § 1, Kap. I).

Digitized by Google

Dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial N_1}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial y} + \frac{\partial T_2}{\partial z} + \varrho X_1 \\ \varrho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_3}{\partial x} + \frac{\partial N_2}{\partial y} + \frac{\partial T_1}{\partial z} + \varrho Y_1 \\ \varrho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_2}{\partial x} + \frac{\partial T_1}{\partial y} + \frac{\partial N_3}{\partial z} + \varrho Z_1 \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

In den Aufgaben der Seismologie sind die äußeren Kräfte X_1, Y_1, Z_1, welche durch die Schwerkraft bedingt werden, sehr klein im Vergleich zu den verschiedenen Spannungen, die auf den gegebenen Punkt wirken; wir können deshalb diese Kräfte in erster Annäherung vernachlässigen und setzen also in den Gleichungen (2) X_1, Y_1 und Z_1 gleich Null.

Wir wollen nun eine Umgestaltung der Gleichungen (2) vornehmen.

Die erste Gleichung enthält die Normalspannung N_1 und zwei Tangentialspannungen T_3 und T_2, welche wir durch die Deformationselemente ausdrücken können. Denn die erste Gleichung (67) und die zweite und dritte (84) des vorhergehenden Kapitels geben uns

$$N_1 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}$$

$$T_3 = \mu\left\{\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right\}$$

$$T_2 = \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\},$$

wo θ die Vergrößerung der Volumeneinheit darstellt, wobei nach Formel (45) Kap. I ist

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}. \tag{3}$$

Hieraus finden wir

$$\frac{\partial N_1}{\partial x} = \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + 2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial T_3}{\partial y} = \mu\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y} + \mu\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial T_2}{\partial z} = \mu\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \mu\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial z}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die erste Formel (2) ein, und setzt ferner $X_1 = 0$, so erhält man

$$\begin{aligned} \varrho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}\right\} \\ &= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\frac{\partial}{\partial x}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} \\ &= \lambda\frac{\partial\theta}{\partial x} + \mu\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right\} + \mu\frac{\partial\theta}{\partial x}. \end{aligned}$$

Digitized by Google

In der mathematischen Physik ist es gebräuchlich, zur Abkürzung die Summe der zweiten Derivierten irgendeiner Funktion nach den Koordinaten x, y, z mit Δ zu bezeichnen. Also

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \Delta u. \tag{4}$$

Führt man diese Bezeichnung ein, so erhält man schließlich

$$\varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Auf dieselbe Weise finden wir auch die Ausdrücke für die zwei anderen Größen v und w.

Wir erhalten somit die folgenden Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \mu \Delta u + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial x} \\ \varrho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \Delta v + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial y} \\ \varrho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \mu \Delta w + (\lambda + \mu) \frac{\partial \theta}{\partial z} \end{aligned}\right\} . \tag{5}$$

Dies sind die Grunddifferentialgleichungen der Bewegung für einen beliebigen Punkt eines festen Körpers, bei welchem nur Elastizitätsspannungen wirken.

Diese Gleichungen enthalten außer den verschiedenen Derivierten der Verrückung noch zwei Elastizitätskoeffizienten λ und μ und die Stoffdichte ϱ. Sie gehören zur Klasse der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung und sind die Fundamentalgleichungen, auf die sich die weiteren Ausführungen und Folgerungen stützen.

Wir wollen jetzt den Differentialquotienten der ersten Gleichung nach x, der zweiten nach y und der dritten nach z nehmen und alle diese Gleichungen addieren. Berücksichtigen wir noch, daß das Resultat der Differentiation von der Reihenfolge, in welcher wir differentiieren, unabhängig ist, so erhalten wir

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = \mu \Delta \left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right\} + (\lambda + \mu) \left\{\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right\}$$

oder, mit Rücksicht auf die Beziehungen (3) und (4)

$$\varrho \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \mu \Delta \theta + (\lambda + \mu) \Delta \theta,$$

oder schließlich

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{(\lambda + 2\mu)}{\varrho} \cdot \Delta \theta. \tag{6}$$

Diese Gleichung enthält nur eine Variable θ, d. h. die Vergrößerung oder Verringerung der Volumeneinheit, je nachdem θ positiv oder negativ ist

Digitized by Google

θ als Integral dieser Gleichung ist eine Funktion von x, y, z und t

$$\theta = F(x, y, z, t).$$

Setzen wir in diesem Ausdruck $t = \text{const.}$, so erfahren wir, wie θ im ganzen festen Körper in einem bestimmten Moment verteilt ist, d. h. wo Kompression oder Kondensation und wo Dilatation vorhanden ist. Setzt man aber x, y und $z = \text{const.}$, so ergibt sich, wie in dem gegebenen Punkte des festen Körpers θ sich mit der Zeit ändert.

Falls von irgendeinem Punkte des festen Körpers eine schwingende Bewegung ausgeht, so bestimmt die Gleichung (6) das Fortpflanzungsgesetz der Kondensations- und der Dilatationswellen.

Aus den Grundgleichungen (5) kann noch eine andere wichtige Folgerung abgeleitet werden.

Bilden wir von der dritten Gleichung der Gruppe (5) den Differentialquotienten nach y und von der zweiten nach z und ziehen von der dritten die zweite ab, so erhalten wir

$$\varrho \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = \mu \Delta \left\{\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right\}. \tag{7}$$

Die Glieder, welche den Faktor $(\lambda + \mu)$ enthalten, heben sich hierbei weg.

In diesem Ausdruck kann man die Differenz $\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}$ als eine neue abhängige Variable betrachten. Bezeichnen wir sie mit 2ξ und die zwei anderen Größen, welche sich hieraus durch zyklische Vertauschung der Buchstaben ergeben, dementsprechend mit 2η und 2ζ, so erhalten wir:

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right] \\ \eta &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right] \\ \zeta &= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right] \end{aligned}\right\}. \tag{8}$$

Auf Grund der Formel (7) ergibt sich dann die folgende Gruppe von Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho}\Delta\xi \\ \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho}\Delta\eta \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} &= \frac{\mu}{\varrho}\Delta\zeta \end{aligned}\right\}. \tag{9}$$

Diese Gleichungen sind von derselben Art wie die Gleichung (6), nur ist der Faktor vor dem Zeichen Δ ein anderer.

Wir wollen uns nun klar machen, was z. B. die Größe η darstellt.

Digitized by Google

Wir nehmen den Punkt M mit den Koordinaten x, y, z und fällen aus M die Senkrechte MA auf die y-Achse (Fig. 12). Die Länge dieser Senkrechten bezeichnen wir mit r, und den Winkel MAD mit ψ.

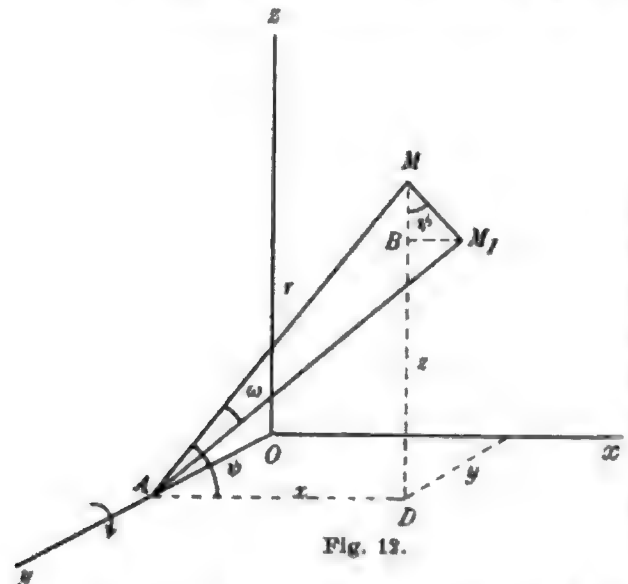


Fig. 12.

Dann ist

$$\left.\begin{aligned} z &= r \sin \psi \\ x &= r \cos \psi \end{aligned}\right\}. \tag{10}$$

Setzen wir voraus, daß die Verrückung des Punktes M infolge einer kreisförmigen Bewegung des Teiles des festen Körpers, welcher unmittelbar an den Punkt M angrenzt, um die Achse Oy vor sich gegangen sei, setzen wir ferner den Drehungswinkel ω als sehr klein voraus, dann verschiebt sich M nach M_1, wobei der Winkel M_1MB auch gleich ψ ist und

$$MM_1 = r\omega.$$

Bei dieser Drehung in der Richtung der Uhrzeigerbewegung wird die Koordinate x um die Größe $BM_1 = r\omega \sin \psi$ größer und die Koordinate z um die Größe $BM = r\omega \cos \psi$ kleiner. Die Koordinate y bleibt unverändert.

Wir werden folglich in diesem Falle haben

$$u = \omega \cdot r \sin \psi$$

$$w = -\omega \cdot r \cos \psi$$

oder auf Grund der Formeln (10)

$$u = \omega \cdot z$$

$$w = -\omega \cdot x.$$

Hieraus finden wir

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$-\omega = \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Ziehen wir nun die eine Gleichung von der anderen ab, so erhalten wir

$$\omega = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right\}.$$

Wir sehen also, daß ω nichts anderes ist als die Größe, welche wir mit η bezeichnet haben (siehe die zweite Formel (8)).

Es ergibt sich somit, daß die Größen ξ, η und ζ, welche die Formeln (9) enthalten, kleine Drehungswinkel der Elemente des festen Körpers, welche unmittelbar an den gegebenen Punkt angrenzen, um die entsprechenden Koordinatenachsen darstellen.

Digitized by Google

Die Formeln (6) und (9) entsprechen zwei ganz verschiedenen Typen von Deformationen. Die Formel (6) entspricht der Kompression und Dilatation und die Formeln (9) der Drehung, wobei diese Drehung ebenso ihr Vorzeichen ändern kann wie θ.

Wir gehen jetzt zur Integration der Differentialgleichung (6) über.

Bezeichnen wir den Abstand unseres Punktes M vom Koordinatenanfangspunkt mit r, so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \tag{11}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x} &= \frac{x}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial y} &= \frac{y}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial z} &= \frac{z}{r} \end{aligned}\right\} . \tag{12}$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Differentialgleichung (6)

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \cdot \Delta\theta \tag{6}$$

durch eine Funktion von der Art $\frac{1}{r} \cdot F_1(r - V_1 t)$ befriedigt werden kann, wo V_1 eine konstante Größe und die Funktion F_1 selbst ganz willkürlich bleibt.

Bezeichnen wir die Kombination der Größen $r - V_1 t$ mit einem Buchstaben χ, so ist χ eine Funktion von x, y, z und t,

$$\chi = r - V_1 t$$

und

$$\theta = \frac{F_1(\chi)}{r} .$$

Außerdem ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi}{\partial x} &= \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r} \\ \frac{\partial \chi}{\partial y} &= \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} \\ \frac{\partial \chi}{\partial z} &= \frac{\partial \chi}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r} . \end{aligned}$$

Bilden wir nun die Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ und $\Delta\theta$, welche die Formel (6) enthält. Wir haben

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial t} = -\frac{V_1}{r} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} .$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = +\frac{V_1^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} . \tag{13}$$

Ferner

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - \frac{F_1}{r^2} \cdot \frac{x}{r}$$

Digitized by Google

oder

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - F_1 \frac{x}{r^3}.$$

Die zweite Derivierte ist

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{x}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{r^2 - x\,2r\,\frac{x}{r}}{r^4} - \frac{x}{r^3} \frac{\partial F_1}{\partial \chi} \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} - F_1 \frac{r^3 - x\,3r^2\,\frac{x}{r}}{r^6}$$

$$= \frac{x^2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{r^2 - 2x^2}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - \frac{x^2}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \cdot F_1$$

oder schließlich

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{x^2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{r^2 - 3x^2}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - \frac{r^2 - 3x^2}{r^5} \cdot F_1.$$

Auf gleiche Weise finden wir

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{y^2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{r^2 - 3y^2}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - \frac{r^2 - 3y^2}{r^5} \cdot F_1$$

und

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{z^2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{r^2 - 3z^2}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \chi} - \frac{r^2 - 3z^2}{r^5} \cdot F_1.$$

Addieren wir diese drei Ausdrücke, so erhalten wir

$$\Delta \theta = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} + \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^4} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial} - \frac{3r^2 - 3(x^2 + y^2 + z^2)}{r^5} F_1$$

oder auf Grund der Beziehung (11)

$$\Delta \theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2}. \tag{14}$$

Setzt man nun die Ausdrücke für $\frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ und $\Delta \theta$ aus den Formeln (13) und (14) in die Differentialgleichung (6) ein, so erhält man

$$\frac{V_1^2}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2 F_1}{\partial \chi^2}$$

oder

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}. \tag{15}$$

Wir sehen also, daß die Funktion $\frac{1}{r} F_1(r - V_1 t)$ in der Tat unsere Differentialgleichung dann befriedigt, wenn V_1 den Zahlenwert hat, der durch die Gleichung (15) bestimmt wird.

Die Form der Funktion F_1 ist vorläufig eine ganz willkürliche. Um sie zu bestimmen, müssen wir die Anfangsbedingungen der Aufgabe angeben, d. h. den Wert θ und $\frac{d\theta}{dt}$ im Moment $t = 0$ für verschiedene Punkte des festen Körpers und außerdem die Werte von θ im Koordinatenanfange für einen beliebigen Moment t.

Digitized by Google

Das Integral der Gleichung (6) muß außerdem noch einigen Grenzbedingungen für die Oberfläche, die den betreffenden festen Körper begrenzt, genügen.

Mit der allgemeinen Lösung dieser Frage werden wir uns jedoch nicht beschäftigen.

Wir sehen also, daß das Integral der Differentialgleichung (6) folgende Gestalt hat

$$\theta = \frac{F_1(r - V_1 t)}{r}, \tag{16}$$

wo die Funktion F_1 vorläufig völlig willkürlich ist.

Wir wollen uns nun die Bedeutung dieser Formel klar machen.

Setzen wir voraus, daß im Moment $t = 0$ in irgendeinem Punkte des gegebenen festen Körpers eine Störung der Gleichgewichtsbedingungen vor sich gegangen ist, die gewisse Deformationen, nämlich das Entstehen der Dilatation oder Kompression θ veranlaßt hat.

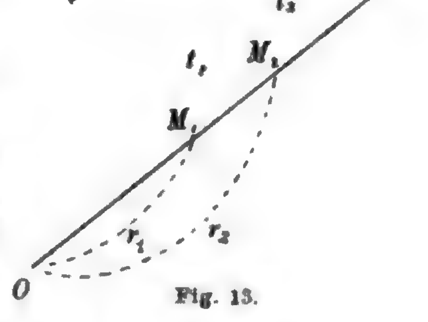


Fig. 13.

Verlegen wir nun in diesen Punkt den Koordinatenanfangspunkt.

Die Funktion F_1 bestimmt den Charakter der Deformation und r im Nenner zeigt, daß in diesem Falle die Größe der Deformation θ bei einem gegebenen Werte von F_1 umgekehrt proportional r ist.

Wir wollen nun die Eigenschaften der Funktion F_1 betrachten.

Dazu nehmen wir irgendeine Richtung OC (Fig. 13) und setzen voraus, daß in einem Moment $t = t_1$ auch im Punkte M_1, der im Abstande r_1 von dem Koordinatenanfang O liegt, F_1 einen bestimmten Zahlenwert A hat.

Dann ist

$$F_1(r_1 - V_1 t_1) = A.$$

Nehmen wir nun einen anderen Punkt M_2 in der Entfernung $r_2 > r_1$ und stellen wir uns die Frage, wann die Funktion F_1 in diesem neuen Punkte denselben Wert A annehmen wird. Der entsprechende Moment sei t_2.

Dann ist

$$F_1(r_2 - V_1 t_2) = F_1(r_1 - V_1 t_1) = A.$$

Hieraus folgt, daß

$$r_2 - V_1 t_2 = r_1 - V_1 t_1$$

oder

$$V_1 = \frac{r_2 - r_1}{t_2 - t_1}.$$

Folglich legt die betreffende Deformation, welche durch die Größe A charakterisiert wird, in dem Zeitraum $t_2 - t_1$ die Strecke $r_2 - r_1$ zurück; also stellt V_1 nichts anderes als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kondensations- und Dilatationswellen im festen Körper dar. Die Größe dieser Geschwindigkeit ergibt sich aus der Formel (15).

Digitized by Google

Die Geschwindigkeit V_1 ist also eine konstante Größe, welche nur von den elastischen Eigenschaften und der Dichte des betreffenden Stoffes abhängt. Die Bewegung pflanzt sich also allmählich immer weiter und weiter von einer Schicht zur anderen mit konstanter Geschwindigkeit fort, während die Größe der entsprechenden Deformation mit der Entfernung r umkehrt proportional abnimmt.

Wenden wir uns nun zu den Gleichungen (9).

Da sie dieselbe Form haben wie die Differentialgleichung (6), so können wir ganz dieselben Erwägungen anstellen.

Es kann also z. B. ξ so ausgedrückt werden:

$$\xi = \frac{F_2(r - V_2 t)}{r}, \tag{17}$$

wo F_2 eine völlig willkürliche Funktion und V_2 eine konstante Größe ist,

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{18}$$

V_2 ist nichts anderes, als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der entsprechenden Art der Deformationen im Innern des festen Körpers.

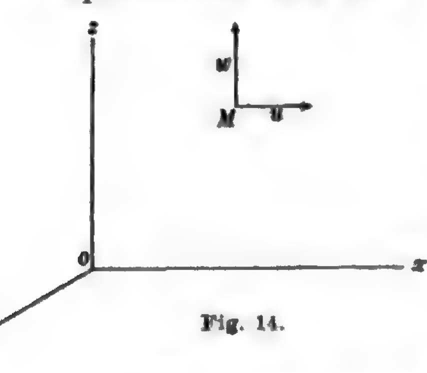


Fig. 14.

Wir sehen somit, daß diese Art der Deformationen, also die Schiebungs- oder Scherungswellen, mit einer anderen Geschwindigkeit, als die Kondensations- oder Kompressions- und Dilatationswellen sich fortpflanzen.

Um sich den Charakter dieser beiden verschiedenen Typen der elastischen Schwingungen klar zu machen, betrachten wir die folgenden zwei besonderen Fälle.

Wir setzen voraus, daß die Fortpflanzungsrichtung der elastischen Deformationen zur x-Achse parallel ist.

I. Fall.

Die Verschiebung des Punktes M geschieht parallel zur x-Achse, wobei die Größe der Verrückung u für alle Punkte, die in einer und derselben Ebene senkrecht zur x-Achse liegen, gleich ist (ebene Welle).

Dann erhalten wir

$$v = 0, \quad w = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0.$$

Folglich

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{19}$$

und

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Außerdem

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Digitized by Google

Dann läßt sich die erste Gleichung (5) auf folgende Form bringen:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{20}$$

Wie man sich leicht überzeugt, kann das Integral dieser Differentialgleichung in folgender Weise ausgedrückt werden:

$$u = \Phi_1(x - V_1 t), \tag{21}$$

wo Φ_1 eine willkürliche Funktion ist, und

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}.$$

Führt man nämlich folgende Bezeichnung ein

$$\chi = x - V_1 t,$$

so erhält man

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = V_1^2 \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}$$

und

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}.$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Gleichung (20) ein, so ergibt sich

$$V_1^2 \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2} = \frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial \chi^2}$$

oder

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}}.$$

Die Dilatation oder die Kompression der Volumeneinheit θ wird auf Grund der Gleichung (19) also folgendermaßen ausgedrückt sein:

$$\theta = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \chi}.$$

V_1 ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Kondensations- und Dilatationswellen.

Wir sehen also, daß dieser Typus der Deformationen den Bewegungen der einzelnen Teilchen entspricht, die der Richtung nach mit der Fortpflanzung der elastischen Schwingungen zusammenfallen.

Schwingungen dieser Art heißen **longitudinale**; sie bestehen somit aus der Kondensation und der Dilatation des Stoffes.

Die Formel (21) entspricht, wie leicht nachzuweisen ist, dem Falle einer ebenen Welle (u hängt von y und z nicht ab), für welche, abgesehen von der Absorption der Energie im betreffenden Medium, durch welches die Bewegung geht, die Größe der **maximalen** Verrückung u, die einem bestimmten Momente t entspricht, und folglich auch die entsprechende Größe $\theta = \frac{\partial u}{\partial x}$ mit der Zunahme der Entfernung x nicht abnimmt.

Digitized by Google

Die Formel (16) dagegen entspricht dem Falle von Kugelwellen, die sich von einem gegebenen Erregungszentrum aus nach allen Seiten hin fortpflanzen, wobei die Größe der entsprechenden Deformation θ umgekehrt proportional dem Abstande r vom Erregungszentrum abnimmt.

II. Fall.

Wir wollen nun voraussetzen, daß alle Punkte, welche in einer und derselben, zur x-Achse senkrechten Ebene liegen, zu der z-Achse parallel sich um eine Größe w verschieben.

Dann haben wir

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

In diesem Falle ist

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

d. h. die entsprechende Deformation, wird von keiner Dilatation oder Kompression des Stoffes begleitet, und es tritt nur eine gegenseitige Schiebung der Schichten parallel zur z-Achse auf.

In diesem Falle erfolgt die Verrückung der einzelnen Punkte des festen Körpers in der Richtung senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der elastischen Deformationen.

Die Größe der Verrückung w ändert sich mit der Koordinate x, weil $\frac{\partial w}{\partial x}$ nicht gleich Null ist.

Also haben wir in diesem Fall

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}$$

und

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = 0.$$

Setzt man diese Größen in die dritte Gleichung (5) ein, so erhält man

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\mu}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}.$$

Das Integral dieser Gleichung ist

$$w = \Phi_2(x - V_2 t), \tag{22}$$

wo Φ_2 wiederum eine willkürliche Funktion ist und

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$

V_2 stellt die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der entsprechenden Deformation dar, d. h. die Geschwindigkeit der Scherungswellen.

Da in diesem Falle die Richtung der Bewegungen oder Schwingungen der Teilchen senkrecht zur Fortpflanzungsrichtung der betreffenden elastischen Deformation erfolgt, so heißen solche Schwingungen transversale und die entsprechenden Wellen transversale Wellen.

Die Formel (22) entspricht wiederum einer ebenen Welle.

Digitized by Google

Wir sehen also, daß in einem jeden festen Körper zwei ganz verschiedene, voneinander vollständig unabhängige Typen von Schwingungen entstehen und sich fortpflanzen können, nämlich longitudinale Schwingungen oder Wellen, d. h. Kondensations- oder Dilatationswellen, und transversale oder Scherungswellen.

Dieses Resultat ist eine unmittelbare Folgerung der Differentialgleichungen, von denen wir ausgegangen sind.

Die entsprechenden Geschwindigkeiten V_1 und V_2 hängen nur von den elastischen Eigenschaften und der Dichte des betreffenden Stoffes ab. Die Werte dieser Geschwindigkeiten ergeben sich aus den Formeln (15) und (18).

Bleibt die Schwingungsrichtung der Teilchen im Falle der transversalen Schwingungen beständig unverändert (w kann positiv oder auch negativ sein), so entspricht das etwa dem Falle eines linear polarisierten Lichtstrahles.

Wir können also bedingungsweise die Ebene, welche durch die Richtung der Schwingungen der Teilchen und die der Fortpflanzung der Bewegung geht, die Polarisationsebene der entsprechenden transversalen elastischen Schwingungen nennen.

Wir wollen nun versuchen, die Form der Funktionen Φ_1 und Φ_2 etwas näher zu charakterisieren (Formeln (21) und (22)).

Betrachten wir den Fall longitudinaler Schwingungen, die sich zur x-Achse parallel fortpflanzen (ebene Welle), und nehmen wir einen Punkt M auf der x-Achse an, der in der Entfernung x von dem Erregungszentrum 0 liegt (Fig. 15).

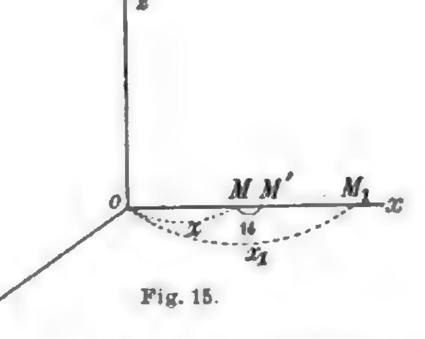


Fig. 15.

Wir denken uns um den Punkt M herum ein Volumenelement, dessen Gesamtmasse gleich m sei.

Die Verrückung des Punktes M parallel zur x-Achse bezeichnen wir, wie früher, mit u. Nach der Voraussetzung kann sich der Punkt M nur längs der x-Achse verschieben.

Ist $u = 0$, so befindet sich unser Volumenelement im Zustande stabilen Gleichgewichts. Schiebt sich aber M nach M', so entsteht infolge der Gegenwirkung des umgebenden Mediums eine Kraft F in der Richtung von M' nach M, welche das Teilchen in seine frühere Gleichgewichtslage zurückzubringen sucht. Diese Kraft muß immer nach der der Verschiebung u entgegengesetzten Seite gerichtet sein, denn sonst könnte das Teilchen im Punkte M sich nicht im Zustande stabilen Gleichgewichts befinden.

Ohne den Charakter der entstandenen Kraft der Gegenwirkung F näher zu analysieren, können wir jedenfalls sagen, daß F eine Funktion von u ist,

$$F = f(u).$$

Da u überhaupt eine kleine Größe ist, — denn wir stellen immer die Bedingung, daß die Elastizitätsgrenze nicht überschritten sei, — so können

Digitized by Google

wir $f(u)$ nach dem Maclaurinschen Satz in eine Reihe nach Potenzen von u entwickeln

$$f(u) = A_0 + A_1 u + A_2 u^2 + \cdots$$

Der Koeffizient A_0 ist gleich Null, denn im Falle $u = 0$ ist die Kraft F gleich Null. Da u eine kleine Größe ist, so können wir in erster Annäherung die Glieder mit u^2 und noch höhere Potenzen vernachlässigen und einfach setzen

$$f(u) = A_1 u.$$

Die Beschleunigung der Masse m in der Richtung zunehmender x ist gleich $\frac{d^2u}{dt^2}\cdot$ Also erhalten wir auf Grund des Theorems der Dynamik, nach welchem das Produkt der Masse und der Beschleunigung gleich der wirkenden Kraft ist,

$$m\frac{d^2u}{dt^2} = -A_1 u.$$

Das Vorzeichen (—) zeigt, daß die Gegenwirkung des Mediums die Beschleunigung der Bewegung der Masse m zu vermindern sucht.

Der Einfachheit halber führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$p^2 = \frac{A_1}{m}.$$

Dann ist

$$\frac{d^2u}{dt^2} + p^2 u = 0. \tag{23}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Punktes M.

p ist ein konstanter Koeffizient, dessen physikalische Bedeutung wir in der Folge erläutern werden.

Die Gleichung (23) ist eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Variablen t. Folglich muß das allgemeine Integral dieser Gleichung zwei willkürliche Konstanten enthalten.

Als zwei partikuläre Lösungen u_1 und u_2 dieser Differentialgleichung können wir hinschreiben

$$u_1 = \sin pt$$

$$u_2 = \cos pt.$$

Setzt man diese Größen in die Gleichung (23) ein, so verwandelt sie sich in eine Identität. Dasselbe Resultat wird erreicht, wenn man eine jede dieser Lösungen dementsprechend mit den zwei willkürlichen Konstanten A und B multipliziert.

Da die Gleichung (23) linear ist, so wird auch die Summe dieser zwei partikulären Lösungen ihr genügen.

Also kann das allgemeine Integral der gegebenen Differentialgleichung (23) in folgender Form ausgedrückt werden:

$$u = A\sin pt + B\cos pt. \tag{24}$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck ist das allgemeine Integral, denn er enthält zwei willkürliche Konstanten A und B.

Wir stellen die Gleichung (24) in einer anderen Form dar, nämlich

$$u = \sqrt{A^2 + B^2}\left[\frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} \sin pt + \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \cos pt\right].$$

Wir wollen dabei voraussetzen, daß die Quadratwurzel stets mit dem positiven Vorzeichen genommen wird.

Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$a = +\sqrt{A^2 + B^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin \varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Dies können wir tun, denn wir erhalten, wie erforderlich

$$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1.$$

Folglich

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}.$$

Setzt man diese Größen in die vorhergehende Formel für u ein, so erhält man den folgenden endgültigen Ausdruck:

$$u = a \sin (pt + \varphi). \tag{25}$$

a und φ sind zwei konstante Größen, die auf Grund der Anfangsbedingungen bestimmt werden können.

Die Formel (25) zeigt, daß u eine periodische Funktion der Zeit t ist, wobei u sich nach dem Gesetze der harmonischen Schwingungen verändert.

u ändert sich zwischen den Grenzen von $+a$ bis zu $-a$, es heißt daher a die Amplitude der Schwingungen.

Das Argument $pt + \varphi$ heißt die Phase der Bewegung, und die Konstante φ die Anfangsphase, denn sie entspricht dem Moment $t = 0$.

Bestimmen wir nun das Zeitintervall T, welches verfließen muß, damit u und $\frac{du}{dt}$ von neuem ihre früheren Zahlenwerte annehmen. Das wird offenbar der Fall sein, wenn sich die Phase um 2π vergrößert.

Also

$$p(t + T) + \varphi = pt + \varphi + 2\pi.$$

Folglich ist

$$T = \frac{2\pi}{p}$$

oder

$$p = \frac{2\pi}{T}. \tag{26}$$

Digitized by Google

T heißt die volle Periode einer Schwingung.

$$N = \frac{1}{T} \tag{27}$$

gibt die Zahl der vollen Schwingungen in einer Sekunde an.

Die Formel (26) bestimmt also die physikalische Bedeutung der früher mit p bezeichneten Größe.

Setzen wir diese Größe in die Gleichung (25) ein, so erhalten wir

$$u = a \sin \left\{ 2\pi \frac{t}{T} + \varphi \right\}. \tag{28}$$

Wir wollen jetzt einen anderen Punkt M_1 nehmen, der sich in einem Abstande x_1 vom Koordinatenanfang befindet.

Da die Bewegung längs der x-Achse mit einer bestimmten Geschwindigkeit V_1, die der der Fortpflanzung der longitudinalen Schwingungen gleich ist (Formel (15)), vor sich geht, so tritt die bestimmte Phase der Bewegung des Punktes M (d. h. die bestimmte Größe von u) im Punkte M_1 ein im Momente

$$t + \frac{x_1 - x}{V_1}.$$

Folglich ist die momentane Ablenkung u_1 des Punktes M_1 von seiner Gleichgewichtslage gleich der des Punktes M in dem Momente

$$t - \frac{x_1 - x}{V_1}.$$

Somit erhalten wir für die Bewegung des Punktes M folgende Gleichung:

$$u_1 = a \sin \left\{ 2\pi \frac{t - \frac{x_1 - x}{V_1}}{T} + \varphi \right\}.$$

Die Punkte M und M_1 sind dabei ganz willkürlich genommen.

Wir können daher den Punkt M als konstant betrachten, also $x = x_0$ annehmen und x_1 als eine variable Größe auffassen, die die Lage des veränderlichen Punktes M_1 charakterisiert.

Die vorige Gleichung kann dann in folgender Form ausgedrückt werden:

$$u_1 = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t - \frac{x_1}{V_1}}{T} \right) + \left(\varphi + 2\pi \frac{x_0}{V_1 T} \right) \right\}.$$

$\varphi + 2\pi \frac{x_0}{V_1 T}$ ist eine konstante Größe, welche wir mit φ_1 bezeichnen wollen.

Dann ist

$$u_1 = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x_1}{V_1 T} \right) + \varphi_1 \right\}.$$

Digitized by Google

Diese Formel zeigt, daß für denselben Moment t sich die Größe der Ablenkung u_1 irgendeines Punktes M_1 von seiner Gleichgewichtslage zugleich mit x_1 verändert, und daß jedesmal, wenn x_1 sich um die Größe $V_1 T$ ändert, u_1 wieder denselben Zahlenwert annimmt. Wenn wir also für irgendeinen bestimmten Moment t die Ablenkungen einer Punktreihe, die längs der Achse x liegt, von den entsprechenden Gleichgewichtslagen graphisch darstellen, indem wir die Werte von u_1 senkrecht zur x-Achse auftragen, so erhalten wir eine wellenförmige Linie (Sinusoide), bei der der Abstand zwischen zwei benachbarten Wellenkämmen nichts anderes ist, als die Wellenlänge, welche wir für die longitudinalen Schwingungen mit λ_1 bezeichnen wollen.

Aus dem Vorhergehenden folgt also, daß

$$\lambda_1 = V_1 T \tag{29}$$

oder, auf Grund der Beziehung (27),

$$N\lambda_1 = V_1 \tag{30}$$

ist.

Da V_1 für das betreffende Medium eine konstante Größe ist, so folgt aus der Gleichung (29), daß, je kürzer die Schwingungsperiode T ist, desto kürzer die entsprechende Wellenlänge sein muß.

Es ist nun M_1 ein ganz willkürlicher Punkt und wir können also statt x_1 die entsprechende Koordinate einfach mit x bezeichnen. Dementsprechend schreiben wir anstatt u_1 — u, und φ_1 — φ. Dann erhalten wir folgende endgültige Gleichung der Bewegung eines Teilchens für longitudinale elastische Schwingungen, die längs der x-Achse sich fortpflanzen.

$$u = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \varphi \right\} \cdot \tag{31}$$

Unsere Betrachtungen führen uns also zu dem Resultate, daß die Bewegung der Teilchen bei longitudinalen Schwingungen einen sinusoidalen Charakter haben muß. Dieses Resultat wird durch die Beobachtungen bestätigt.

Wir können daher mit Recht die Fortpflanzung der Kondensationen und Dilatationen (θ) als gleichbedeutend mit der Fortpflanzung der longitudinalen Wellen betrachten.

Auf Grund der Beziehung (29) können wir die Formel (31) in folgender Form ausdrücken:

$$u = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{V_1 T} \right) + \varphi \right\}$$

oder

$$u = a \sin \left\{ -\frac{2\pi}{\lambda_1} (x - V_1 t) + \varphi \right\} \cdot$$

Wir sehen also, daß u in der Tat eine Funktion von der Kombination $(x - V_1 t)$ ist, wie es das allgemeine Integral von der Form

$$u = \Phi_1 (x - V_1 t)$$

(Formel (21)) erfordert.

Digitized by Google

Folglich befriedigt in der Tat der Wert für u, der durch die Gleichung (31) ausgedrückt ist, die Grunddifferentialgleichungen der Elastizitätstheorie.

Wir haben hiermit die Beschaffenheit der Funktion Φ_1 für den Fall longitudinaler elastischer Wellen gefunden.

Völlig analoge Erwägungen können wir auch im Falle transversaler Schwingungen anstellen.

Wir gelangen dann für transversale Verrückungen w irgendeines Punktes M zu der Gleichung

$$w = b \sin\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_2}\right) + \psi\right\}, \tag{32}$$

wo

$$\lambda_2 = V_2 T. \tag{33}$$

Hier bedeutet V_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen Wellen, T die Periode der entsprechenden Schwingungen, welche für longitudinale und transversale Schwingungen verschieden sein kann, λ_2 die entsprechende Wellenlänge, b die Amplitude der Schwingungen und schließlich ψ eine konstante Größe, die keine wesentliche Rolle spielt.

Es ist leicht zu ersehen, daß auch w eine Funktion von $(x - V_2 t)$ ist, wie es die Gleichung (22) fordert.

Nachdem wir den Charakter der Bewegung der Teilchen in den longitudinalen und transversalen Wellen erläutert haben, bestimmen wir nun die Größe der Energie, welche der betreffenden schwingenden Bewegung entspricht.

Zu dem Zweck können wir nach Belieben die Formel (31) oder (32) benutzen.

Nehmen wir z. B. den Ausdruck für die longitudinalen Schwingungen (Formel (31)).

Die Energie der Bewegung der Masse m, die im Punkte M konzentriert ist, ist der entsprechenden lebendigen Kraft der Bewegung proportional, d. h. unter sonst gleichen Bedingungen proportional $\left(\frac{du}{dt}\right)^2$.

Bezeichnet man die Größe der gesuchten Energie mit I, so kann man setzen

$$I = C\left(\frac{du}{dt}\right)^2,$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist.

Auf Grund der Formel (31) haben wir

$$I = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \cdot C \cdot \cos^2\left\{2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1}\right) + \varphi\right\}.$$

Dieser Ausdruck zeigt, daß die Größe der Energie I sich in den Grenzen von $I = 0$ bis zu $I = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} C$ ändert.

Digitized by Google

Bei kleinen Werten von T können wir die Größe der Energie für einen bestimmten Zeitmoment t nicht direkt ableiten, sondern nur die mittlere Größe von I für eine volle Periode der Schwingungen T.

Wir wollen diese mittlere Größe $I = I_m$ aufsuchen, wobei wir für den Anfangspunkt der Integration einen willkürlichen Moment t_0 annehmen wollen. Bei dieser Integration bleibt x unverändert.

Es ist leicht zu sehen, daß

$$I_m = \frac{4\pi^2 a^2}{T^2} \cdot C \cdot \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \cos^2 \left\{ 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \varphi \right\} dt.$$

Zur Bequemlichkeit bei der Integration führen wir eine neue Variable α ein:

$$\alpha = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda_1} \right) + \varphi.$$

Dann ist

$$dt = \frac{T}{2\pi} d\alpha.$$

Die Integrationsgrenzen sind:

für $t = t_0$ ist $\alpha_0 = 2\pi \left(\frac{t_0}{T} - \frac{x_1}{\lambda} \right) + \varphi$,

für $t = t_0 + T$ ist $\alpha = \alpha_0 + 2\pi$.

Setzt man diese Größen in die vorhergehende Formel ein, so erhält man

$$I_m = \frac{2\pi a^2}{T^2} \cdot C \int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2 \alpha \cdot d\alpha. \tag{34}$$

Für das Integral, das wir zunächst als unbestimmt betrachten, haben wir:

$$\int \cos^2 \alpha d\alpha = \int \cos \alpha d(\sin \alpha) = \cos \alpha \sin \alpha + \int \sin^2 \alpha d\alpha$$

oder

$$\int \cos^2 \alpha d\alpha = \sin \alpha \cos \alpha + \int (1 - \cos^2 \alpha) d\alpha.$$

Hieraus finden wir

$$\int \cos^2 \alpha d\alpha = \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha,$$

folglich

$$\int_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} \cos^2 \alpha d\alpha = \left[\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{4} \sin 2\alpha \right]_{\alpha_0}^{\alpha_0+2\pi} = \pi + \frac{1}{4} \{ \sin(2\alpha_0 + 4\pi) - \sin 2\alpha_0 \} = \pi.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formel (34) ein, läßt den Index m fallen, versteht also in der Folge unter I die mittlere Größe der Energie, so erhält man schließlich

$$I = 2\pi^2 C \cdot \frac{a^2}{T^2}. \tag{35}$$

Digitized by Google

Die mittlere Größe der Energie ist somit gleich der Hälfte der Maximalgröße derselben.

Außerdem ist I unter sonst gleichen Bedingungen dem Quadrate der Amplitude proportional und dem Quadrate der Periode T umgekehrt proportional. Für denselben Typus von Wellen mit derselben Periode T ist die Energie dem Quadrate der Amplitude proportional.

Für eine ebene Welle ist bei Abwesenheit der Absorption a von der Größe x unabhängig.

In dem Falle aber, wenn die Wellen sich von einem Zentrum 0 aus nach allen Seiten in kugelförmigen Flächen fortpflanzen, nimmt die Größe der entsprechenden Deformation, wie wir aus den Formeln (16) und (17) gesehen haben, mit der Entfernung r vom Erregungszentrum umgekehrt proportional ab.

Daraus folgt unmittelbar, daß bei den sphärischen Wellen die Energie dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional abnimmt, was auch von selbst verständlich ist, denn wenn die Wellenflächen mit r^2 proportional zunehmen, so muß die Größe der Energie, die auf die Flächeneinheit kommt, umgekehrt proportional mit r^2 abnehmen.

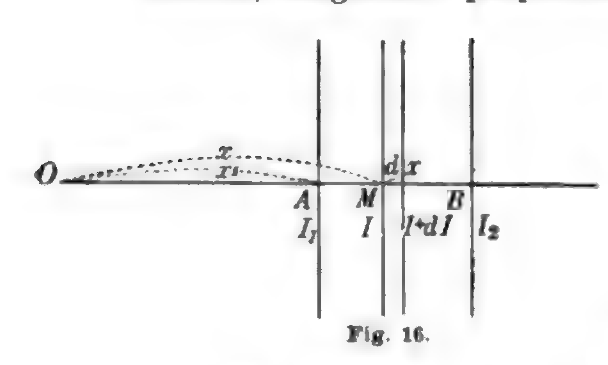


Fig. 16.

Die vorhergehenden Erwägungen setzen voraus, daß das Medium, durch welches die betreffenden Wellen gehen, die gegebene schwingende Bewegung nicht absorbiert.

Wir wollen nun sehen, wie sich die Größe der Energie mit der Entfernung verändert, wenn eine gewisse Absorption vorhanden ist.

Wir wollen wiederum eine ebene Welle betrachten.

Wir nehmen eine ebene Schicht des betreffenden Stoffes AB von der Dicke h. Die Punkte A und B mögen die Koordinaten x_1 und x_2 haben (Fig. 16).

Die entsprechenden Werte I in den Punkten A und B bezeichnen wir mit I_1 und I_2.

Denken wir uns irgendeinen willkürlichen Punkt M im Innern der Schicht AB mit der Koordinate x und nebenbei eine unendlich dünne Schicht mit der Dicke dx. Die Größe der Energie, welche in diese Schicht eintritt, sei I und die Größe der Energie, welche austritt, sei $I + dI$, wo dI seiner Bedeutung nach negativ ist.

Die absolute Größe dI muß also zu dx und ebenso zur Größe der einfallenden Energie I proportional sein. Bezeichnet nun k den Proportionalitätskoeffizienten, wobei k nicht nur von den Eigenschaften des gegebenen Mediums, sondern auch von der Form der einfallenden Energie, z. B. von der Periode T abhängt, so können wir setzen

$$dI = -kI dx$$

oder

$$\frac{dI}{I} = -k dx.$$

Digitized by Google

Integriert man diesen Ausdruck zwischen den Grenzen $x = x_1$ und $x = x_2$, so erhält man

$$\lg \frac{I_2}{I_1} = -k(x_2 - x_1)$$

oder

$$I_2 = I_1 e^{-k(x_2 - x_1)},$$

oder auch

$$\frac{I_1}{e^{-kx_1}} = \frac{I_2}{e^{-kx_2}} = \frac{I_3}{e^{-kx_3}} = \cdots = \text{Const.}$$

Bezeichnen wir nun diese Konstante mit I_0, und lassen den Index bei I und x weg, so haben wir

$$I = I_0 e^{-kx}. \tag{36}$$

Diese Formel drückt für eine ebene Welle das Gesetz der Verminderung der Energie mit der Entfernung und ihre Abhängigkeit von dem Absorptionsvermögen des betreffenden Mediums aus.

Der Koeffizient k heißt der Koeffizient der Absorption oder der Dämpfung.

Im Falle sphärischer Wellen muß außer der Verminderung der Energie infolge der Absorption auch noch, wie wir gesehen haben, die Verminderung, die mit der Entfernung vom Erregungszentrum eintritt, berücksichtigt werden.

Die im Körper absorbierte Energie geht in der Mehrzahl der Fälle in Wärme über.

Unsere Grundgleichungen der Elastizitätstheorie berücksichtigen die Erscheinung der Absorption nicht, aber aus den vorstehenden Erwägungen ergibt sich sofort, wie man in die endgültigen Formeln die Wirkung der Absorption einführen kann.

Wir wollen daher bei dieser Frage nicht länger verweilen und auch in den folgenden Ausführungen die Absorption nicht berücksichtigen.

Kehren wir nun zur Frage nach der Geschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen in einem isotropen und homogenen festen Körper zurück.

Diese Geschwindigkeiten werden nach den Formeln (15) und (18) bestimmt

$$V_1 = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho}} \tag{15}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{18}$$

Sie enthalten die Laméschen Elastizitätskoeffizienten λ und μ und die Stoffdichte ϱ.

Wir wollen nun diese Geschwindigkeiten durch die zwei anderen Elastizitätskoeffizienten, nämlich durch den Elastizitätsmodul der Dehnung E und den Modul der Querkontraktion oder die Poissonsche Konstante σ ausdrücken.

Digitized by Google

In § 3 des vorhergehenden Kapitels I hatten wir als Ausdrücke für λ und μ (Formel (65) und (66)) angegeben

$$\lambda = \frac{\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} E$$

und

$$\mu = \frac{1}{2} \frac{E}{1+\sigma}.$$

Folglich

$$\lambda + 2\mu = \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{\sigma}{1-2\sigma} + 1 \right\}$$

oder

$$\lambda + 2\mu = \frac{E(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}.$$

Also erhalten wir:

$$V_1 = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} \tag{37}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{E}{\varrho} \cdot \frac{1}{2(1+\sigma)}} \tag{38}$$

und

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{2 \frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}. \tag{39}$$

Den Elastizitätsmodul E und die Poissonsche Konstante σ kann man leicht direkt durch Versuche erhalten; die Formeln (37) und (38) geben uns daher die Möglichkeit, für einen jeden Stoff, für den ϱ bekannt ist, die Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen zu bestimmen.

Wenn wir dagegen aus dem Versuch nur das Verhältnis $\frac{V_1}{V_2}$ kennen, so können wir leicht für den gegebenen Stoff die Poissonsche Konstante σ wie folgt ausrechnen.

Die Formel (39) gibt

$$\frac{1-\sigma}{1-2\sigma} = \frac{1}{2} \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2,$$

woraus folgt

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}. \tag{40}$$

Auf diese Formel werden wir noch im dritten Kapitel bei der Untersuchung der seismischen Strahlen zurückkommen.

Es ist früher darauf hingewiesen worden, daß für die Mehrheit der Körper $\sigma = \frac{1}{4}$ ist.

In diesem Falle geben uns die Formeln (37), (38) und (39)

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{E}{\varrho}} \tag{41}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{2}{5} \cdot \frac{E}{\varrho}} \tag{42}$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{3} = 1{,}732. \tag{43}$$

Digitized by Google

Wir gelangen also zu dem interessanten Resultat, daß das Verhältnis der Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen gleich $\sqrt{3}$ ist.

Benutzen wir die Formel (41), um die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Stahl auszurechnen. Für Stahl ist

$$E = 2{,}16 \cdot 10^{12} \text{ C. G. S.}$$

In absoluten Einheiten ist die Dichte ρ, d. h. die Masse der Volumeneinheit numerisch dem spezifischen Gewicht des Körpers gleich.

Für Stahl ist $\rho = 7{,}8$.

Also

$$V_1 = \sqrt{\frac{6}{5} \cdot \frac{2{,}16}{7{,}8} \cdot 10^{12}} = 0{,}58 \cdot 10^6 \text{ cm/sek}$$

oder

$$V_1 = 5{,}8 \text{ km/sek.}$$

Dies ist die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen im Stahl unter den normalen Bedingungen des äußeren Druckes.

Wenn wir nun zum Erdball als zu einem festen Körper übergehen, so können wir ihn gewiß nicht als einen homogenen und isotropen Körper auffassen, denn seine elastischen Eigenschaften und seine Dichte verändern sich mit der Tiefe. Wir können aber mit genügender Annäherung, besonders für die tieferen Schichten, annehmen, daß alle diese Größen nur Funktionen der Entfernung vom Erdzentrum sind, anders ausgedrückt, daß in einer und derselben Schicht der Stoff gleiche physikalische Eigenschaften besitzt.

Die Zulässigkeit dieser Annahme wird durch die Untersuchungen Helmerts[1]), sowie Hayfords und Tittmanns[2]) über die isostatische Lagerung der Massen der Erdrinde (Pratts Hypothese) gestützt.

Diese ergeben, daß die Schwerestörungen, d. h. die Abweichungen der an einem Orte beobachteten, gegenüber der für diesen Ort normalen Schwerkraft durch die Dichteverschiedenheiten der Massen der Erdkruste bis zu einer Tiefe von etwa 120 Kilometer hervorgerufen werden. In größerer Tiefe kann man eine hydrostatische Schichtung der Massen annehmen.

Dieser Druckausgleich der Massen der Erdkruste kann jedoch infolge ihrer Festigkeit nur für größere Gebiete, mehrere hundert Kilometer etwa eintreten.

Der Satz von der Isostasie gilt nicht nur innerhalb der Kontinente, sondern nach den Schwerkraftmessungen Heckers auf dem Atlantischen, Indischen und Großen Ozean für die ganze Erdkruste, da auch auf diesen die Schwere im Mittel der Helmertschen Schwereformel entspricht. Die scheinbaren Massenüberschüsse der Kontinentalmassen und Defekte der Ozeane werden also durch entsprechende Defekte bzw. Überschüsse unter ihnen kompensiert.

Digitized by Google

In ähnlicher Weise, wie wir die Geschwindigkeit der longitudinalen Wellen im Stahl bestimmt haben, könnten wir auch rein experimentell die der longitudinalen und transversalen Wellen in anderen Materialien z. B. den verschiedenen Gesteinsarten bestimmen.

Solche Bestimmungen wurden von Kusakabe[3]) für Gesteine verschiedener geologischer Epochen ausgeführt, nämlich für die archäische, paläozoische, mesozoische und känozoische, die erhaltenen Zahlen schwanken jedoch in ziemlich weiten Grenzen.

Vor kurzem hat Oddone[4]) einen Apparat konstruiert, mittels dessen die Bestimmung des Elastizitätsmoduls E verschiedener Gesteinsarten nach einer besonderen dynamischen Methode möglich ist.

Die Methode Oddones besteht im folgenden:

Eine Stahlkugel fällt von einer Höhe H im Innern eines Glasrohres, ohne die Wände zu berühren, auf die Fläche eines Parallelepipedons, das aus der zu untersuchenden Gesteinsart geschliffen ist. Nach dem Aufprallen springt die Kugel wieder in die Höhe. Aus dem Verhältnis der erreichten Höhe h zu der Fallhöhe H kann man dann den Elastizitätsmodul E ableiten.

Überzieht man noch die Oberfläche des Parallelepipedons mit einer dünnen Rußschicht und mißt den Durchmesser der Berührungsfläche, die die Kugel auf der Rußschicht verzeichnet hat, so kann hieraus nach den von Hertz gegebenen Formeln und mit Berücksichtigung der elastischen Eigenschaften der Stahlkugel der Elastizitätsmodul des untersuchten Gesteins ebenfalls bestimmt werden.

Wenn außerdem noch die Poissonsche Konstante bekannt wäre, d. h. der Modul der Querkontraktion, so könnte man schon auf einem rein experimentellen Wege die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen elastischen Wellen in verschiedenen festen Medien bestimmen, was von großer Wichtigkeit sein würde.

Als Oddone die Kugel auf verschiedene Flächen des Parallelepipeds fallen ließ, bemerkte er, daß das Verhältnis $\frac{h}{H}$ unveränderlich blieb; er zog hieraus den Schluß, daß die verschiedenen Gesteinsarten, wenigstens diejenigen, welche er untersucht hat, als isotrope Körper aufgefaßt werden können.

Um die Formel (43) zu kontrollieren, könnte man die elastischen Schwingungen, die sich in der Tiefe der Erde fortpflanzen, anwenden.

Da jetzt schon ein ausgedehntes Beobachtungsmaterial über Erdbeben vorliegt, so können wir bestimmen, wieviel Zeit die beiden Arten von Schwingungen gebrauchen, um die Strecke vom Bebenherd bis zu einer nahen Station zu durchlaufen. Liegt der Herd des Erdbebens nicht tief und ist die Station nicht sehr entfernt, so kann man annehmen, daß diese Schwingungen die Station erreichen, indem sie nur durch die oberen Schichten der Erde gegangen sind. Da sich die longitudinalen Wellen rascher als die transversalen fortpflanzen, so werden sie auch zuerst vom Seismographen registriert.

Digitized by Google

Wenn man nun die Momente des Eintreffens der beiden Wellenarten und den Moment des Anfangs eines Erdbebens kennt, so können die Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen V_1 und V_2 in den oberen Schichten der Erde bestimmt werden.

In dieser Weise sind Zöppritz und Geiger[5]) vorgegangen, wobei sie für die Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen in den obersten Schichten der Erde folgende Werte gefunden haben:

$$V_1 = 7{,}17 \text{ km/sek}$$

$$V_2 = 4{,}01 \text{ km/sek.}$$

Das Verhältnis dieser Geschwindigkeiten ist also

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{7{,}17}{4{,}01} = 1{,}788.$$

Diese Zahl unterscheidet sich sehr wenig von dem theoretischen Wert $\sqrt{3}$, der aus der Voraussetzung $\sigma = \frac{1}{4}$ abgeleitet wurde.

Nehmen wir umgekehrt das empirische Verhältnis $\frac{V_1}{V_2} = 1{,}788$ an und setzen es in die Formel (40) ein, so erhalten wir die Größe der Poissonschen Konstante für die obersten Schichten der Erde.

Es ergibt sich

$$\sigma = 0{,}27.$$

Bei der Ableitung der Formel (43) hatten wir dagegen $\sigma = 0{,}25$ angenommen.

Schon dieses kleine Beispiel zeigt uns anschaulich, wie wichtig es ist, die Erdbebenerscheinungen von dem Standpunkte der Elastizitätstheorie aus zu betrachten.

Wir haben schon früher gesehen, daß wenn die Schwingungen von einem bestimmten Erregungszentrum ausgehen, die entsprechende Deformation, z. B. bei den longitudinalen Schwingungen, durch eine Funktion folgender Art (Formel (16))

$$\frac{F_1(r - V_1 t)}{r}$$

ausgedrückt werden kann.

Sind viele Erregungszentren vorhanden, so können wir für ein jedes von ihnen ähnliche Ausdrücke aufstellen. Da unsere Grunddifferentialgleichungen linear sind, so können wir einfach alle einzelnen Ausdrücke superponieren. Selbstverständlich wird auch die Summe dieser Funktionen die Differentialgleichungen der Bewegung befriedigen. Wir sehen somit, daß, wenn es viele Zentren der Entstehung elastischer Schwingungen gibt, wir es im Resultat mit einer Superposition der einzelnen Schwingungen zu tun haben. Die Aufgabe wird zwar sehr kompliziert, ist aber lösbar.

Wir können sogar annehmen, daß alle diese Erregungszentren ein bestimmtes Gebiet in stetiger Weise ausfüllen, womit wir den wirklichen Ver-

Digitized by Google

hältnissen bei einem Erdbebenherde oder dem Hypozentrum des Bebens näherkommen werden.

Die Gesetze der Fortpflanzung der elastischen Schwingungen haben, wie sich ergeben hat, eine große Ähnlichkeit mit den Gesetzen der Lichtfortpflanzung. Die mechanische Lichttheorie betrachtet ja auch die Lichterscheinungen direkt als das Resultat transversaler elastischer Schwingungen. Folglich müssen wir auch bei der Fortpflanzung der elastischen Schwingungen, beim Übergang der Bewegung aus einem Medium in ein anderes, auf die Erscheinungen stoßen, die der Reflexion und Brechung des Lichtes entsprechen. Zwar sind die Umstände in der Optik viel einfacher, denn wir haben es dort nur mit transversalen Schwingungen zu tun, weil das Vorhandensein longitudinaler Ätherwellen noch nicht nachgewiesen ist.

Wir haben es in der Optik an der Trennungsgrenze zweier Medien daher nur mit einem reflektierten und einem gebrochenen Strahl zu tun. Bei der Fortpflanzung der gewöhnlichen elastischen Schwingungen in den festen Körpern aber, mit denen die Seismologie zu tun hat, erzeugt jede Welle, sei es eine longitudinale oder eine transversale, an der Trennungsgrenze zweier Medien mit verschiedenen physikalischen Eigenschaften im allgemeinen vier Wellen und zwar je eine reflektierte und eine gebrochene longitudinale und transversale. Dieser Umstand macht die Untersuchung der verschiedenen Erscheinungen der Fortpflanzung der seismischen Wellen äußerst kompliziert. Schon ein Blick auf irgendein charakteristisches Seismogramm eines Erdbebens genügt, um sich davon zu überzeugen.

Die Trennungsgrenze zweier Medien macht sich nun nicht nur dadurch bemerkbar, daß sie die Reflexion und die Brechung veranlaßt, sondern es können an einer solchen Grenze noch besondere Oberflächenwellen entstehen, die in der Seismologie eine große Bedeutung haben. Auf diese hat der berühmte englische Physiker Lord Rayleigh[6]) aufmerksam gemacht, während die Theorie derselben von dem englischen Mathematiker H. Lamb[7]) ausgearbeitet wurde.

Zur Betrachtung dieser Wellen werden wir nun übergehen.

§ 2. Die Theorie der Oberflächenwellen.

In den vorhergehenden Paragraphen haben wir gesehen, daß die longitudinalen und transversalen Sinuswellen, die den Gesetzen der harmonischen Schwingungen unterworfen sind, unsere Grunddifferentialgleichungen (5) befriedigen, wobei diese Wellen sich übereinander lagern können, so daß wir im Resultat ein sehr kompliziertes System von Wellen erhalten. Dieses Resultat der Theorie stimmt mit den Ergebnissen der seismometrischen Beobachtungen überein.

Aber eine solche Lösung der Aufgabe ist durchaus nicht die einzige, denn den Grunddifferentialgleichungen (5) können auch andere Typen von Funktionen genügen.

Digitized by Google

Wir wollen nun untersuchen, was wir an der Oberfläche der Erde beachten können. Dieser Fall ist von besonderem Interesse, denn die seismischen Instrumentalbeobachtungen werden fast ausnahmslos an der Oberfläche angestellt.

Dementsprechend wählen wir den Koordinatenanfangspunkt auf der Oberfläche im Epizentrum, die z-Achse nach dem Zenith, die x-Achse nach Nord und die y-Achse nach Ost gerichtet.

Die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Erdschichten verändern sich nun mit der Tiefe; wenn man sich aber auf die unmittelbar an die Oberfläche angrenzenden Schichten beschränkt, so kann man sie in erster Annäherung als hinreichend homogen und isotrop betrachten, um die oben abgeleiteten Formeln der Elastizitätstheorie anwenden zu können. Es ist uns hierbei gleichgültig, aus welcher Ursache die elastischen Deformationen ursprünglich entstanden sind; nur das ist wichtig, daß die entsprechenden Deformationen zu allerletzt in den oberen Erdschichten auftreten, so daß wir eben auf diese mit einer gewissen Annäherung die früher abgeleiteten Gleichungen anwenden können.

Bei der Größe des Erdradius können wir innerhalb eines gewissen Gebietes die Oberfläche der Erde als eben betrachten. Die Theorie muß also ergeben, welche Arten von Schwingungen in dem Gebiete, das an das Epizentrum des Erdbebens angrenzt, entstehen können.

Bei der Wahl unseres Koordinatenanfangspunktes geht die Bewegung, die die Schwingungen der Schichten der Oberfläche der Erde veranlassen soll, von den negativen Werten von z aus.

Die Differentialgleichungen (5) können befriedigt werden, wenn wir für die Projektionen der Verrückungen u, v und w irgendeines Punktes M, der im Innern der oberen Schichten der Erde liegt, folgende Ausdrücke annehmen:

$$\left.\begin{aligned} u &= Ae^{\sigma} \\ v &= Be^{\sigma} \\ w &= Ce^{\sigma} \end{aligned}\right\}, \tag{44}$$

wo

$$\sigma = -qz + i\{fx + gy - pt\} \tag{45}$$

ist. A, B, C, q, f, g, p sind Konstanten, deren Bedeutung wir bestimmen müssen; ferner ist $i = \sqrt{-1}$.

Es sind also u, v und w Funktionen von den vier unabhängigen Variablen x, y, z und t.

Die oben angeführten Konstanten können nicht als willkürliche aufgefaßt werden, sondern wenn die Ausdrücke (44) unsere Grunddifferentialgleichungen (5)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta u \\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta v \\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\varrho}\Delta w \end{aligned}\right\}, \tag{5}$$

Digitized by Google

wo

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \tag{3}$$

ist, befriedigen sollen, so sind diese Konstanten durch gewisse Beziehungen miteinander verbunden.

Um diese zu ermitteln, setzen wir die Ausdrücke für u, v und w aus den Formeln (44) in die Differentialgleichungen (5) ein

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A e^{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial t}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = A e^{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = A e^{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} = A e^{\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial z}.$$

Es ist aber

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \sigma}{\partial t} &= -\,ip \\ \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \quad if \\ \frac{\partial \sigma}{\partial y} &= \quad ig \\ \frac{\partial \sigma}{\partial z} &= -\,q \end{aligned}\right\}, \tag{46}$$

folglich

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\,A e^{\sigma}\, ip \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \quad A e^{\sigma}\, if \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \quad A e^{\sigma}\, ig \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= -\,A e^{\sigma}\, q \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

In gleicher Weise finden wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\,B e^{\sigma}\, ip \\ \frac{\partial v}{\partial x} &= \quad B e^{\sigma}\, if \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \quad B e^{\sigma}\, ig \\ \frac{\partial v}{\partial z} &= -\,B e^{\sigma}\, q \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} &= -\,C e^{\sigma}\, ip \\ \frac{\partial w}{\partial x} &= \quad C e^{\sigma}\, if \\ \frac{\partial w}{\partial y} &= \quad C e^{\sigma}\, ig \\ \frac{\partial w}{\partial z} &= -\,C e^{\sigma}\, q \end{aligned}\right\}. \tag{49}$$

Digitized by Google

Hieraus erhalten wir

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e^{\sigma}[i\{fA + gB\} - Cq]$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \quad e^{\sigma} fi[i\{fA + gB\} - Cq] \\ \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \quad e^{\sigma} gi[i\{fA + gB\} - Cq] \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} &= - e^{\sigma} q\ [i\{fA + gB\} - Cq] \end{aligned}\right\}. \tag{50}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (46) und (47), da $i^2 = -1$ ist,

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= - Ae^{\sigma} p^2 \\ \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= e^{\sigma} A[q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\}. \tag{51}$$

Ebenso finden wir

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= - Be^{\sigma} p^2 \\ \Delta v &= e^{\sigma} B[q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= - Ce^{\sigma} p^2 \\ \Delta w &= e^{\sigma} C[q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\}. \tag{53}$$

Setzen wir nun die gefundenen Ausdrücke der Reihe nach in die Differentialgleichungen (5) ein, so erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} -e^{\sigma} Ap^2 &= \quad \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} fi[i\{fA + gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} A[q^2 - f^2 - g^2] \\ -e^{\sigma} Bp^2 &= \quad \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} gi[i\{fA + gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} B[q^2 - f^2 - g^2] \\ -e^{\sigma} Cp^2 &= -\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} q\ [i\{fA + gB\} - Cq] + \frac{\mu}{\varrho}\, e^{\sigma} C[q^2 - f^2 - g^2] \end{aligned}\right\} \tag{54}$$

Diese Formeln enthalten die einzige Variable e^{σ} als gemeinsamen Faktor bei allen Gliedern, wir können also unsere Gleichungen durch diese Größe dividieren und erhalten drei Gleichungen, welche die gegenseitigen Beziehungen der einzelnen konstanten Koeffizienten zueinander bestimmen.

Den Gleichungen (54) genügen zwei verschiedene Gruppen der Größen A, B, C und f, g, q und p, die wir durch die Indizes 1 und 2 unterscheiden wollen.

I. c sei eine willkürliche Konstante.

Setzt man

$$\left.\begin{aligned} A_1 &= \quad if_1 c \\ B_1 &= \quad ig_1 c \\ C_1 &= - q_1 c \end{aligned}\right\} \tag{55}$$

Digitized by Google

und setzt diese Größen in die Gleichungen (54) ein, so erhält man

$$-if_1cp_1^2 = \frac{\lambda+\mu}{\varrho} if_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2] + \frac{\mu}{\varrho} if_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2]$$

$$-ig_1cp_1^2 = \frac{\lambda+\mu}{\varrho} ig_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2] + \frac{\mu}{\varrho} ig_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2]$$

$$+q_1cp_1^2 = -\frac{\lambda+\mu}{\varrho} q_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2] - \frac{\mu}{\varrho} q_1c[q_1^2-f_1^2-g_1^2].$$

Diese drei Gleichungen können befriedigt werden, wenn wir noch setzen

$$f_1^2+g_1^2-q_1^2 = \frac{\varrho}{\lambda+2\mu}\cdot p_1^2. \tag{56}$$

Wenn also die verschiedenen Konstanten durch die Relationen, welche die Formeln (55) und (56) bestimmen, verbunden sind, so befriedigt der Ausdruck (44) unsere Grunddifferentialgleichungen.

Die Bedingungsgleichungen (54) können aber noch durch eine zweite Gruppe von Konstanten befriedigt werden.

II. Wir setzen

$$i(A_2f_2+B_2g_2) - C_2q_2 = 0. \tag{57}$$

Es verwandeln sich dann die ersten Glieder in den quadratischen Klammern der rechten Seiten der Gleichungen (54) in Null.

Dann kann man jede dieser Gleichungen bzw. durch A, B und C kürzen und es führen alle zu derselben zweiten Bedingungsgleichung.

$$f_2^2+g_2^2-q_2^2 = \frac{\varrho}{\mu}p_2^2. \tag{58}$$

Wenn also die Konstanten den Bedingungsgleichungen (57) und (58) genügen, so befriedigt wiederum die Gruppe (44) unsere Grunddifferentialgleichungen.

Wir haben somit zwei Lösungen unserer Differentialgleichungen gefunden.

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1 &= -q_1z + i\{f_1x+g_1y-p_1t\}\\ \text{und}\quad \sigma_2 &= -q_2z + i\{f_2x+g_2y-p_2t\}\end{aligned}\right\}. \tag{59}$$

Dann erhalten wir z. B. für die Projektion der Verrückung u folgende zwei partikuläre Lösungen:

$$u = A_1e^{\sigma_1}$$

$$u = A_2e^{\sigma_2}.$$

Digitized by Google

Da unsere Differentialgleichungen (5) linear sind, d. h. keine Produkte höherer Potenzen oder der Derivierten enthalten, so wird auch die Summe der zwei partikulären Lösungen die Grundgleichungen der Bewegung befriedigen.

Also erhalten wir für u, v und w folgende allgemeinere Lösungen:

$$\left.\begin{aligned} u &= A_1 e^{r_1} + A_2 e^{r_2} \\ v &= B_1 e^{r_1} + B_2 e^{r_2} \\ w &= C_1 e^{r_1} + C_2 e^{r_2} \end{aligned}\right\}. \tag{60}$$

Wir haben uns nun die Aufgabe gestellt, die Bewegung an der Erdoberfläche zu untersuchen, d. h. für den Fall $z = 0$.

Wir wollen für diesen Fall die entsprechenden Grenzbedingungen festsetzen.

Vernachlässigt man die Dichte der Luft im Vergleich zur Dichte der oberen Erdschichten und berücksichtigt, daß die Spannungen an der Oberfläche irgendeiner Elementarfläche, die im Innern des festen Körpers angenommen ist, die Wirkungen der anderen Teile des festen Körpers, die sich außerhalb des gegebenen Elements der ein gewisses Volumen begrenzenden Oberfläche befinden, ersetzen (§ 1, Kap. I), so müssen wir die Normalspannung und die Tangentialspannungen an der Oberfläche der Erde gleich Null setzen.

Da das Element der Oberfläche zur Z-Achse senkrecht ist, so erhalten wir nach den früheren Bezeichnungen (Fig. 3):

$$Z_z = 0$$

$$X_z = 0$$

$$Y_z = 0$$

oder auf Grund der neuen Bezeichnungen, die aus den Formeln (8) und (9) des § 1 des vorhergehenden Kapitels bestimmt werden können,

$$\left.\begin{aligned} N_3 &= 0 \\ T_2 &= 0 \\ T_1 &= 0 \end{aligned}\right\}. \tag{61}$$

Entwickeln wir nun diese Bedingungen.

Auf Grund der dritten Gleichung (67) und der zweiten und ersten (84) des I. Kapitels erhalten wir

$$\text{für} \qquad z = 0 \left\{\begin{aligned} N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = 0 \\ T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = 0 \end{aligned}\right\}. \tag{62}$$

Digitized by Google

Auf Grund der Gleichungen (60) und (59) finden wir ebenso wie früher

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \quad A_1 i f_1 e^{\sigma_1} + A_2 i f_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \quad B_1 i g_1 e^{\sigma_1} + B_2 i g_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial w}{\partial z} &= - C_1 q_1 e^{\sigma_1} - C_2 q_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial u}{\partial z} &= - A_1 q_1 e^{\sigma_1} - A_2 q_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial w}{\partial x} &= \quad C_1 i f_1 e^{\sigma_1} + C_2 i f_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial w}{\partial y} &= \quad C_1 i g_1 e^{\sigma_1} + C_2 i g_2 e^{\sigma_2} \\
\frac{\partial v}{\partial z} &= - B_1 q_1 e^{\sigma_1} - B_2 q_2 e^{\sigma_2}
\end{aligned}\right\} \tag{63}$$

wobei für $z = 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= i\{f_1 x + g_1 y - p_1 t\} \\
\sigma_2 &= i\{f_2 x + g_2 y - p_2 t\}.
\end{aligned} \tag{64}$$

Hieraus folgt, daß

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = e^{\sigma_1}[i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - C_1 q_1] + e^{\sigma_2}[i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - C_2 q_2].$$

Setzen wir nun diese Größen in die erste Gleichung (62) ein, so wird

$$\lambda e^{\sigma_1}[i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - C_1 q_1] + \lambda e^{\sigma_2}[i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - C_2 q_2] \\ - 2\mu C_1 q_1 e^{\sigma_1} - 2\mu C_2 q_2 e^{\sigma_2} = 0$$

oder

$$e^{\sigma_1}[\lambda i\{A_1 f_1 + B_1 g_1\} - (\lambda + 2\mu) C_1 q_1] + \\ + e^{\sigma_2}[\lambda i\{A_2 f_2 + B_2 g_2\} - (\lambda + 2\mu) C_2 q_2] = 0 \tag{65}$$

Diese Gleichung muß für $z = 0$ immer gelten, und zwar für alle Werte von x, y und t; das ist jedoch nur dann möglich, wenn die variablen Größen σ_1 und σ_2 einander gleich sind, für alle Werte der unabhängigen Variablen. Dann kann man aber die vorhergehende Gleichung durch den allgemeinen variablen Faktor $e^{\sigma_1} = e^{\sigma_2}$ dividieren, so daß wir eine neue Bedingungsgleichung erhalten, die unsere Konstanten miteinander verbindet.

Die Formeln (64) zeigen, daß σ_1 und σ_2 für willkürliche Werte von x, y und t nur in dem Falle gleich sein können, wenn

$$\left.\begin{aligned}
f_1 &= f_2 \\
g_1 &= g_2 \\
p_1 &= p_2
\end{aligned}\right\} \tag{66}$$

ist. Wir können daher fernerhin diese Größen und auch σ ohne Indizes schreiben, q_1 und q_2 können jedoch verschieden sein.

Digitized by Google

Die vorhergehende Bedingungsgleichung nimmt dann die folgende Form an:

$$\lambda i[(A_1 + A_2)f + (B_1 + B_2)g] = (\lambda + 2\mu)[C_1 q_1 + C_2 q_2]. \tag{67}$$

Wir wollen nun die beiden anderen Bedingungsgleichungen aufsuchen, indem wir in die zweite und dritte Formel (62) die entsprechenden Größen aus den Formeln (63) einsetzen.

$$\mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = \mu[-(A_1 q_1 + A_2 q_2) + if(C_1 + C_2)]e^{\sigma} = 0$$

und

$$\mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = \mu[-(B_1 q_1 + B_2 q_2) + ig(C_1 + C_2)]e^{\sigma} = 0$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A_1 q_1 + A_2 q_2 &= if(C_1 + C_2) \\ B_1 q_1 + B_2 q_2 &= ig(C_1 + C_2) \end{aligned}\right\} \tag{68}$$

Setzen wir nun in diese Ausdrücke die Werte A_1, B_1 und C_1 aus den Formeln (55) ein, so erhalten wir

$$A_2 q_2 = if(-q_1 c + C_2) - ifq_1 c = if\{C_2 - 2q_1 c\}$$

$$B_2 q_2 = ig(-q_1 c + C_2) - igq_1 c = ig\{C_2 - 2q_1 c\}.$$

Führen wir jetzt die folgende Bezeichnung ein,

$$H = i\frac{C_2 - 2q_1 c}{q_2}, \tag{69}$$

so ist

$$\frac{A_2}{f} = \frac{B_2}{g} = H$$

oder

$$\left.\begin{aligned} A_2 &= fH \\ B_2 &= gH \end{aligned}\right\}. \tag{70}$$

Wenden wir uns nun zu der Formel (67).

Diese Formel kann in folgender Form geschrieben werden:

$$\lambda[i\{A_1 f + B_1 g\} - C_1 q_1] + \lambda[i\{A_2 f + B_2 g\} - C_2 q_2] - 2\mu[C_1 q_1 + C_2 q_2] = 0.$$

In diesem Ausdruck ist das zweite Glied in der eckigen Klammer auf Grund der Beziehung (57) gleich Null.

Setzt man hier ebenfalls die Ausdrücke A_1, B_1 und C_1 aus den Gleichungen (55) ein, so erhält man

$$\lambda c[q_1^2 - f^2 - g^2] + 2\mu q_1^2 c - 2\mu q_2 C_2 = 0.$$

Aus der Gleichung (56) folgt aber auf Grund der Beziehungen (66)

$$q_1^2 - f^2 - g^2 = -\frac{\varrho}{\lambda + 2\mu}\cdot p^2;$$

Digitized by Google

folglich ist

$$2\mu q_2 C_2 = 2\mu q_1^2 c - \frac{\lambda\varrho}{\lambda + 2\mu} \cdot p^2 c$$

oder

$$C_2 = \left[\frac{q_1^2}{q_2} - \frac{\lambda\varrho}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{p^2}{2\mu} \cdot \frac{1}{q_2}\right] c. \tag{71}$$

Andererseits folgt aus den Gleichungen (57) und (70), daß

$$i(f^2 + g^2) H - q_2 C_2 = 0$$

ist, oder

$$H = -i \frac{q_2 C_2}{f^2 + g^2}. \tag{72}$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Gleichung (69), so ergibt sich

$$\frac{C_2 - 2q_1 c}{q_2} + \frac{q_2 C_2}{f^2 + g^2} = 0$$

oder

$$[f^2 + g^2 + q_2^2] C_2 - 2q_1 c [f^2 + g^2] = 0.$$

Führt man nun als neue Bezeichnung ein

$$m^2 = f^2 + g^2, \tag{73}$$

so erhält man

$$C_2 = \frac{2q_1 m^2}{m^2 + q_2^2} \cdot c. \tag{74}$$

Zur Vereinfachung führen wir weiter folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varrho}{\mu} &= k^2 \\ \frac{\varrho}{\lambda + 2\mu} &= h^2. \end{aligned}\right\} \tag{75}$$

Dann ist

$$\lambda + 2\mu = \frac{\varrho}{h^2},$$

$$\mu = \frac{\varrho}{k^2},$$

und folglich

$$\lambda = \varrho\left\{\frac{1}{h^2} - \frac{2}{k^2}\right\} = \varrho\frac{k^2 - 2h^2}{h^2 k^2}$$

und

$$\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{\varrho}{\mu} = \frac{\varrho\frac{k^2 - 2h^2}{h^2 k^2}}{\frac{\varrho}{h^2}} \cdot k^2 = k^2 - 2h^2.$$

Wir setzen nun den letzten Ausdruck in die Gleichung (71) ein. Dann ist

$$C_2 = \frac{1}{q_2}\left[q_1^2 - \frac{1}{2}(k^2 - 2h^2) p^2\right] c. \tag{76}$$

Digitized by Google

Andererseits ist auf Grund der Beziehungen (56), (58), (73) und (75)

$$m^2 - q_1{}^2 = h^2 p^2$$
$$m^2 - q_2{}^2 = k^2 p^2$$

oder

$$\left.\begin{aligned} q_1{}^2 &= m^2 - h^2 p^2 \\ q_2{}^2 &= m^2 - k^2 p^2 \end{aligned}\right\}. \tag{77}$$

Führt man diese Größen in die Formeln (74) und (76) ein, so erhält man

$$C_2 = \frac{2 q_1 m^2}{2 m^2 - k^2 p^2} c$$

und

$$C_2 = \frac{1}{q_2}\left[m^2 - h^2 p^2 - \frac{1}{2} k^2 p^2 + h^2 p^2\right] c = \frac{1}{2 q_2} \cdot [2 m^2 - k^2 p^2] c.$$

Wir haben somit zwei verschiedene Ausdrücke für C_2.

Setzt man den zweiten in die Gleichung (72) ein, und berücksichtigt, daß

$$f^2 + g^2 = m^2,$$

ist, so erhält man

$$H = -i\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2 p^2}{m^2}\right] c. \tag{78}$$

Dieser Ausdruck wird uns später noch nützlich sein.

Setzt man nun die beiden Ausdrücke für C_2 einander gleich und dividiert durch den allgemeinen Faktor c, so ergibt sich

$$4 q_1 q_2 m^2 = [2 m^2 - k^2 p^2]^2$$

oder

$$q_1 q_2 = \frac{[2 m^2 - k^2 p^2]^2}{4 m^2} \tag{79}$$

und

$$q_1{}^2 q_2{}^2 = \frac{[2 m^2 - k^2 p^2]^4}{16 m^4}.$$

Aus den Gleichungen (77) haben wir andererseits

$$q_1{}^2 q_2{}^2 = [m^2 - h^2 p^2][m^2 - k^2 p^2];$$

folglich

$$16 m^4 [m^2 - h^2 p^2][m^2 - k^2 p^2] = [2 m^2 - k^2 p^2]^4.$$

Führt man ferner die Bezeichnung ein

$$V = \frac{p}{m}, \tag{80}$$

so ergibt sich

$$16[1 - h^2 V^2][1 - k^2 V^2] = [2 - k^2 V^2]^4.$$

Aus dieser Gleichung kann man die Größe V als Funktion von k und h, d. h. von den Koeffizienten der Elastizität λ, μ und der Dichte ϱ bestimmen.

Digitized by Google

Wir erhalten nach Ausführung der Multiplikationen

$$k^8 V^8 - 8k^6 V^6 + (24k^4 - 16h^2k^2) V^4 - (16k^2 - 16h^2) V^2 = 0.$$

Den Modul der Querkontraktion oder die Poissonsche Konstante können wir gleich $\frac{1}{4}$ setzen.

In diesem Falle ist nach Formel (77) § 3, Kap. I

$$\lambda = \mu.$$

Dann ergibt sich, auf Grund der Ausdrücke (75)

$$k^2 = \frac{\varrho}{\mu}$$

$$h^2 = \frac{\varrho}{3\mu} = \frac{1}{3} k^2.$$

Die vorhergehende Gleichung nimmt dann die folgende Form an:

$$k^8 V^8 - 8k^6 V^6 + \left(24 - \frac{16}{3}\right) k^4 V^4 - \left(16 - \frac{16}{3}\right) k^2 V^2 = 0.$$

Dividiert man diesen Ausdruck durch den allgemeinen Faktor $k^2 V^2$ und setzt der Bequemlichkeit halber

$$k^2 V^2 = \frac{\varrho}{\mu} V^2 = \chi, \tag{81}$$

so erhält man für χ folgende kubische Gleichung:

$$3\chi^3 - 24\chi^2 + 56\chi - 32 = 0. \tag{82}$$

Aus dieser Gleichung kann man χ bestimmen.

Wir erhalten für χ eine bestimmte Zahl, die wir gleich a setzen wollen.

Dann ist auf Grund der Formel (81)

$$V = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{83}$$

Bevor wir die Lösung der kubischen Gleichung (82) vornehmen, wollen wir uns klar machen, was die Größe V an sich darstellt und zu welchem Zwecke wir diese ziemlich komplizierte Analyse unternommen haben.

Wir haben schon früher gesehen, daß für $z = 0$ ist

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma = i\{fx + gy - pt\} \tag{84}$$

(Formel (64) und (66)).

Folglich werden die Projektionen der Verrückung irgendeines Punktes M an der Oberfläche der Erde mit den Koordinaten x und y auf Grund der Gleichungen (60) in folgender Form ausgedrückt

$$\left.\begin{aligned} u &= (A_1 + A_2)e^{\sigma} \\ v &= (B_1 + B_2)e^{\sigma} \\ w &= (C_1 + C_2)e^{\sigma} \end{aligned}\right\}. \tag{85}$$

Digitized by Google

Es erscheint also σ als die einzige variable Größe.

Wir nehmen den Punkt M irgendwo in der xy-Ebene im Abstande r von dem Koordinatenanfang 0, welcher nach der Voraussetzung mit dem Epizentrum des Erdbebens zusammenfällt (Fig. 17), an.

Bezeichnet man die Koordinaten des Punktes M mit x und y, den Winkel MOA mit α, so ergibt sich

$$r = x\cos\alpha + y\sin\alpha.$$

Da die Bewegung vom Epizentrum aus sich nach allen Richtungen gleich fortpflanzt, so kann σ nur eine Funktion von r sein.

Da nach Formel (73)

$$m = \sqrt{f^2 + g^2}$$

ist, so ist

$$\sigma = i\left\{m\left(\frac{f}{m}x + \frac{g}{m}y\right) - pt\right\}.$$

Hieraus folgt

$$\frac{f}{m} = \cos\alpha,$$

$$\frac{g}{m} = \sin\alpha$$

und

$$\sigma = i\{mr - pt\}. \tag{86}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß in dem Punkte M im Abstande r von O im Moment t die Größe σ den Wert hat, den die Formel (86) bestimmt.

Wir nehmen nun einen anderen Punkt M_1 im Abstande r_1 von O und stellen uns die Frage, in welchem Moment t_1 die veränderliche Größe σ in diesem neuen Punkte denselben Wert haben wird, den sie im Moment t im Punkte M gehabt hat.

Dazu ist erforderlich, daß

$$mr - pt = mr_1 - pt_1,$$

oder

$$m(r_1 - r) = p(t_1 - t),$$

oder auch

$$\frac{p}{m} = \frac{r_1 - r}{t_1 - t}.$$

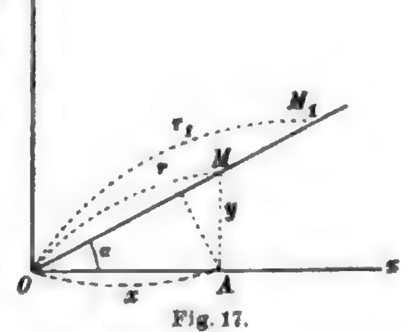


Fig. 17.

Also erfordert die durch die Gruppe der Gleichungen (85) bestimmte Bewegung der Punkte der Oberfläche die Zeit $t_1 - t$, um die Distanz $r_1 - r$ zurückzulegen.

Es ist daher $\frac{r_1 - r}{t_1 - t} = \frac{p}{m} = V$ (Formel (80)) nichts anderes, als die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des betreffenden Typus der Störungen längs der Erdoberfläche.

Digitized by Google

Also gibt die Formel (83)

$$V = \sqrt{a} \cdot \sqrt{\frac{\mu}{\varrho}},$$

in der a die Wurzel der kubischen Gleichung (82) ist, die Geschwindigkeit der Schwingungen längs der Oberfläche der Erde an.

Nach Feststellung dieser wichtigen Beziehung wollen wir zur Lösung der kubischen Gleichung übergehen.

$$3\chi^3 - 24\chi^2 + 56\chi - 32 = 0. \tag{82}$$

Eine jede kubische Gleichung hat drei Wurzeln, von denen wenigstens eine reell ist.

Es ist leicht zu sehen, daß $\chi = 4$ der Gleichung (82) genügt.

Folglich ist eine Wurzel

$$\chi_1 = 4.$$

Um die beiden anderen zu finden, dividieren wir die Gleichung (82) durch $\chi - 4$. Wir erhalten

$$3\chi^2 - 12\chi + 8 = 0$$

oder

$$\chi^2 - 4\chi + \tfrac{8}{3} = 0.$$

Lösen wir nun diese quadratische Gleichung, so erhalten wir

$$\chi = 2 \pm \sqrt{4 - \frac{8}{3}} = 2 \pm \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Folglich

$$\chi_2 = 2\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot (1 + 0{,}57735) = 3{,}1547$$

$$\chi_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 2 \cdot (1 - 0{,}57735) = 0{,}8453.$$

Also hat unsere kubische Gleichung drei reelle Wurzeln, die alle positiv sind.

Es entsteht nun die Frage, welche von diesen drei Wurzeln den Bedingungen der vorliegenden Aufgabe genügt.

Die zweite Formel (77) gibt

$$q_2^2 = m^2\left(1 - k^2 \frac{p^2}{m^2}\right)$$

oder

$$q_2^2 = m^2(1 - k^2 V^2),$$

oder auf Grund der Formel (81)

$$q_2^2 = m^2(1 - \chi).$$

q_2^2 und m^2 sind positive Größen, und deshalb können nur diejenigen Wurzeln der Gleichung (82) genügen, die kleiner als 1 sind, in unserem Falle also χ_3.

Digitized by Google

Also ist

$$a = \chi_3 = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0,8453,$$

und

$$\sqrt{a} = 0,9194,$$

folglich

$$V = 0,9194\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}. \tag{87}$$

Aber $\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}$ ist nach Formel (18) nichts anderes, als die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der transversalen Wellen in den oberen Schichten der Erde oder V_2.

Also erhalten wir endgültig

$$V = 0,9194\, V_2. \tag{88}$$

V ist also eine konstante Größe und stellt die Geschwindigkeit der Fortpflanzung der seismischen Oberflächenwellen dar.

Unser Resultat, das sich aus den Grunddifferentialgleichungen der Elastizitätstheorie ergibt, stimmt vortrefflich mit den Beobachtungen überein.

Denn die seismometrischen Beobachtungen auf den verschiedenen Stationen zeigen, daß sich die seismischen Wellen bei einem Erdbeben längs der Erdoberfläche fortpflanzen, und zwar ganz in der Art, wie sich die Wasserwellen auf der Oberfläche des Wassers verbreiten, wenn man einen Stein auf die ruhige Oberfläche wirft.

Diese Wellen zeichnen sich durch verhältnismäßig große Periode aus und infolgedessen nach der allgemeinen Formel (29) auch durch eine große Wellenlänge. Deshalb werden sie auch lange Wellen oder Oberflächenwellen genannt.

Ist die Lage des Epizentrums und die Zeit des Eintreffens der langen Wellen an verschiedenen seismischen Stationen bekannt, so kann man sehr leicht ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit V bestimmen. Es hat sich eine Abhängigkeit von V von der Entfernung nicht feststellen lassen, so daß wir V daher mit genügender Genauigkeit als eine Konstante betrachten können.

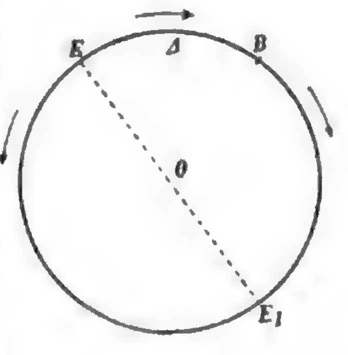


Fig. 18.

Die Geschwindigkeit V kann also auch schon aus den Beobachtungen einer Station bestimmt werden, wenn die letztere mit genügend empfindlichen Seismographen versehen ist.

Ist nämlich in Fig. 18 E das Epizentrum des Erdbebens, B der Beobachtungsort und E_1 die Antipode oder das sogenannte Antiepizentrum, ferner Δ, in Kilometern ausgedrückt, die kürzeste Distanz zwischen E und B längs des größten Kreises gemessen, so erreichen die seismischen Oberflächenwellen den Punkt B zuerst auf dem kürzesten Wege EB. Diese Wellen werden gewöhnlich die W_1-Wellen genannt. Man wählt auf dem Seismogramm irgendein deutlich ausgeprägtes Maximum und bestimmt den entsprechenden Moment t_1.

Digitized by Google

Aber dieselben Wellen erreichen B, obwohl in stark abgeschwächter Form, noch auf einem anderen, längeren Wege EE_1B, indem sie die Antipode passieren; man nennt sie gewöhnlich die W_2-Wellen.

Sie kommen naturgemäß später an, denn sie haben den Weg $2\pi R - \Delta$ zurückzulegen, wo R der mittlere Erdradius ist.

Ist das Erdbeben heftig genug, so kann man auf den Seismogrammen bisweilen in den Wellen W_2 dasselbe Maximum, das sich in der Hauptphase in den Wellen W_1 bemerkbar gemacht hat, auffinden. Der entsprechende Moment sei t_2.

Der mittlere Radius des Erdkörpers ist

$$R = 6371 \text{ km};$$

folglich abgerundet

$$2\pi R = 40000 \text{ km}.$$

Ist t_0 der Moment des Ausganges der entsprechenden Bewegung vom Epizentrum E, so ergibt sich

$$V(t_1 - t_0) = \Delta$$

$$V(t_2 - t_0) = 40000 - \Delta.$$

Hieraus finden wir

$$V = \frac{40000 - 2\Delta}{t_2 - t_1}. \tag{89}$$

Diese Formel gibt die Möglichkeit, die Durchschnittsgeschwindigkeit der Fortpflanzung der seismischen Oberflächenwellen nach den Beobachtungen nur einer Station zu bestimmen.

Außer den Wellen W_1 und W_2 werden auch bisweilen die sogenannten W_3-Wellen beobachtet. Es sind dies die Wellen W, die über B hinaus ihren Weg fortsetzen, die ganze Erdkugel umlaufen und dann von neuem bei B anlangen. Der ganze Weg, den sie zurückgelegt haben, ist offenbar $(40000 + \Delta)$ km.

Wenn wir den Moment t_3 ihrer Ankunft bestimmen können, so ergibt sich für die Durchschnittsgeschwindigkeit V:

$$V(t_1 - t_0) = \Delta$$

$$V(t_3 - t_0) = 40000 + \Delta,$$

somit

$$V = \frac{40000}{t_3 - t_1}. \tag{90}$$

Aus den Beobachtungen der seismischen Station in Pulkovo während des Messina-Erdbebens 28. XII. 1908 ergab sich (nach W_2)

$$V = 3{,}53 \text{ km/sek}.$$

Andere Beobachter haben Zahlen gefunden, die sich von den angeführten wenig unterscheiden.

Digitized by Google

Es brauchen also die seismischen Oberflächenwellen ungefähr 3 Std. 8 Min. 51 Sek., um den Erdball zu umlaufen.

Wir haben früher gesehen, daß die mittlere Fortpflanzungsgeschwindigkeit transversaler Wellen V_2 in den oberen Schichten der Erde gleich 4,01 km/sek ist.

Nach der Formel (88) müssen wir haben

$$V = 0{,}9194 \times 4{,}01 = 3{,}69 \text{ km/sek.}$$

Die Übereinstimmung dieses Resultates mit der vorher gegebenen Zahl kann als gut bezeichnet werden.

Eine volle Übereinstimmung kann man überhaupt nicht erwarten, denn wir vergleichen hier nur die mittleren Größen der Geschwindigkeiten; es unterliegt aber keinem Zweifel, daß wie V_2, so auch V für Wasser und Land verschieden sein müssen. Außerdem haben wir bei der Ableitung der Formel (87) die Poissonsche Konstante gleich $\frac{1}{4}$ gesetzt.

Eine ausführliche und systematische Bestimmung der Größen V, V_2 und V_1 in ihrer Abhängigkeit von geologischen und physikalischen Eigentümlichkeiten der oberen Erdschichten hat die Seismologie, die sich ja noch in ihrer ersten Entwickelung befindet, noch nicht geliefert.

Nachdem wir die Frage nach der Geschwindigkeit der Fortpflanzung der seismischen Oberflächenwellen betrachtet haben, wollen wir den Charakter der Bewegung der Teilchen der Erdoberfläche näher untersuchen.

Für die Projektionen u, v und w der Verrückung irgendeines Punktes M hatten wir die Gruppe der Formeln (85)

$$\left.\begin{aligned} u &= (A_1 + A_2)\, e^{\sigma} \\ v &= (B_1 + B_2)\, e^{\sigma} \\ w &= (C_1 + C_2)\, e^{\sigma} \end{aligned}\right\}, \tag{85}$$

wo

$$\sigma = i\{fx + gy - pt\}. \tag{84}$$

Auf Grund der vorhergehenden Formeln suchen wir nun die Ausdrücke für $A_1 + A_2$, $B_1 + B_2$ und $C_1 + C_2$.

Die Formeln (55), (66) und (70) geben:

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= \quad ifc + fH = f\{ic + H\} \\ B_1 + B_2 &= \quad igc + gH = g\{ic + H\} \\ C_1 + C_2 &= - q_1 c + C_2. \end{aligned}$$

Nach den Gleichungen (72) und (73) ist aber

$$C_2 = -\frac{m^2 H}{i q_2} = i\,\frac{m^2}{q_2} \cdot H;$$

folglich ist

$$C_1 + C_2 = - q_1 c + i\,\frac{m^2}{q_2} H.$$

Andererseits ist nach der Formel (78):

$$H = - i\left[1 - \frac{1}{2}\,\frac{k^2 p^2}{m^2}\right] c;$$

Digitized by Google

folglich

$$ic + H = ic\left[1 - \left\{1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right\}\right] = \frac{ic}{2}\cdot\frac{k^2p^2}{m^2}$$

und

$$A_1 + A_2 = \frac{1}{2}\, if\frac{k^2p^2}{m^2}\cdot c$$

$$B_1 + B_2 = \frac{1}{2}\, ig\frac{k^2p^2}{m^2}\cdot c$$

$$C_1 + C_2 = -q_1c + i\frac{m^2}{q_2}\left[-i\left\{1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right\}\right]\cdot c$$

$$= \frac{m^2}{q_2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2} - \frac{q_1q_2}{m^2}\right]\cdot c.$$

Aus den Formeln (79) folgt aber, daß

$$\frac{q_1q_2}{m^2} = \frac{4m^4\left[1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}\right]^2}{4m^4} = 1 - \frac{k^2p^2}{m^2} + \frac{k^4p^4}{4m^4}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die vorhergehende Formel ein, so ergibt sich

$$C_1 + C_2 = \frac{m^2}{q_2}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2} - 1 + \frac{k^2p^2}{m^2} - \frac{k^4p^4}{4m^4}\right]c$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{k^2p^2}{q_2}\left[1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}\right]c.$$

Führt man noch den Ausdruck für q_2 aus den Formeln (77) ein, nämlich

$$q_2 = m\sqrt{1 - \frac{k^2p^2}{m^2}},$$

so erhält man

$$C_1 + C_2 = \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m}\cdot\frac{1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2p^2}{m^2}}}\cdot c.$$

Wir führen zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m}\cdot c \\ \Gamma_2 &= \frac{1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2p^2}{m^2}}}\cdot\Gamma_1 \end{aligned}\right\}. \tag{91}$$

Dann erhalten wir schließlich:

$$\left.\begin{aligned} A_1 + A_2 &= i\frac{f}{m}\,\Gamma_1 \\ B_1 + B_2 &= i\frac{g}{m}\,\Gamma_1 \\ C_1 + C_2 &= \Gamma_2, \end{aligned}\right\} \tag{92}$$

Digitized by Google

wo

$$m = \sqrt{f^2 + g^2}.$$

Wir wollen nun den Ausdruck für e^σ umgestalten.

$$\sigma = i\{fx + gy - pt\} = i\left\{m\left(\frac{f}{m}x + \frac{g}{m}y\right) - pt\right\}.$$

Wir haben schon früher gesehen, daß $\frac{f}{m}x + \frac{g}{m}y$ nichts anderes ist als die Entfernung r des gegebenen Punktes an der Oberfläche bis zum Epizentrum des Erdbebens.

Folglich ist

$$\sigma = i(mr - pt).$$

Führt man zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$mr = fx + gy = \gamma, \tag{93}$$

so ergibt sich auf Grund der Moivreschen Formel

$$e^\sigma = e^{i(\gamma - pt)} = \cos(\gamma - pt) + i\sin(\gamma - pt)$$

oder

$$e^\sigma = \cos(pt - \gamma) - i\sin(pt - \gamma).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formeln (85) ein und berücksichtigen die Beziehungen (92), so erhalten wir

$$u = i\frac{f}{m}\Gamma_1\cos(pt - \gamma) + \frac{f}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma)$$

$$v = i\frac{g}{m}\Gamma_1\cos(pt - \gamma) + \frac{g}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma)$$

$$w = \Gamma_2\cos(pt - \gamma) - i\Gamma_2\sin(pt - \gamma).$$

u, v und w sind ihrer physikalischen Bedeutung nach reelle Größen; deshalb lassen wir in den vorhergehenden Ausdrücken die imaginären Glieder weg und setzen einfach

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{f}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma) \\ v &= \frac{g}{m}\Gamma_1\sin(pt - \gamma) \\ w &= \Gamma_2\cos(pt - \gamma) \end{aligned}\right\}. \tag{94}$$

Wir gelangen so direkt zu einfachen harmonischen Schwingungen, d. h. wir erhalten sinusoidale Oberflächenwellen; wenn wir die entsprechende Periode mit T bezeichnen, so ist

$$p = \frac{2\pi}{T}.$$

Digitized by Google

Da wir aber die Glieder mit dem Faktor i weggelassen haben, so wollen wir uns noch davon überzeugen, daß die Gruppe der Formeln (94) in der Tat unsere Grunddifferentialgleichungen (5) befriedigt

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial x} + \frac{\mu}{\varrho}\cdot\Delta u\\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial y} + \frac{\mu}{\varrho}\cdot\Delta v\\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= \frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot\frac{\partial\theta}{\partial z} + \frac{\mu}{\varrho}\cdot\Delta w\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

und für die Grenzbedingungen für $z = 0$ ist

$$\left.\begin{aligned}N_3 &= \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0\\ T_2 &= \mu\left\{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\right\} = 0\\ T_1 &= \mu\left\{\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}\right\} = 0\end{aligned}\right\} \quad \text{(Formeln (62)).}$$

Unterscheidet sich z von 0, so ist

$$e^{\sigma_1} = e^{-q_1 z}\cdot e^{i\{fx+gy-pt\}} = e^{-q_1 z}\{\cos(pt-\gamma) - i\sin(pt-\gamma)\}$$

und

$$e^{\sigma_2} = e^{-q_2 z}\cdot e^{i\{fx+gy-pt\}} = e^{-q_2 z}\{\cos(pt-\gamma) - i\sin(pt-\gamma)\}.$$

Folglich müssen wir im allgemeinen Falle setzen

$$u = \{A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma) - i\{A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)$$

$$v = \{B_1 e^{-q_1 z} + B_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma) - i\{B_1 e^{-q_1 z} + B_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)$$

$$w = \{C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma) - i\{C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma).$$

Da A_1, B_1, A_2 und B_2 nach den Formeln (55), (70) und (78) imaginäre Größen, C_1 und C_2 aber nach den Formeln (55) und (76) reelle Größen sind, und da u, v und w dem Wesen der Sache nach nicht imaginär sein können, so müssen wir im allgemeinen Falle, auf Grund der vorhergehenden Beziehungen setzen

$$\left.\begin{aligned}u &= -i\{A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)\\ v &= -i\{B_1 e^{-q_1 z} + B_2 e^{-q_2 z}\}\sin(pt-\gamma)\\ w &= +\{C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}\}\cos(pt-\gamma)\end{aligned}\right\}. \tag{95}$$

Man überzeugt sich leicht, daß diese Ausdrücke für $z = 0$ bei Berücksichtigung der Beziehungen (92) zu den Formeln (94) führen. Es erübrigt nun noch zu zeigen, daß die allgemeinen Ausdrücke für u, v und w, die die Formeln (95) geben, in der Tat den Grunddifferentialgleichungen der Bewegung und den drei Grenzbedingungen genügen.

Digitized by Google

Wir wollen uns daher unter Zugrundelegung der Ausdrücke (95) mit der Bestimmung der verschiedenen Derivierten beschäftigen.

Setzen wir zur Abkürzung

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= \{A_1 e^{-q_1 z} + A_2 e^{-q_2 z}\}\\ \mathfrak{B} &= \{B_1 e^{-q_1 z} + B_2 e^{-q_2 z}\}\\ \mathfrak{C} &= \{C_1 e^{-q_1 z} + C_2 e^{-q_2 z}\}\end{aligned}\right\}, \tag{96}$$

so erhalten wir

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \quad p^2 i \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = \quad p^2 i \mathfrak{B} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -p^2 \mathfrak{C} \cos(pt-\gamma).$$

Berücksichtigen wir ferner, daß nach Formel (93)

$$\frac{\partial \gamma}{\partial x} = f$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial y} = g$$

ist, so erhalten wir

$$\frac{\partial u}{\partial x} = + f i \mathfrak{A} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = + g i \mathfrak{A} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = + i\{q_1 A_1 e^{-q_1 z} + q_2 A_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = + f^2 i \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = + g^2 i \mathfrak{A} \sin(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = - i\{q_1^2 A_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 A_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma).$$

Folglich

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = i[-q_1^2 A_1 e^{-q_1 z} - q_2^2 A_2 e^{-q_2 z} + m^2 \mathfrak{A}] \sin(pt-\gamma)$$

$$= -i[\{q_1^2 - m^2\} A_1 e^{-q_1 z} + \{q_2^2 - m^2\} A_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt-\gamma).$$

In gleicher Weise finden wir

$$\frac{\partial v}{\partial x} = + f i \mathfrak{B} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = + g i \mathfrak{B} \cos(pt-\gamma)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = + i\{q_1 B_1 e^{-q_1 z} + q_2 B_2 e^{-q_2 z}\} \sin(pt-\gamma).$$

Digitized by Google

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = + f^2 i \mathfrak{B} \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = + g^2 i \mathfrak{B} \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = - i \{ q_1^2 B_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 B_2 e^{-q_2 z} \} \sin(pt - \gamma)$$

und

$$\Delta v = - i [\{ q_1^2 - m^2 \} B_1 e^{-q_1 z} + \{ q_2^2 - m^2 \} B_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma).$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = f \mathfrak{C} \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = g \mathfrak{C} \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = - \{ q_1 C_1 e^{-q_1 z} + q_2 C_2 e^{-q_2 z} \} \cos(pt - \gamma).$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = - f^2 \mathfrak{C} \cos(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = - g^2 \mathfrak{C} \cos(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \{ q_1^2 C_1 e^{-q_1 z} + q_2^2 C_2 e^{-q_2 z} \} \cos(pt - \gamma)$$

und

$$\Delta w = [(q_1^2 - m^2) C_1 e^{-q_1 z} + (q_2^2 - m^2) C_2 e^{-q_2 z}] \cos(pt - \gamma).$$

Ferner

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = + i \{ f \mathfrak{A} + g \mathfrak{B} \} \cos(pt - \gamma)$$
$$- \{ q_1 C_1 e^{-q_1 z} + q_2 C_2 e^{-q_2 z} \} \cos(pt - \gamma)$$

oder

$$\theta = + [\{ ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1 \} e^{-q_1 z} + \{ ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2 \} e^{-q_2 z}] \cos(pt - \gamma).$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = f [\{ ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1 \} e^{-q_1 z} + \{ ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2 \} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = g [\{ ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1 \} e^{-q_1 z} + \{ ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2 \} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial z} = [- q_1 \{ ifA_1 + igB_1 \} - q_1 C_1 \} e^{-q_1 z} - q_2 \{ ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2 \} e^{-q_2 z}] \cos(pt - \gamma).$$

Wir setzen die gefundenen Ausdrücke in die Differentialgleichungen (5) ein, indem wir mit der ersten beginnen:

$$p^2 \{ i A_1 e^{-q_1 z} + i A_2 e^{-q_2 z} \} \sin(pt - \gamma) = + \frac{\lambda + \mu}{\varrho} f [\{ ifA_1 + igB_1 - q_1 C_1 \} e^{-q_1 z}$$
$$+ \{ ifA_2 + igB_2 - q_2 C_2 \} e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma) - \frac{\mu}{\varrho} [(q_1^2 - m^2) i A_1 e^{-q_1 z}$$
$$+ (q_2^2 - m^2) i A_2 e^{-q_2 z}] \sin(pt - \gamma).$$

Digitized by Google

Wir sehen, daß $\sin(pt-\gamma)$ allgemeiner Faktor ist, folglich ist

$$\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)\right\}iA_1+\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot f\{fiA_1+giB_1-q_1C_1\}\right]e^{-q_1z}$$
$$+\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right\}iA_2+\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot f\{fiA_2+giB_2-q_2C_2\}\right]e^{-q_2z}=0.$$

Aus den vorhergehenden Formeln haben wir

$$\left.\begin{aligned}A_1&=\quad ifc\\B_1&=\quad igc\\C_1&=-q_1c\end{aligned}\right\}\quad\text{Formel (55) (s. auch Formel (66)).}$$
$$\left.\begin{aligned}A_2&=fH\\B_2&=gH\end{aligned}\right\}\quad\text{Formeln (70)}$$
$$C_2=\frac{m^2}{q_2}\cdot iH\quad\text{aus der Formel (72).}$$

Setzt man diese Größen in die vorhergehende Gleichung ein und berücksichtigt, daß $i^2=-1$, so erhält man nach Division mit f

$$c\left[p^2+\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}\cdot(q_1^2-m^2)\right]e^{-q_1z}-iH\left[p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right]e^{-q_2z}=0.$$

Nach Formel (75) ist aber

$$\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}=\frac{1}{h^2}$$

und

$$\frac{\mu}{\varrho}=\frac{1}{k^2};$$

folglich

$$c\left[p^2+\frac{q_1^2-m^2}{h^2}\right]e^{-q_1z}-iH\left[p^2+\frac{q_2^2-m^2}{k^2}\right]e^{-q_2z}=0.$$

Aus der Formel (77) folgt aber, daß

$$\left.\begin{aligned}\frac{q_1^2-m^2}{h^2}&=-p^2\\ \text{und}\qquad \frac{q_2^2-m^2}{k^2}&=-p^2\end{aligned}\right\}\qquad(97)$$

ist. Setzt man diese Größen ein, so überzeugt man sich, daß die erste der Grunddifferentialgleichungen für alle Werte von x, y, z und t befriedigt wird und auch für alle Werte von c und iH, wo iH nach Formel (78) eine reelle Größe ist.

Wenden wir uns nun der zweiten Differentialgleichung (5) zu.

Setzt man in diese Gleichung die oben gefundenen Größen der Derivierten ein, so erhält man:

$$p^2\{iB_1e^{-q_1z}+iB_2e^{-q_2z}\}\sin(pt-\gamma)=\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot g[\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}e^{-q_1z}$$
$$+\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}e^{-q_2z}]\sin(pt-\gamma)$$
$$-\frac{\mu}{\varrho}[(q_1^2-m^2)iB_1e^{-q_1z}+(q_2^2-m^2)iB_2e^{-q_2z}]\sin(pt-\gamma).$$

Digitized by Google

Dieser Ausdruck enthält wiederum den allgemeinen Faktor $\sin(pt-\gamma)$. Also

$$\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)\right\}iB_1+\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot g\{fiA_1+giB_1-q_1C_1\}\right]e^{-q_1z}$$

$$+\left[\left\{-p^2-\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right\}iB_2+\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\cdot g\{fiA_2+giB_2-q_2C_2\}\right]e^{-q_2z}=0$$

oder auf Grund derselben oben angeführten Beziehungen, nach Division mit g

$$c\left[p^2+\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)\right]e^{-q_1z}-iH\left[p^2+\frac{\mu}{\varrho}\cdot(q_2^2-m^2)\right]e^{-q_2z}=0.$$

Auf Grund der Beziehungen (97) ist dieser Ausdruck identisch gleich Null.

Wir wollen nun die Gleichung für w untersuchen.

$$-p^2\{C_1e^{-q_1z}+C_2e^{-q_2z}\}\cos(pt-\gamma)=-\frac{\lambda+\mu}{\varrho}[q_1\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}e^{-q_1z}$$

$$+q_2\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}e^{-q_2z}]\cos(pt-\gamma)+\frac{\mu}{\varrho}[(q_1^2-m^2)C_1e^{-q_1z}$$

$$+(q_2^2-m^2)C_2e^{-q_2z}]\cos(pt-\gamma).$$

Dieser Ausdruck enthält $\cos(pt-\gamma)$ als allgemeinen Faktor. Folglich wird

$$\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)\right\}C_1-\frac{\lambda+\mu}{\varrho}q_1\{ifA_1+igB_1-q_1C_1\}\right]e^{-q_1z}$$

$$+\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right\}C_2-\frac{\lambda+\mu}{\varrho}q_2\{ifA_2+igB_2-q_2C_2\}\right]e^{-q_2z}=0.$$

Ersetzt man in diesem Ausdruck A_1, B_1, C_1 und A_2, B_2, C_2 durch die entsprechenden Größen, so ergibt sich

$$-cq_1\left[p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)+\frac{\lambda+\mu}{\varrho}\{-f^2-g^2+q_1^2\}\right]e^{-q_1z}$$

$$+iH\left[\left\{p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right\}\frac{m^2}{q^2}-\frac{\lambda+\mu}{\varrho}q_2\{f^2+g^2-m^2\}\right]e^{-q_2z}=0$$

oder

$$-cq_1\left[p^2+\frac{\lambda+2\mu}{\varrho}(q_1^2-m^2)\right]e^{-q_1z}+iH\left[p^2+\frac{\mu}{\varrho}(q_2^2-m^2)\right]\frac{m^2}{q^2}e^{-q_2z}=0.$$

Es ist leicht zu ersehen, daß auch diese Gleichung für alle Werte der unabhängigen Variabeln x, y, z und t und für alle Werte der Konstanten c und iH identisch befriedigt ist.

Wir haben uns also überzeugt, daß die Gruppe (95) in der Tat unsere Grunddifferentialgleichungen befriedigt.

Digitized by Google

Wir wollen noch untersuchen, ob sie auch den drei Grenzbedingungen genügt und beginnen mit der ersten Gleichung:

$$N_3 = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial w}{\partial z} = 0.$$

Wir setzen hierin die oben abgeleiteten Ausdrücke für θ und $\frac{\partial w}{\partial z}$ ein. Setzt man nun $z = 0$, so ist $e^{-q_1 z} = e^{-q_2 z} = 1$ und man erhält

$$\lambda[\{ifA_1 + igB_1 - q_1C_1\} + \{ifA_2 + igB_2 - q_2C_2\}]\cos(pt - \gamma)$$
$$- 2\mu[q_1C_1 + q_2C_2]\cos(pt - \gamma) = 0.$$

Dieser Ausdruck enthält $\cos(pt - \gamma)$ als allgemeinen Faktor.

Führt man statt A_1, B_1 usw. die entsprechenden Werte ein, so ergibt sich

$$\lambda\{q_1^2 - m^2\}c + 2\mu\{q_1^2c - Him^2\} = 0.$$

Aus Formel (78) erhalten wir aber

$$Hi = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right]c.$$

Setzt man diese Größen ein und dividiert durch c, so erhält man

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\cdot(q_1^2 - m^2) + k^2p^2 = 0.$$

Nach Formel (75) ist aber

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu} = \frac{k^2}{h^2},$$

und nach der ersten Gleichung (97)

$$q_1^2 - m^2 = -p^2h^2,$$

folglich

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\mu}\cdot(q_1^2 - m^2) = -k^2p^2.$$

Die erste Grenzbedingung ist also befriedigt.

Die zweite Grenzbedingung $T_2 = 0$ verlangt, daß

$$\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = 0.$$

Ersetzt man die entsprechenden Werte der Derivierten (für $z = 0$), so ist

$$i\{q_1A_1 + q_2A_2\}\sin(pt - \gamma) + f\{C_1 + C_2\}\sin(pt - \gamma) = 0$$

oder

$$-2q_1c + \left\{q_2 + \frac{m^2}{q_2}\right\}iH = 0.$$

Führt man nun hierin den Wert iH aus der Formel (78) ein und dividiert durch c, so erhält man

$$-2q_1q_2 + (q_2^2 + m^2)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right) = 0.$$

Digitized by Google

Aus der zweiten der Gleichungen (77) erhält man aber

$$q_2^2 + m^2 = 2m^2 - k^2p^2 = 2m^2\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right),$$

und aus der Gleichung (79)

$$q_1 q_2 = \left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right]^2 \cdot m^2.$$

Nach dem Einsetzen dieser Werte ergibt sich

$$-2\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right]^2 \cdot m^2 + 2m^2\left[1 - \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m^2}\right]^2 = 0,$$

d. h. Identität.

Also ist auch die zweite Grenzbedingung befriedigt.

Die dritte Grenzbedingung $T_1 = 0$ fordert, daß

$$\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0$$

ist. Ersetzt man die entsprechenden Werte der Derivierten (für $z = 0$), so findet man

$$g(C_1 + C_2)\sin(pt - \gamma) + i\,\{q_1 B_1 + q_2 B_2\}\sin(pt - \gamma) = 0$$

oder nach Division mit g

$$-2q_1q_2c + iH\,\{m^2 + q_2^2\} = 0.$$

Ersetzt man $q_1 q_2$, iH und $(m^2 + q_2^2)$ durch die entsprechenden früher abgeleiteten Größen, so ergibt sich

$$-2\left[1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}\right]^2 m^2 \cdot c + \left[1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}\right]\left[1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}\right]2cm^2 = 0.$$

Dieser Ausdruck ist ebenfalls identisch gleich Null.

Wir haben also festgestellt, daß die Ausdrücke für u, v und w, welche die Gleichungen (95) bestimmen, nicht nur die drei Grunddifferentialgleichungen der Bewegung, sondern auch die drei Grenzbedingungen für $z = 0$ befriedigen, folglich befriedigen sie alle Bedingungen der vorliegenden Aufgabe.

Aus diesen allgemeinen Ausdrücken erhält man auch, wenn man $z = 0$ setzt und die Beziehungen (92) berücksichtigt, die Gruppe der Formeln (94) für u, v und w an der Erdoberfläche:

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{f}{m}\Gamma_1 \sin(pt - \gamma) \\ v &= \frac{g}{m}\Gamma_1 \sin(pt - \gamma) \\ w &= \Gamma_2 \cos(pt - \gamma) \end{aligned}\right\}. \qquad (94)$$

Wir wollen nun irgendeine Richtung OM auf der Oberfläche nehmen, die den Winkel α mit der x-Achse bildet (siehe die vorhergehende Fig. 17).

Digitized by Google

Bei der Ableitung der Größen der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen haben wir gesehen, daß

$$\frac{f}{m} = \cos\alpha$$

$$\frac{g}{m} = \sin\alpha$$

ist, folglich fällt die horizontale Projektion s der Verschiebung des Punktes M mit der Richtung der Fortpflanzung der Oberflächenwellen zusammen, wobei $s = \sqrt{u^2 + v^2}$ ist.

Also

und

$$\left.\begin{aligned} s &= \Gamma_1 \sin(pt - \gamma) \\ w &= \Gamma_2 \cos(pt - \gamma) \end{aligned}\right\}. \tag{98}$$

Also befriedigen das Gesetz der harmonischen Schwingungen wie die horizontalen, so auch die vertikalen Projektionen der Verschiebung des Punktes M, aber zwischen diesen Bewegungen ist eine Phasendifferenz $\frac{\pi}{2}$ vorhanden, so daß, wenn z. B. s Maximum ist, w gleich Null ist und umgekehrt.

Die horizontale Verschiebung s fällt, wie wir gesehen haben, mit der Richtung der Fortpflanzung der seismischen Oberflächenwellen zusammen, die vertikale w ist aber zu dieser Richtung senkrecht. Wir haben folglich in diesem Falle etwa eine Überlagerung der Wellen zweier Typen — longitudinaler und transversaler, wobei sich im Gegensatz zu den Wellen, die sich durch die Tiefen der Erde fortpflanzen, diese Wellentypen längs der Oberfläche mit der konstanten Geschwindigkeit V fortpflanzen.

Γ_1 und Γ_2 stellen die Amplituden der entsprechenden Schwingungen dar; die Größen dieser Amplituden können aus den Formeln (91) bestimmt werden.

$$\left.\begin{aligned} \Gamma_1 &= \frac{1}{2}\frac{k^2p^2}{m}\cdot c \\ \Gamma_2 &= \frac{1 - \frac{k^2p^2}{2m^2}}{\sqrt{1 - \frac{k^2p^2}{m^2}}}\cdot \Gamma_1 \end{aligned}\right\} \tag{91}$$

Aus den Formeln (98) folgt, daß

$$\frac{s^2}{\Gamma_1{}^2} + \frac{w^2}{\Gamma_2{}^2} = 1,$$

d. h. die Teilchen der Oberfläche beschreiben beim Durchgang der seismischen Oberflächenwellen Ellipsen mit den Halbachsen Γ_1 und Γ_2.

Γ_1 und Γ_2 sind c proportional, das vorläufig willkürlich bleibt.

Suchen wir nun das Verhältnis dieser Halbachsen auf.

Digitized by Google

Aus der zweiten Formel (91) folgt, daß

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\sqrt{1 - \frac{k^2 p^2}{m^2}}}{1 - \frac{k^2 p^2}{2 m^2}}. \tag{99}$$

Wir haben aber schon früher gesehen, daß $\frac{p}{m} = V$ und $k^2 V^2 = \chi$ ist (Formel (80) und (81)), wo χ die Wurzel der kubischen Gleichung (82) ist, unter der Annahme $\sigma = \frac{1}{4}$ für die Poissonsche Konstante.

Folglich ist

$$\frac{k^2 p^2}{m^2} = \chi.$$

Für χ haben wir bei Annahme $\lambda = \mu$ die einzig mögliche Lösung gefunden

$$\chi = a = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right);$$

folglich ist

$$\frac{k^2 p^2}{m^2} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Setzt man diese Größe in die Formel (99) ein, so ergibt sich

$$\frac{\Gamma_1}{\Gamma_2} = \frac{\sqrt{1 - 2 + \frac{2}{\sqrt{3}}}}{1 - 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}} = 0{,}6812, \tag{100}$$

oder

$$\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 1{,}468.$$

Die Amplituden der wahren horizontalen und vertikalen Verschiebungen eines Punktes der Oberfläche stehen somit in einem konstanten Verhältnis zueinander, und zwar ist die Amplitude der horizontalen Verschiebung ungefähr 0,7 von der der entsprechenden vertikalen. Die Bewegung des Punktes M ist also in der vertikalen Richtung größer, als in der horizontalen. Dieses interessante Resultat ergibt sich aus unseren Grunddifferentialgleichungen der Bewegung unter der Annahme, daß die oberen Erdschichten isotrop sind. Im Falle der Anisotropie ergibt sich eine andere, etwas kleinere Größe für das Verhältnis $\frac{\Gamma_2}{\Gamma_1}$.

Die Richtigkeit dieser Formel konnte noch nicht empirisch bestätigt werden, denn in der Nähe der Epizentra von Beben ist noch kein genügend zuverlässiges Beobachtungsmaterial gesammelt worden, aus dem man die Größe der wahren Amplitude der horizontalen und vertikalen Verschiebung eines Punktes der Oberfläche bestimmen könnte. Die Beobachtungen entfernterer Stationen hierfür zu benutzen, die mit zuverlässigen Seismographen versehen sind, gestaltet sich recht kompliziert.

Digitized by Google

Denn mit der Zunahme der Distanz vom Epizentrum ändert sich die Energie der schwingenden Bewegung, und zwar zunächst deswegen, weil die Energie der Oberflächenwellen sich kreisförmig nach allen Seiten verbreitet, dann aber auch infolge des unvermeidlichen Einflusses der Dämpfung, wobei der Dämpfungskoeffizient für die horizontalen und vertikalen Schwingungen verschieden sein kann. Außerdem scheint sich bei dem Laufe der seismischen Wellen längs der Oberfläche mit der weiteren Entfernung vom Epizentrum auch die Periode der Schwingungen zu verändern. Alle diese Fragen sind noch nicht genügend erforscht worden, und deshalb konnte eine genauere Prüfung der Formel (100) noch nicht durchgeführt werden. Einige neuere Angaben in dieser Frage sind am Ende des VIII. Kapitels angeführt.

Zum Schluß wollen wir noch untersuchen, wie sich die Energie der seismischen Oberflächenwellen mit der Entfernung Δ des gegebenen Punktes vom Epizentrum verändert und wie man aus den Beobachtungen den Dämpfungskoeffizienten der seismischen Oberflächenenergie bestimmen kann.

Wir wollen den Fall der horizontalen Schwingungen betrachten.

Bezeichnen wir mit a die wahre Amplitude der horizontalen Verschiebung des Punktes der Oberfläche, mit T die entsprechende Periode der Schwingungen, so erhalten wir nach Formel (35) den folgenden Ausdruck für die entsprechende Größe der Energie I:

$$I = 2\pi^2 C \cdot \frac{a^2}{T^2}, \tag{35}$$

wo C ein Proportionalitätsfaktor ist.

Der Distanz Δ bis zum Epizentrum entspricht der Bogen des größten Kreises ϑ, wo

$$\vartheta = \frac{\Delta}{R}.$$

R ist der Erdradius gleich 6371 km.

Alle Punkte der Oberfläche der Erde, die in einer und derselben Entfernung Δ vom Epizentrum sich befinden, liegen auf der Peripherie eines Kreises, dessen Radius

$$r = R \sin \vartheta \tag{101}$$

ist. Hieraus folgt, unter Vernachlässigung der Dämpfung, daß für die verschiedenen Epizentralentfernungen Δ, Δ_1, Δ_2 usw.

$$Ir = I_1 r_1 = I_2 r_2 = \text{const.} = A$$

oder

$$I = \frac{A}{r}, \quad I_1 = \frac{A}{r_1}, \quad I_2 = \frac{A}{r_2} \text{ usw.}$$

ist. Hier erscheint r im Nenner in der ersten Potenz, und nicht im Quadrat, wie es der Fall ist bei der Fortpflanzung der Wellen aus einem Zentrum nach allen möglichen Richtungen im Raume.

Digitized by Google

r ist Maximum und I Minimum, wenn $\vartheta = 90^0$ ist; mit der weiteren Zunahme von Δ und ϑ wird r von neuem abnehmen und in der Antipode des Epizentrums oder in dem sogenannten Antiepizentrum konzentriert sich die seismische Energie von neuem; wenn keine Dämpfung vorhanden wäre, so müßte im Antiepizentrum ein ebenso starkes Beben stattfinden, wie im Epizentrum selbst.

Aus dem Antiepizentrum verbreiten sich die Wellen von neuem nach allen Seiten, nach Verlauf eines bestimmten Zeitraums konzentrieren sie sich dann wiederum im Epizentrum usw.

Die Energie im Antiepizentrum ist jedoch infolge des Einflusses der Dämpfung bedeutend schwächer, als im Epizentrum.

Führt man die Dämpfung ein, so muß man setzen

$$I = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k\Delta}, \tag{102}$$

wo I_0 eine Konstante ist.

In diesen und den analogen Formeln kann man übrigens nicht bis zu $r = 0$ gehen, denn die Energie kann niemals in einem mathematischen Punkte konzentriert sein; nur der Einfachheit der Erwägungen halber haben wir das Epizentrum mit einem Punkte verglichen.

Ist die Größe I für zwei Stationen in verschiedenen Entfernungen Δ vom Epizentrum bekannt, so kann man den Dämpfungskoeffizienten der seismischen Oberflächenenergie k bestimmen.

Zu diesem Zweck können auch die Beobachtungen einer und derselben Station dienen, wenn das Beben genügend stark ist und wenn auf dem Seismogramm außer den W_1-Wellen, die aus dem Epizentrum auf dem kürzesten Wege gekommen sind, auch noch die W_2-Wellen aufgezeichnet sind, die also den Beobachtungsort nach dem Umlaufen des Erdkörpers über das Antiepizentrum erreicht haben.

Bezeichnen a_1, T_1 und I_1 die Amplitude, die Periode und die Energie eines scharf ausgeprägten Maximums in der Hauptphase des Erdbebens für W_1-Wellen, und a_2, T_2 und I_2 die entsprechenden Größen für dasselbe Maximum in den W_2-Wellen, wo T_2, wie schon vorher bemerkt, sich von T_1 unterscheiden kann, so ergibt sich

$$I_1 = 2\pi^2 C \frac{a_1^2}{T_1^2} = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k\Delta}$$

$$I_2 = 2\pi^2 C \cdot \frac{a_2^2}{T_2^2} = \frac{I_0}{r} \cdot e^{-k(40000-\Delta)},$$

weil r jetzt dasselbe, der Weg aber, den die W_2-Wellen zurückgelegt haben, gleich $(40000 - \Delta)$ km ist.

Denn es ist ja für die W_1-Wellen

$$r = R \sin\frac{\Delta}{R},$$

und für die W_2-Wellen

$$r = R \sin\frac{40000 - \Delta}{R} = R \sin\left\{2\pi - \frac{\Delta}{R}\right\} = -R \sin\frac{\Delta}{R}.$$

Digitized by Google

Es ist somit nur der absolute Wert von r von Bedeutung.

Wir finden

$$\left(\frac{a_1}{a_2}\right)^2 \cdot \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = e^{k(40000-2\Delta)}$$

oder

$$k = \frac{2}{\operatorname{Lg}_{10} e} \cdot \frac{\operatorname{Lg}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) - \operatorname{Lg}\left(\frac{T_1}{T_2}\right)}{40000 - 2\Delta}, \tag{103}$$

wo

$$\operatorname{Lg}_{10} e = M = 0{,}43429.$$

Beobachtet man a_3 und T_3 für die W_3-Wellen, welche durch den Beobachtungsort gegangen sind und nochmals die Erdkugel umkreist haben, so erhält man

$$k = \frac{2}{\operatorname{Lg}_{10} e} \cdot \frac{\operatorname{Lg}\left(\frac{a_1}{a_3}\right) - \operatorname{Lg}\left(\frac{T_1}{T_3}\right)}{40000}. \tag{104}$$

In diesem Fall brauchen wir also Δ gar nicht zu kennen.

Nach diesen Formeln kann man den Dämpfungskoeffizienten k der seismischen Oberflächenenergie bestimmen.

Für diesen ergab sich für die meridianale Horizontalkomponente der Bodenverschiebung aus den Beobachtungen in Pulkovo:

beim Messina-Beben 28./XII. 1908 $k = 0{,}00027$,

„ Island-Beben 22./I. 1910 $k = 0{,}00028$,

wobei die Entfernung Δ in Kilometern auszudrücken ist.

Die Übereinstimmung dieser Größen k ist völlig genügend.

Wir nehmen $k = 0{,}00028$ und stellen uns nun die Frage: In welcher Entfernung vom Epizentrum wird die seismische Oberflächenenergie infolge der Dämpfung um die Hälfte abnehmen?

Es muß dann sein

$$e^{-0{,}00028 \cdot \Delta} = \frac{1}{2}.$$

Hieraus finden wir

$$\Delta = 2476 \text{ km}.$$

In Wirklichkeit wird I in dieser Entfernung noch kleiner, denn $r = R \sin \frac{\Delta}{R}$ wird zunehmen.

Für das Antiepizentrum ist $\Delta = 20000$ km und

$$e^{-0{,}00028 \cdot 20000} = \frac{1}{270}.$$

In diesem letzten Falle kommt der Einfluß von r nicht zur Geltung.

Diese Zahlenbeispiele geben eine anschauliche Vorstellung von dem Einflusse der Dämpfung auf die Abnahme der Energie der seismischen Oberflächenwellen mit der Entfernung.

Es ist übrigens auch möglich, daß der Dämpfungskoeffizient k eine gewisse Abhängigkeit von der Periode der entsprechenden Oberflächenwelle besitzt, eine Frage, die noch völlig unerforscht ist.

Digitized by Google

Drittes Kapitel.

Die seismischen Strahlen.

§ 1. Die Ableitung der Grundgleichungen.

Im vorhergehenden Kapitel haben wir gesehen, daß von dem Bebenherde oder dem Hypozentrum aus sich nach allen Seiten seismische Wellen zweierlei Art verbreiten, nämlich longitudinale und transversale, die sich mit verschiedenen Geschwindigkeiten fortpflanzen und die, wenn sie die Oberfläche wieder erreichen, in den oberen Erdschichten Schwingungen hervorrufen. In der Nähe des Epizentrums sind diese Schwingungen zuweilen so bedeutend, daß sie nicht nur unmittelbar von den Menschen gefühlt werden, sondern auch mehr oder weniger große Zerstörungen veranlassen. Daß in den vom Epizentrum entfernteren Gebieten solche Schwingungen ebenfalls vorhanden sind, ergeben die Aufzeichnungen empfindlicher Seismographen.

Statt die Fortpflanzung der seismischen Wellen zu betrachten, ist es zweckmäßiger und anschaulicher, wie in der Optik, die Fortpflanzung der seismischen Strahlen zu untersuchen, wobei wir unter den seismischen Strahlen ein System von Normalen zu der gegebenen Wellenfläche verstehen. Der seismische Strahl ist also in einem jeden Punkte die Senkrechte zu dem entsprechenden Flächenelement der seismischen Welle.

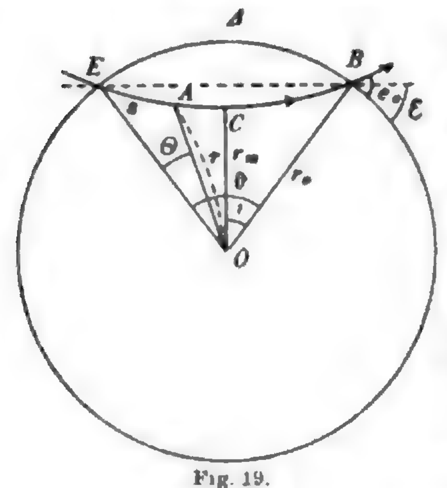


Fig. 19.

Gleich wie die seismischen Wellen in zwei Arten zerfallen, in longitudinale und transversale, so können auch die seismischen Strahlen longitudinale und transversale sein. Im ersten Falle fällt die Richtung der Verschiebung des Punktes mit der Richtung des Strahles selbst zusammen.

Wir werden hier nur den Fall longitudinaler seismischer Strahlen betrachten, denn die Untersuchung, die wir im folgenden anstellen werden, kann in gleicher Weise auch bei den transversalen Strahlen durchgeführt werden.

Der Einfachheit halber wählen wir den Beobachtungsort B (Fig. 19) in einer ziemlich großen Entfernung Δ vom Epizentrum, damit wir annehmen können, daß der Herd des Erdbebens, welcher niemals tief liegt, mit dem Epizentrum praktisch zusammenfällt.

Die seismischen Strahlen aus E pflanzen sich nun ins Innere der Erde fort. Wir stehen jetzt vor der Frage, auf welchem Wege der seismische Strahl von E nach B gelangt.

Digitized by Google

Wäre der Erdball völlig homogen, so würde der seismische Strahl sich längs des kürzesten Weges, d. h. längs der Geraden EB bewegen. Da aber die elastischen Eigenschaften und die Dichte der verschiedenen Erdschichten, welche die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Strahles bestimmen, von der Tiefe der Schicht abhängen, so wird der seismische Strahl beim Eindringen in die tieferen Erdschichten seine geradlinige Richtung nicht beibehalten, sondern etwa die krummlinige Trajektorie ECB beschreiben.

Unsere erste Aufgabe besteht nun darin, diese Trajektorie des seismischen Strahles zu finden.

Diese Aufgabe wird mit Hilfe eines allgemeinen Naturprinzips, nämlich des Prinzips der Brachystochrone oder des Fermatschen Satzes gelöst, nach welchem ein von dem Punkte E nach dem Punkt B sich fortpflanzender Strahl die Bahn verfolgt, auf welcher er am schnellsten zum Ziel gelangt.

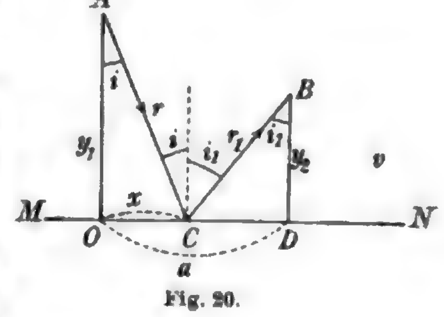


Fig. 20.

Nach dem Prinzip der Brachystochrone kann man bekanntlich auch in sehr einfacher Weise die verschiedenen Gesetze der geometrischen Optik ableiten. Ohne weiteres folgt schon daraus die geradlinige Fortpflanzung des Lichts in einem gleichartigen und isotropen Medium, in dem die Geschwindigkeit der Fortpflanzung des Strahles überall gleich und somit die Gerade die kürzeste Entfernung zwischen zwei Punkten ist. Ebenso lassen sich daraus leicht die Gesetze der Reflexion und der Brechung des Lichtes ableiten, wie im folgenden kurz geschehen soll.

Es sei MN die Ebene, von welcher der Strahl reflektiert wird.

Der Strahl kommt von A nach der Reflexion bei MN nach B, wobei er sich stets mit derselben Geschwindigkeit fortpflanzt.

Es wird verlangt den Weg des Strahles zu bestimmen, oder anders ausgedrückt, den Punkt C zu finden, in welchem die Reflexion stattfindet.

Es seien die Koordinaten des Punktes A O und y_1, des Punktes B a und y_2, und des Punktes C x und O.

Dann ist

$$AC = r = \sqrt{x^2 + y_1^2}$$

$$CB = r_1 = \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}.$$

Die Zeit τ, die der Strahl nötig hat, um von A nach B, unter der Bedingung der Reflexion bei der Ebene MN, zu kommen, kann also ausgedrückt werden durch

$$\tau = \frac{1}{v}\left[\sqrt{x^2 + y_1^2} + \sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}\right].$$

Das Prinzip der Brachystochronen verlangt, daß τ ein Minimum ist, also

$$\frac{d\tau}{dx} = 0.$$

Digitized by Google

Aus dieser Bedingung läßt sich die entsprechende Größe x bestimmen. Es ist

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{(a - x)}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}} = 0$$

oder

$$\frac{x}{r} = \frac{a - x}{r_1}.$$

Es ist aber $\frac{x}{r} = \sin i$, wo i der Sinus des Einfallswinkels, und $\frac{a - x}{r_1} = \sin i_1$, wo i_1 der Sinus des Reflexionswinkels ist, folglich ist

$$\sin i = \sin i_1$$

oder

$$i = i_1.$$

Wir erhalten also das bekannte Gesetz der Reflexion.

Wir betrachten nun die Erscheinung der Brechung.

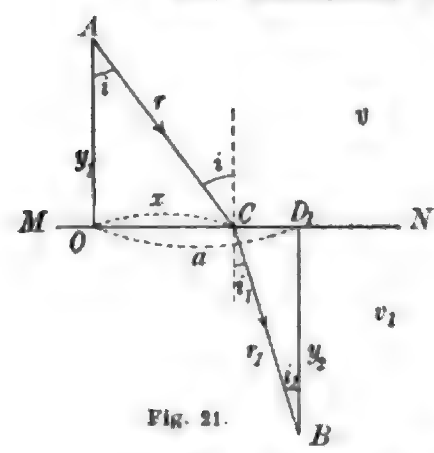


Fig. 21.

Es bezeichne MN (Fig. 21) die Trennungsebene der zwei Medien, für welche die entsprechenden Geschwindigkeiten der Fortpflanzung des Strahles v und v_1 sind.

Die Punkte A und B sind gegeben. Die Koordinaten derselben sind in Figur 21 bezeichnet.

Der Strahl kommt aus A und erreicht nach der Brechung den Punkt B. Wir wollen wiederum die Lage des Punktes C, in welchem die Erscheinung der Brechung vor sich geht, aufsuchen.

Die Zeit, die der Strahl zur Fortbewegung von A bis B nötig hat, ist

$$\tau = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v} + \frac{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}}{v_1}.$$

Das Prinzip der Brachystochrone verlangt wiederum, daß $\frac{d\tau}{dx} = 0$ ist. Also

$$\frac{1}{v} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y_1^2}} - \frac{1}{v_1} \cdot \frac{a - x}{\sqrt{(a - x)^2 + y_2^2}} = 0,$$

oder

$$\sin i = \frac{v}{v_1} \sin i_1. \qquad (1)$$

Wir erhalten damit das bekannte Brechungsgesetz, wobei der relative Brechungsexponent, wie wir sehen, nichts anderes ist, als das Verhältnis der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten des gegebenen Strahles in diesen zwei Medien.

Auf den Fermatschen Satz wollen wir uns ebenfalls im folgenden bei der Untersuchung der Fortpflanzung der seismischen Strahlen im Innern des Erdballs stützen.

Digitized by Google

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit eines seismischen Strahles hängt von den elastischen Eigenschaften und der Dichte der entsprechenden Schichten der Erde ab.

Für die longitudinalen Wellen haben wir

$$v = V_1 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{E}{\varrho}},$$

und für die transversalen

$$v = V_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{E}{\varrho}}$$

(s. die Formeln (37) und (38) des vorhergehenden Kapitels).

σ können wir mit genügender Genauigkeit gleich $\frac{1}{4}$ setzen.

Die Beobachtungen lehren, daß wie V_1, so auch V_2 im Erdinnern mit wachsender Tiefe (wenigstens für die oberen Schichten der Erde) zunimmt, woraus wir schließen können, daß der Modul der Längenelastizität E schneller zunimmt, als die Dichte ϱ, denn die Größe σ ist nur unbedeutenden Veränderungen unterworfen.

Daraus folgt, daß die Trajektorie des seismischen Strahles, der von E ausgegangen und nach B gekommen ist (Fig. 19), ihre Wölbung dem Erdzentrum zuwendet.

Es fordert dieses das Fermatsche Prinzip.

Setzen wir, wie auch früher, voraus, daß die physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Erdschichten nur von der Entfernung r der entsprechenden Schicht vom Erdzentrum abhängen, so können wir annehmen, daß die Geschwindigkeit des Strahles nur eine Funktion von r ist.

Zur Bequemlichkeit der weiteren Ableitungen führen wir anstatt der Geschwindigkeit des Strahles v die umgekehrte Größe dieser Geschwindigkeit n ein.

$$n = \frac{1}{v}. \tag{2}$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formel (1) ein, so ergibt sich

$$n \sin i = n_1 \sin i_1. \tag{3}$$

Nach der Analogie mit der Optik können wir n den Brechungsexponenten der entsprechenden Erdschicht nennen.

n ist ebenfalls eine Funktion von r.

$$n = F(r). \tag{4}$$

Setzen wir voraus, daß diese Funktion bestimmt ist, und beschäftigen wir uns mit der Bestimmung der Trajektorie des seismischen Strahles im Innern der Erde.

Wir nehmen zur Bestimmung der Lage irgendeines veränderlichen Punktes A der Trajektorie ECB (Fig. 19) die Polarkoordinaten r und θ.

Bezeichnen wir die Distanz (in Kilometern) zwischen dem Epizentrum E und dem Beobachtungsort B längs des größten Kreises gemessen mit Δ und den entsprechenden Winkel im Zentrum EOB mit ϑ.

Digitized by Google

Dann ist

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}, \tag{5}$$

wo r_0 der Erdradius und der Winkel ϑ im absoluten Maß d. h. in Teilen des Radius ausgedrückt ist.

Für die vorliegende Trajektorie ECB ist r eine Funktion von θ.

Wir setzen

$$r = \Phi(\theta). \tag{6}$$

Die Aufgabe besteht darin, den Ausdruck der Funktion $\Phi(\theta)$ zu finden, wenn wir n als Funktion von r kennen.

Bezeichnet man die Bogenlänge EA mit s, so ist leicht zu sehen (Fig. 22), daß

$$ds = \sqrt{(dr)^2 + (r\,d\theta)^2}$$

oder

$$ds = d\theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \tag{7}$$

ist. Die Zeit $d\tau$, die zum Durchlaufen der Distanz ds erforderlich ist, ist

$$d\tau = \frac{ds}{v} = n\,ds = F(r)\,ds$$

oder

$$d\tau = F(r) \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta.$$

Die Zeit, die nötig ist, damit der Strahl die ganze Distanz von E bis B zurücklegt, ist

$$\tau = \int_0^{\vartheta} F(r) \cdot \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot d\theta. \tag{8}$$

Das Prinzip der Brachystochrone verlangt, daß τ ein Minimum ist. Also haben wir die Aufgabe, bei der angegebenen Funktion $F(r)$ für r in seiner Abhängigkeit von θ eine solche Funktion $\Phi(\theta)$ zu finden, für welche das bestimmte Integral (8) ein Minimum ist.

Fig. 22.

Mit der Lösung solcher Aufgaben beschäftigt sich die Variationsrechnung. Die Lösung dieser Aufgabe führt zu einer Differentialgleichung, die die Differentialgleichung der gesuchten Trajektorie des seismischen Strahles darstellt.

Wir werden jedoch diesen Weg nicht einschlagen, sondern die Differentialgleichung des Strahles nach einer einfacheren Methode ableiten.

Zu diesem Zweck teilen wir den Erdball in eine Reihe sehr dünner konzentrischer Schichten mit den Radien $OA = r$, $OA_1 = r_1$, $OA_2 = r_2$ usw. (Fig. 23).

Es sei die mittlere Größe des Brechungsexponenten in der Schicht zwischen r und r_1 mit n bezeichnet, in der Schicht zwischen r_1 und r_2 mit n_1.

Digitized by Google

Wir nehmen die Dicke der Schichten so gering, daß der Teil der Trajektorie des Strahles, z. B. AA_1, welcher zwischen den zwei Kugelflächen eingeschlossen ist, als eine Gerade betrachtet werden kann; dann gehen wir zur Grenze über.

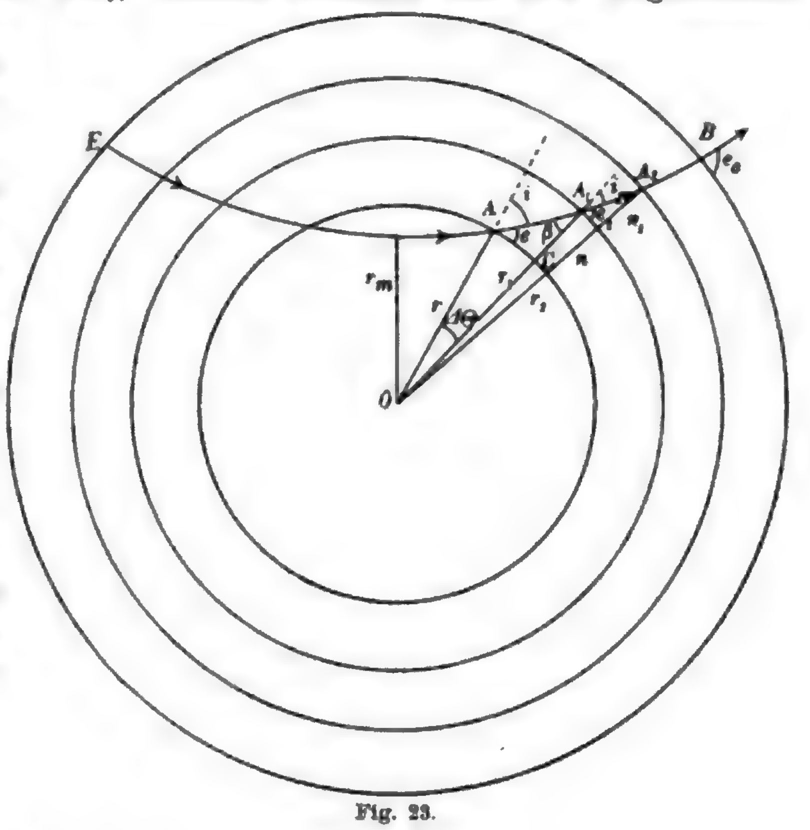


Fig. 23.

An der Oberfläche mit dem Radius r_1 im Punkte A_1 ist der Einfallswinkel β und der Brechungswinkel i_1; folglich haben wir auf Grund der Formel (3)

$$n_1 \sin i_1 = n \sin\beta. \quad (9)$$

Den Winkel, den die Richtung des Strahles mit der entsprechenden Oberfläche bildet, bezeichnen wir mit e_1.

Dann ist

$$e_1 = 90 - i_1.$$

Für die Schicht mit dem Radius $OA = r$ seien die entsprechenden Größen i und e (Fig. 23).

Bezeichnet man ferner den Winkel am Zentrum O zwischen den Richtungen OA und OA_1 mit $\Delta\theta$, so ergibt sich aus dem Dreieck OAA_1

$$i = \beta + \Delta\theta.$$

Setzt man noch

$$i_1 = i + \Delta i$$

und

$$n_1 = n + \Delta n$$

und führt diese Größen in die Formel (9) ein, so erhält man

$$(n + \Delta n)\sin(i + \Delta i) = n\sin(i - \Delta\theta).$$

Wir gehen nun zur Grenze über.

Dann ist

$$(n + dn)(\sin i + di \cdot \cos i) = n\sin i - n \cdot d\theta \cdot \cos i$$

oder

$$\sin i \cdot dn + n\cos i \cdot di + n\cos i \cdot d\theta = 0,$$

oder noch

$$d(n\sin i) + n\cos i \cdot d\theta = 0. \quad (10)$$

Andererseits folgt aus dem Dreieck AA_1C, daß

$$r_1 - r = dr = rd\theta \cdot \operatorname{tg} e = rd\theta \cdot \operatorname{cotg} i.$$

Digitized by Google

Folglich

$$d\theta \cdot \cos i = \frac{dr}{r} \cdot \operatorname{tg} i \cdot \cos i = \frac{dr}{r} \cdot \sin i.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (10) ein, so erhält man

$$r \cdot d(n \sin i) + n \sin i \cdot dr = 0$$

oder

$$d(nr \sin i) = 0.$$

Ersetzt man in diesem Ausdrucke $\sin i$ durch $\cos e$, so erhält man die endgültige sehr einfache Beziehung:

$$d(nr \cos e) = 0$$

oder

$$nr \cos e = \text{const.} \tag{11}$$

Längs der ganzen Trajektorie des seismischen Strahles muß also das Produkt dieser drei Größen konstant bleiben.

Diese Größe läßt sich aus den Bedingungen, welche an der Oberfläche herrschen, ermitteln.

Die Werte dieser drei Größen r, n und e bezeichnen wir an der Oberfläche durch den Index $_0$.

Dann sind

r_0 der Radius der Erdkugel,

n_0 die reziproke Größe der Geschwindigkeit des seismischen Strahles in den obersten Erdschichten (v_0),

und

e_0 der Austrittswinkel des seismischen Strahles, oder der Winkel, der von dem aus dem Erdinnern ankommenden Strahl mit der Horizontalebene des Beobachtungsortes gebildet wird.

Dieser Winkel hat in der Theorie eine besonders wichtige Bedeutung. Er wird der Emergenzwinkel genannt.

Wir haben also den Ausdruck

$$nr \cos e = n_0 r_0 \cos e_0. \tag{12}$$

Aus der Formel (12) können wir sofort die Differentialgleichung der Trajektorie des seismischen Strahles erhalten.

Aus Fig. 22 sieht man, daß

$$ds \cos e = r d\theta$$

oder auf Grund der Formel (7)

$$\sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} \cdot \cos e = r.$$

Hieraus finden wir

$$\cos^2 e \cdot r^2 + \cos^2 e \cdot \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 = r^2$$

oder

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\cos e}{\sqrt{r^2 - r^2\cos^2 e}}.$$

Ersetzt man in dieser Formel $\cos e$ durch die entsprechende Größe aus Formel (12), so ergibt sich

$$d\theta = \frac{\frac{n_0 r_0 \cos e_0}{n r} dr}{\sqrt{r^2 - r^2 \frac{n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}{n^2 r^2}}} = \frac{n_0 r_0 \cos e_0 \, dr}{r\sqrt{n^2 r^2 - n_0^2 r_0^2 \cos^2 e_0}}. \tag{13}$$

Wir wollen nun r und n in Teilen der entsprechenden Größen an der Oberfläche der Erde ausdrücken und dementsprechend setzen

$$\varrho = \frac{r}{r_0}, \tag{14}$$

$$\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v}. \tag{15}$$

ν ist eine Funktion von ϱ, welche von den physikalischen Eigenschaften der verschiedenen Erdschichten abhängt

$$\nu = f(\varrho), \tag{16}$$

wo ν mit der Zunahme von ϱ im allgemeinen zunimmt, d. h. $\frac{\partial \nu}{\partial \varrho} > 0$. Es ist jedoch die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß $f(\varrho)$ in bedeutenden Tiefen eine abnehmende Funktion ist.

Führt man diese Bezeichnungen ein und setzt

$$\cos e_0 = \alpha, \tag{17}$$

so nehmen die Formeln (12) und (13) folgende Gestalt an:

$$\nu\varrho \cos e = \alpha \tag{18}$$

$$d\theta = \frac{\alpha \, d\varrho}{\varrho\sqrt{\nu^2\varrho^2 - \alpha^2}}. \tag{19}$$

Aus dieser Gleichung kann man die Beziehung zwischen θ und ϱ, d. h die Gleichung der Trajektorie des seismischen Strahles bestimmen, wenn ν als Funktion von ϱ bekannt ist.

Das Produkt $\nu\varrho$ ist ebenfalls eine Funktion von ϱ, die wir mit $\varphi(\varrho)$ bezeichnen wollen

$$\nu\varrho = \varphi(\varrho). \tag{20}$$

Die Funktion $\varphi(\varrho)$ nennen wir die kritische Funktion, weil sie am meisten die Form der Trajektorie des Strahles bestimmt.

Also

$$d\theta = \frac{\alpha \, d\varrho}{\varrho\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}}. \tag{21}$$

Digitized by Google

Der seismische Strahl, der von E ausging und der nach B geht (Fig. 19), dringt immer weiter und weiter ins Innere der Erde ein, erreicht endlich die größte Tiefe, die dem kleinsten Werte $\varrho = \varrho_m$ entspricht und pflanzt sich dann auf der zweiten Hälfte des Weges vollständig symmetrisch zur ersten fort.

Es ist leicht zu sehen, daß für $\varrho = \varrho_m$ der Winkel $e = 0$ ist; folglich nach den Formeln (18) und (20)

$$v_m \varrho_m = \varphi(\varrho_m) = \alpha. \tag{22}$$

Bezeichnen wir den Winkel im Zentrum, der der Epizentraldistanz Δ entspricht, mit ϑ:

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0}, \tag{23}$$

und berücksichtigen, daß auf der Oberfläche $v = 1$ und $\varrho = 1$ ist, so erhalten wir durch Integration des Ausdruckes (21)

$$\Delta = 2 r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = \Phi_1(\alpha). \tag{24}$$

Es entspricht also der angegebenen Größe α oder dem angegebenen Emergenzwinkel e_0 eine ganz bestimmte Epizentralentfernung Δ. Wir können somit α als einen variablen Parameter auffassen.

An der unteren Grenze des vorhergehenden Integrals wird die Integralfunktion auf Grund der Beziehung (22) unendlich, aber das bestimmte Integral selbst bleibt endlich, wie aus der Sache selbst folgt; wir werden die Richtigkeit noch an einem besonderen Beispiele beweisen.

Wir wollen nun die Länge L der Trajektorie des seismischen Strahles bestimmen.

$$L = \int ds,$$

$$ds = \frac{r d\theta}{\cos e}$$

oder auf Grund der Formeln (18) und (14)

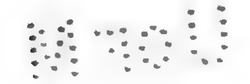
$$ds = \frac{v\varrho}{\alpha} \cdot r d\theta = \frac{r_0}{\alpha} \cdot v \varrho^2 d\theta. \tag{25}$$

Ersetzen wir jetzt in diesem Ausdruck $d\theta$ durch die entsprechende Größe aus der Formel (21) und integrieren die erhaltene Gleichung in denselben Grenzen, so erhalten wir

$$L = 2 r_0 \int_{\varrho_m}^{1} \frac{v \varrho d\varrho}{\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}}. \tag{26}$$

Die Zeit, die der Strahl nötig hat, um von E nach B zu kommen, läßt sich leicht nach der Formel ermitteln

$$T = \int \frac{ds}{v} = \int n\, ds = n_0 \int v\, ds.$$



Digitized by Google

Mit Rücksicht auf die Formeln (25) und (21) können wir dafür schreiben

$$T = 2n_0 r_0 \int_{\varrho_m}^{1} \frac{v^2 \varrho\, d\varrho}{\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = \Phi_2(\alpha). \tag{27}$$

Wie wir sehen, kann also auch T als eine Funktion desselben Parameters α betrachtet werden.

Wäre $v = f(\varrho)$ bekannt, was vorläufig nicht zutrifft, so könnten wir die Zeit ausrechnen, die der Strahl braucht, um von E nach B zu gelangen.

Eins wissen wir jedoch mit Sicherheit, daß nämlich längs der Trajektorie, welche die Differentialgleichung (21) bestimmt, T ein Minimum sein muß.

Wir wollen nun noch den Krümmungsradius des seismischen Strahles in einem willkürlichen Punkte A (Fig. 23) bestimmen. Diesen Krümmungsradius bezeichnen wir mit R. Dann ist $\frac{1}{R}$ das, was man Krümmung der betreffenden Kurve in einem gegebenen Punkte nennt.

Der Krümmungsradius läßt sich bekanntlich folgendermaßen bestimmen.

Man nimmt zwei unendlich nahe Punkte auf der Kurve in einer Entfernung ds voneinander und bestimmt den Winkel $d\omega$ zwischen den entsprechenden Tangenten.

Dann ist

$$\frac{1}{R} = \frac{d\omega}{ds}. \tag{28}$$

R ist der Radius des Berührungskreises.

Nach Fig. 23 haben wir

$$n \sin \beta = n_1 \sin i_1 \quad \text{(siehe Formel (9))}.$$

Da

$$v_1 < v$$

ist, so ist

$$n_1 > n$$

und folglich

$$\beta > i_1.$$

Die Differenz zwischen β und i_1 können wir an der Grenze als Differenz der Winkel zwischen zwei unendlich nahen Tangenten betrachten, denn β und i_1 sind Winkel, welche zwei geradlinige Stücke der Trajektorie AA_1 und A_1A_2 mit der Geraden OA_1 bilden.

Folglich ist

$$\beta = i_1 + d\omega.$$

Setzt man diese Größe in den vorhergehenden Ausdruck ein, so erhält man

$$\sin(i_1 + d\omega) = \frac{n_1}{n} \sin i_1 = \frac{n + dn}{n} \sin i_1$$

Digitized by Google

oder

$$\cos i_1 \, d\omega = \frac{dn}{n} \sin i_1 ,$$

oder noch

$$d\omega = \frac{1}{n} \cdot \operatorname{tg} i_1 \, dn .$$

Da die Winkel i_1 und i sich voneinander um eine unendlich kleine Größe unterscheiden, so ergibt sich, da der Winkel $i = 90^0 - e$ ist,

$$d\omega = \frac{dn}{n} \cdot \operatorname{cotg} e$$

oder

$$d\omega = \frac{1}{n} \operatorname{cotg} e \cdot \frac{dn}{dr} \cdot dr .$$

Da aber

$$n = \nu n_0$$

und

$$r = \varrho r_0 ,$$

so erhalten wir endgültig

$$d\omega = \frac{1}{\nu} \cdot \operatorname{cotg} e \cdot \frac{d\nu}{d\varrho} d\varrho . \tag{29}$$

Andererseits ist in dem Dreieck $A A_1 C$

$$dr = r_0 d\varrho = ds \cdot \sin e$$

oder

$$ds = \frac{r_0 \, d\varrho}{\sin e} . \tag{30}$$

Führt man diese Ausdrücke in die Formel (28) ein, so ergibt sich schließlich

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0 \nu} \cdot \frac{d\nu}{d\varrho} \cos e . \tag{31}$$

Diese Formel zeigt, daß $\frac{d\nu}{d\varrho} = 0$ und $R = \infty$ ist, wenn die physikalischen Eigenschaften der Erdschichten mit der Tiefe sich nicht verändern. In diesem Falle ist die Trajektorie des seismischen Strahles eine Gerade.

Im Punkte der größten Tiefe, wo $\varrho = \varrho_m$ und $e = 0$ ist, ist

$$\frac{1}{R_m} = \frac{1}{r_0 \nu_m} \cdot \left(\frac{d\nu}{d\varrho}\right)_{\varrho = \varrho_m} .$$

Nach der Ableitung dieser Grundformeln für die seismischen Strahlen wollen wir zu ihrer Anwendung übergehen.

§ 2. **Die Laufzeitkurve.**

Im vorhergehenden Paragraphen hatten wir folgende Formeln:

$$\Delta = \Phi_1(\alpha) \quad \text{(Formel (24))}$$

und

$$T = \Phi_2(\alpha) \quad \text{(Formel (27))},$$

wo α ein variabler Parameter ist, der den cos des Emergenzwinkels darstellt.

Digitized by Google

Eliminiert man aus diesen Gleichungen α, so ergibt sich T als eine Funktion von Δ:

$$T = \Psi(\Delta). \tag{32}$$

Unterscheidet man diese Größen für longitudinale und transversale seismische Wellen durch die Indizes 1 und 2, so hat man

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= \Psi_1(\Delta) \\ T_2 &= \Psi_2(\Delta) \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Wir sehen also, daß mit der Zunahme der Epizentraldistanz Δ, immer längs der Erdoberfläche und zwar längs des größten Kreises gemessen, auch die Laufzeit der longitudinalen und transversalen Wellen zunimmt.

Da die longitudinalen Wellen sich in allen Schichten schneller fortpflanzen als die transversalen, so erreichen sie zuerst den Beobachtungsort und veranlassen die erste Ablenkung des Seismographen. Der entsprechende Moment heißt der Moment des Anfanges der ersten Vorphase des Erdbebens.

Dieser Anfang wird mit dem Buchstaben P (undae primae) bezeichnet.

Nach Verlauf eines gewissen Zeitraumes kommen die transversalen Wellen an. Der Anfang dieser zweiten Vorphase des Erdbebens wird mit dem Buchstaben S (undae secundae) bezeichnet.

Je weiter das Epizentrum entfernt ist, d. h. je größer Δ ist, desto größer wird die Differenz

$$T_2 - T_1 = \Psi_2(\Delta) - \Psi_1(\Delta). \tag{34}$$

Wenn wir Δ als Abszisse und die zugehörigen Zeiten T als Ordinaten auftragen, so ergeben die Schnittpunkte die sogenannte Laufzeitkurve oder den Hodographen.

Die Gestalt der Laufzeitkurve hängt ganz von den Gesetzen der Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen V_1 und V_2 mit der Tiefe ab oder von der Form der Funktion

$$v = f(\varrho) \quad \text{(Formel (16))}.$$

Man kann jedoch die Laufzeitkurve auch direkt aus den Beobachtungen ermitteln.

Dazu müssen wir die Zeit des Anfangs des Erdbebens im Epizentrum und die Momente des Eintreffens der longitudinalen und transversalen Wellen, die durch die Tiefen der Erde gehen, an den in verschiedenen Entfernungen Δ vom Epizentrum liegenden seismischen Stationen kennen.

Solche Kurven sind von Wiechert und Zöppritz[8]) aus einer großen Reihe Beobachtungen vieler Erdbeben abgeleitet worden. Fig. 24 gibt ein Bild derselben.

Auf der Abszissenachse sind die Epizentraldistanzen in Megametern, d. h. in 1000 Kilometern, und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Laufzeiten T in Sekunden aufgetragen. Die Kurve P entspricht den longitudinalen und die Kurve S den transversalen Wellen.

Digitized by Google

Die Kenntnis der genauen Gestalt des Hodographen ist für die praktische Seismometrie von ganz besonderer Wichtigkeit und es ist daher die möglichste Vervollkommnung desselben anzustreben. Zu berücksichtigen hierbei sind die Eigentümlichkeiten des geologischen Baues der oberen Erdschichten.

Mit einer gewissen Annäherung können wir die Laufzeitkurve durch eine Funktion $\Psi(\Delta)$ folgender Form ausdrücken:

$$T = \Psi(\Delta) = A\Delta + B\Delta^2 + C\Delta^3 + \cdots. \tag{35}$$

Diese Formel erfordert jedoch für kleine Werte von Δ eine Korrektion wegen der Tiefe des Erdbebenherdes, eine Frage, auf die wir noch in einem

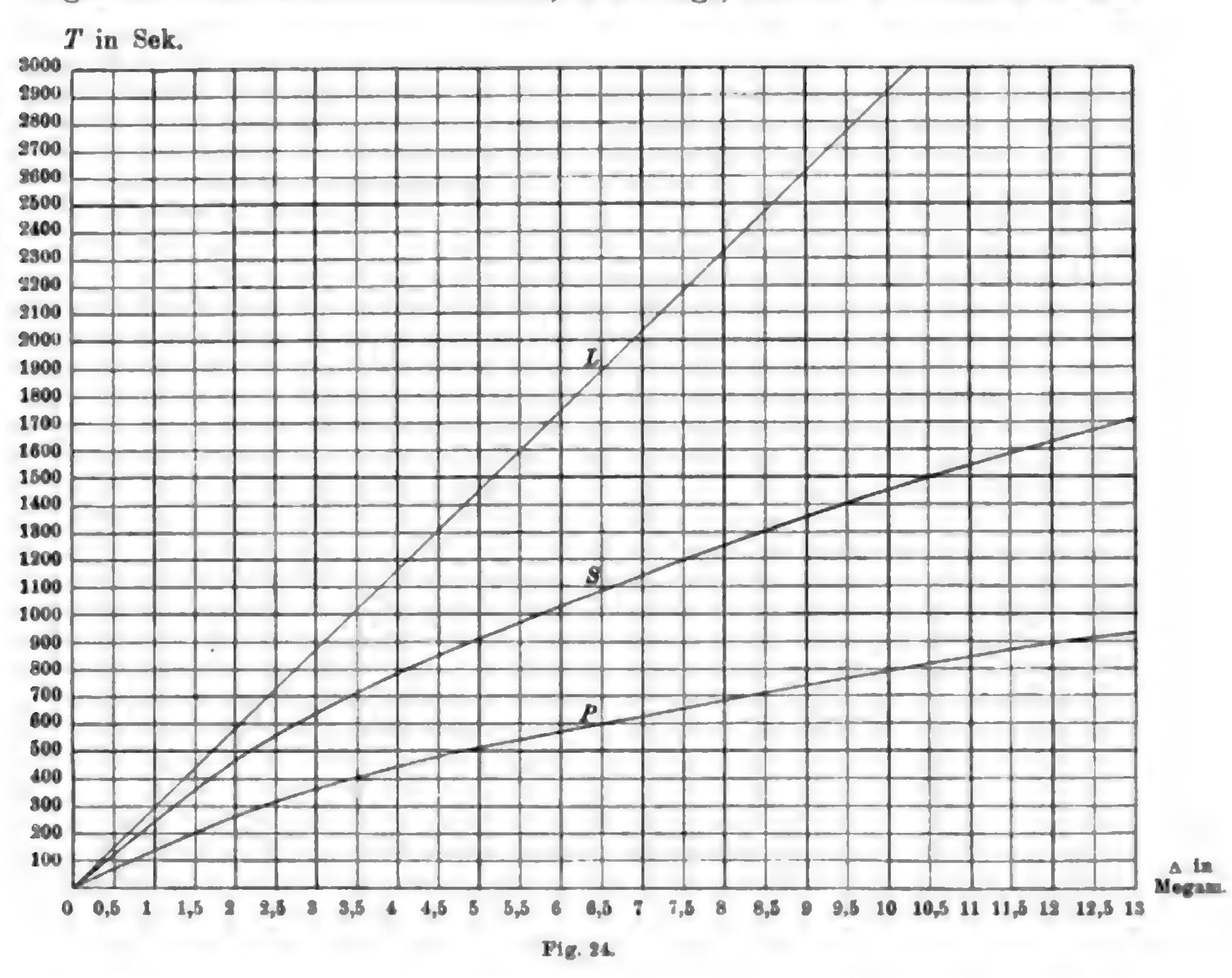


Fig. 24.

der nächsten Paragraphen dieses Kapitels zurückkommen werden; liegt jedoch der Herd nicht tief, so können wir mit einer gewissen Annäherung annehmen, daß er mit dem Epizentrum zusammenfällt und die Formel (35) benutzen.

Die Koeffizienten dieser Reihe werden aus Beobachtungen bestimmt, wobei wir den wahren Anfangsmoment des Erdbebens im Epizentrum nicht zu wissen brauchen; denn wir können ihn ausschließen, indem wir die Differenz der Zeiten des Eintreffens der seismischen Wellen auf den seismischen

Digitized by Google

Stationen, die in verschiedenen, aber bestimmten Entfernungen Δ und Δ' vom Epizentrum sich befinden, nehmen

$$T - T' = A(\Delta - \Delta') + B(\Delta^2 - \Delta'^2) + C(\Delta^3 - \Delta'^3) + \cdots.$$

Verfügen wir über eine große Zahl von Beobachtungen, so können wir die Koeffizienten dieser Reihe nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmen.

Hat man die Laufzeitkurve sowohl für P als auch S ermittelt, so kann man auch eine Laufzeitkurve für $T_2 - T_1$ oder $S - P$ konstruieren, die der Dauer der ersten Vorphase eines Erdbebens entspricht.

Ist die Differenz $T_2 - T_1$ als Funktion von Δ bekannt, so können wir nach der aus dem Seismogramm entnommenen Differenz zwischen den Momenten P und S, welche sich in vielen Fällen durch scharfe Ausschläge charakterisieren, direkt die Epizentraldistanz in Kilometern bestimmen.

Zöppritz und Geiger[3]) gaben diese Größen T_1 und T_2 in ihrer Abhängigkeit von Δ von 500 zu 500 km bis zu $\Delta = 13000$ km. Diese Zahlen sind in der folgenden Tabelle I gegeben.

Tabelle I.

Δ	T_1	T_2	Δ	T_1	T_2
0 km	0 Sek.	0 Sek.	7000 km	631 Sek.	1140 Sek.
500	69	124	7500	660	1194
1000	136	244	8000	688	1249
1500	199	356	8500	716	1301
2000	257	460	9000	743	1354
2500	310	555	9500	769	1404
3000	358	641	10000	795	1453
3500	402	719	10500	820	1500
4000	442	789	11000	844	1545
4500	478	854	11500	867	1588
5000	512	913	12000	888	1629
5500	542	971	12500	909	1668
6000	572	1028	13000	929	1705
6500	601	1084			

Auf Grund dieses Zahlenmateriales hat C. Zeißig eine für die Benutzung sehr bequeme Tabelle für die $T_2 - T_1$ entsprechenden Δ zusammengestellt, wobei er nach einer besonderen Methode die Ausgleichung der Abweichungen der Kurve vornahm und die Angaben mit einer Genauigkeit von etwa 10 km interpolierte. Diese Tabelle, die von der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg gedruckt worden ist, ist auf den folgenden Seiten gegeben.

Sie ist so geordnet, daß mit dem Argument $T_2 - T_1$ in Minuten und Sekunden die entsprechende Epizentralentfernung Δ in Kilometern zu entnehmen ist.

Digitized by Google

Tabelle II.

Tabelle der Laufzeitdifferenz $(T_2 - T_1)$ der Wellen der ersten und zweiten Vorphase in ihrer Abhängigkeit von der Epizentraldistanz Δ.

Δ		1000 km	2000 km	3000 km	4000 km	5000 km	6000 km	7000 km	8000 km	9000 km	10000 km	11000 km	12000 km
km	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
0	0 0	1 48	3 23	4 43	5 47	6 42	7 36	8 29	9 20	10 10	10 58	11 41	12 21
10	1	49	24	44	48	43	37	30	20	11	59	41	21
20	2	50	25	44	48	43	37	30	21	12	59	42	22
30	3	51	26	45	49	44	38	31	21	12	59	42	22
40	4	52	28	46	49	44	38	31	22	13	11 0	43	22
50	6	53	28	47	50	45	39	32	22	13	0	43	23
60	7	54	28	47	51	45	39	32	23	14	1	43	23
70	8	55	29	48	51	46	40	33	23	14	1	44	24
80	9	56	30	49	52	47	40	33	24	15	2	44	24
90	10	57	31	50	52	47	41	34	24	15	2	45	24
100	11	58	32	50	53	48	41	34	25	16	2	45	25
10	12	59	33	51	53	48	42	35	25	16	3	45	25
20	13	2 0	34	52	54	49	43	35	26	17	3	46	25
30	15	1	35	52	55	49	43	36	26	17	4	46	26
40	16	2	35	53	55	50	44	36	27	18	4	47	26
50	17	3	36	54	56	50	44	37	27	18	5	47	26
60	18	4	37	54	56	51	45	37	28	19	5	47	27
70	19	5	38	55	57	51	45	38	28	19	5	48	27
80	20	6	39	56	57	52	46	38	29	20	6	48	28
90	21	7	39	57	58	53	46	39	29	20	7	49	28
200	22	8	40	58	58	53	47	39	30	20	7	49	28
10	23	9	41	58	59	54	47	40	30	21	7	50	29
20	24	10	42	58	6 0	54	48	40	31	21	8	50	29
30	26	11	43	59	0	55	48	41	31	22	8	50	30
40	27	12	44	5 0	1	55	49	41	32	23	9	51	30
50	28	13	44	1	1	56	50	42	32	23	9	51	30
60	29	14	45	1	2	56	50	42	33	23	10	51	31
70	30	15	46	2	2	57	51	43	33	23	10	52	31
80	31	16	47	3	3	57	51	43	34	24	11	52	31
90	32	17	48	4	4	58	52	44	34	25	11	53	32
300	33	18	49	5	4	58	52	44	35	25	11	53	32
10	34	19	49	5	5	59	53	45	35	26	12	53	32
20	36	20	50	5	5	7 0	53	45	36	26	12	54	33
30	37	21	51	6	6	0	54	46	36	27	13	54	33
40	38	22	52	7	6	1	54	46	37	27	13	55	34
50	39	23	53	7	7	1	55	47	37	28	14	55	34
60	40	24	54	8	7	2	55	47	38	28	14	55	34
70	41	25	55	9	8	2	56	48	38	29	15	56	35
80	42	25	55	9	9	3	57	48	39	29	15	56	35
90	43	26	56	10	10	3	57	49	40	30	15	57	35
400	44	27	57	10	10	4	58	50	40	30	16	57	36
10	45	28	58	11	10	4	58	50	40	31	16	57	36
20	46	29	59	12	11	5	59	51	41	31	17	58	36
30	47	30	59	13	11	5	59	51	42	32	17	58	37
40	49	31	4 0	13	12	6	8 0	52	42	32	18	59	37
50	50	32	1	14	12	7	0	52	43	33	18	59	37
60	51	33	2	14	13	7	1	53	43	33	18	12 0	38
70	52	34	3	15	13	8	1	53	44	34	19	0	38
80	53	35	4	16	14	8	2	54	44	34	19	0	38
90	54	36	4	16	15	9	2	54	45	35	20	1	39

Digitized by Google

Tabelle II (Fortsetzung).

Δ		1000 km	2000 km	3000 km	4000 km	5000 km	6000 km	7000 km	8000 km	9000 km	10000 km	11000 km	12000 km
km	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.	M. S.
500	0 55	2 37	4 5	5 17	6 15	7 9	8 3	8 55	9 45	10 35	11 20	12 1	12 39
10	56	38	6	18	15	10	3	55	46	36	20	1	39
20	57	39	7	18	16	10	4	55	46	36	21	2	40
30	58	40	7	19	16	11	5	56	46	37	21	2	40
40	59	41	8	20	17	12	5	57	47	37	22	3	40
50	1 1	42	9	20	17	12	6	57	48	37	22	3	41
60	2	43	10	21	18	13	6	58	48	38	23	3	41
70	3	44	11	21	19	13	7	58	49	38	23	4	42
80	4	45	11	22	19	14	7	59	49	39	24	4	42
90	5	45	12	23	20	14	8	59	50	39	24	5	42
600	6	46	13	24	20	15	8	9 0	50	40	24	5	43
10	7	47	14	24	21	15	9	0	51	40	25	5	43
20	8	48	15	25	21	16	9	1	51	41	25	6	43
30	9	49	15	26	22	16	10	1	52	41	26	6	44
40	10	50	16	26	23	17	10	2	52	42	26	7	44
50	11	51	17	26	23	17	11	2	53	42	27	7	44
60	12	52	18	27	24	18	11	3	53	43	27	7	45
70	13	53	18	28	24	18	12	3	54	43	27	8	45
80	15	54	19	28	25	19	12	4	54	44	28	8	45
90	16	55	20	29	25	20	13	4	55	44	28	9	46
700	16	56	21	30	26	20	13	5	55	45	29	9	46
10	18	57	21	30	26	21	14	5	56	45	29	10	46
20	19	58	22	31	27	21	15	6	56	45	30	10	47
30	20	59	23	31	28	22	15	6	57	46	30	10	47
40	21	3 0	24	32	28	22	15	7	57	46	30	11	47
50	22	0	24	33	29	23	16	7	58	47	31	11	48
60	23	1	25	33	29	23	17	8	58	47	31	12	48
70	24	2	26	34	30	24	17	8	59	48	32	12	48
80	25	3	27	34	30	24	18	9	59	48	32	12	49
90	26	4	28	35	31	25	18	9	10 0	49	32	13	49
800	27	5	28	35	31	25	19	10	0	49	33	13	49
10	28	6	29	36	32	26	19	10	0	49	33	14	50
20	29	7	30	37	32	26	20	11	1	50	34	14	50
30	30	8	30	37	33	27	20	11	2	50	34	14	50
40	31	9	31	38	34	27	21	12	2	51	34	15	51
50	32	10	32	39	34	28	21	12	3	51	35	15	51
60	33	11	33	39	35	28	22	13	3	52	35	15	51
70	34	12	34	40	35	29	22	13	4	52	36	16	52
80	36	12	34	40	36	30	23	14	4	53	36	16	52
90	37	13	35	41	36	30	23	14	5	53	36	17	53
900	38	14	36	41	37	31	24	15	5	54	37	17	53
10	39	15	36	42	37	31	24	15	6	54	37	17	53
20	40	16	37	43	38	32	25	16	6	54	38	18	54
30	41	17	38	43	38	32	25	16	7	55	38	18	54
40	42	18	39	44	39	33	26	17	7	55	38	19	54
50	43	19	39	44	39	33	26	17	8	56	39	19	55
60	44	19	40	45	40	34	27	18	8	56	39	19	55
70	45	20	41	45	41	34	27	18	9	57	40	20	55
80	46	21	42	46	41	35	28	19	9	57	40	20	55
90	47	22	42	47	42	35	28	19	10	58	41	21	56
1000	48	23	43	47	42	36	29	20	10	58	41	21	56

Digitized by Google

Mit Hilfe dieser Tabelle ist die Epizentralentfernung eines Erdbebens sehr leicht zu bestimmen. Gewiß können diese Zahlen nicht als absolut richtige betrachtet werden und es werden zweifellos bald vervollkommnetere Laufzeitkurven abgeleitet werden, doch gibt die Tabelle Zeissigs[9]) im allgemeinen eine sehr gute Übereinstimmung mit den Beobachtungen.

Die Vorphase P eines Erdbebens wird gewöhnlich auf den Seismogrammen durch kleine Wellen mit kurzen Perioden charakterisiert. Wenn der Seismograph eine genügende Empfindlichkeit besitzt, so kann man den Moment P meistens gut bestimmen.

Der Einsatz der zweiten Vorphase dagegen ist zuweilen ziemlich undeutlich und man befindet sich oft im Zweifel, welche Stelle auf dem Seismogramm dem Anfang S entspricht.

In solchen Fällen ist es bisweilen nützlich, den Moment für das Eintreffen der langen, der Oberflächenwellen heranzuziehen.

Diese Wellen zeigen schon dadurch einen abweichenden Charakter, daß sie eine größere Schwingungsperiode besitzen. Mit ihrem Eintreffen beginnt bei den entfernteren Stationen die Maximalphase des Bebens, die die größten horizontalen und vertikalen Bewegungen der Punkte der Erdoberfläche aufweist.

Da sich außerdem diese Wellen längs der Oberfläche mit einer konstanten mittleren Geschwindigkeit fortpflanzen, die von Δ nicht abhängt, so ist die entsprechende Laufzeitkurve eine gerade Linie. In Figur 24 ist diese Laufzeitkurve eine Gerade, die mit dem Buchstaben L, der gebräuchlichen Bezeichnung für den Moment des Eintreffens der langen Wellen (undae longae), bezeichnet ist.

Fig. 25.

Bei Abwesenheit eines deutlich ausgeprägten S können wir zur Bestimmung der angenäherten Epizentralentfernung auch die Differenz L-P benutzen, obwohl im allgemeinen der Anfang L auf dem Seismogramm bei weitem nicht so deutlich ausgeprägt ist, wie der Anfang P. Es ist immer vorzuziehen, Δ nach S-P zu bestimmen und L-P nur zur Kontrolle zu benutzen.

Die nebenstehende Figur 25 stellt eine auf etwa $^1/_3$ verkleinerte Reproduktion eines besonders charakteristischen Seismogramms der horizontalen Bodenverschiebungen im Meridian während des klein-

Digitized by Google

asiatischen Bebens am 9. Februar 1909 dar, das in Pulkovo registriert worden ist. Wir erkennen in demselben deutlich P, S, L und die Maximalphase des Bebens mit den einzelnen Maxima M_1, M_2 usw.

Da sich die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Oberflächenwellen ($v = 3{,}5$ km/sek.) nur wenig von der der transversalen in den oberen Erdschichten ($v = 4{,}0$ km/sek.) unterscheidet, so folgt auf den Seismogrammen naher Beben der Anfang L gleich nach dem Eintreffen von S, so daß sich die Wellen der beiden Typen überdecken.

Für kleine Epizentralentfernungen sind

$$\frac{dT_1}{d\Delta} \quad \text{und} \quad \frac{dT_2}{d\Delta}$$

mit genügender Annäherung, abgesehen von dem Einflusse der Tiefe des Herdes, die reziproken Größen der Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und der transversalen Wellen in den oberen Schichten.

Ist uns die Epizentraldistanz Δ für bestimmte Stationen bekannt, so können wir sogleich die Lage des Epizentrums des Bebens bestimmen.

Für diesen Zweck benutzt man sehr bequem einen größeren schwarzen Globus, auf dem die Meridiane und Parallelen eingezeichnet sind und auf dem man mit Kreide zeichnen kann.

Man zeichnet auf dem Globus um zwei Stationen, für welche die Epizentralentfernungen Δ und Δ_1 bekannt sind, Kreise mit den entsprechenden Radien, wozu ein besonderer, bogenförmiger Zirkel, der von 100 zu 100 km eingeteilt ist, dient.

In dem Schnittpunkte dieser Kreise befindet sich das Epizentrum. Freilich gibt es zwei solcher Punkte; wenn aber der eine in ein seismisch indifferentes Gebiet fällt, so kommt derselbe nicht in Betracht.

Haben wir noch für eine dritte Station die Größe Δ, so fällt jegliche Unbestimmtheit in der Lösung der Aufgabe weg. Eine solche Bestimmung des Epizentrums können wir als eine **seismische Triangulation** bezeichnen.

Fig. 26.

Statt des Globus können wir auch Karten benutzen; besonders gut eignen sich für unseren Zweck die Karten in stereographischer Projektion.

Eine genauere Bestimmung des Epizentrums können wir mit Hilfe der bekannten Formeln der sphärischen Trigonometrie ausführen.

Es seien in der obigen Figur 26 N der Nordpol, B und B_1 zwei seismische Stationen mit folgenden geographischen Koordinaten:

Station B	Station B_1
Breite φ	φ_1
Länge λ	λ_1
ferner $\theta = 90^0 - \varphi$	$\theta_1 = 90^0 - \varphi_1$.

Dann ist

$$\sphericalangle BNB_1 = \delta = \lambda_1 - \lambda.$$

Um die Punkte B und B_1 beschreiben wir Kreisbögen mit den Radien Δ und Δ_1, die gleich den Epizentralentfernungen sind.

In einem der Schnittpunkte dieser Kreise E_1 oder E_2 befindet sich das Epizentrum.

Um die geographischen Koordinaten der Punkte E_1 und E_2 zu ermitteln, verfahren wir folgendermaßen.

Wir bestimmen zuerst die Distanz s zwischen den Stationen B und B_1, auf dem größten Kreise gemessen, und ferner das Azimut $\beta = \sphericalangle NBB_1$ der Station B_1 in bezug auf den Meridian der Station B.

Aus dem sphärischen Dreieck BNB_1 erhalten wir

$$\cos s = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos\delta, \tag{36}$$

$$\sin\beta = \sin\delta \cdot \frac{\sin\theta_1}{\sin s} \tag{37}$$

und

$$\cos\theta_1 = \cos\theta \cos s + \sin\theta \sin s \cos\beta$$

oder

$$\cos\beta = \frac{\cos\theta_1 - \cos\theta \cos s}{\sin\theta \sin s}. \tag{38}$$

Mit den bekannten Größen θ, θ_1 und δ finden wir aus der Formel (36) s und dann aus einer der Formeln (37) oder (38) den Winkel β.

Die Formeln (36) und (38) sind für die logarithmische Berechnung unbequem, ferner gibt die Formel (37) eine doppelte Lösung, denn für dieselbe Größe des Sinus kann der Winkel β kleiner oder größer als 90^0 sein.

Um dieser Schwierigkeit zu entgehen, führt man einen Hilfswinkel ω ein, der durch folgende Beziehung bestimmt wird

$$\operatorname{tg}\omega = \cos\delta \operatorname{tg}\theta_1 \tag{39}$$

oder

$$\sin\theta_1 \cos\delta = \operatorname{tg}\omega \cos\theta_1.$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formel (36) ein, so ist

$$\cos s = \cos\theta_1 \{\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tg}\omega\} = \frac{\cos\theta_1}{\cos\omega} \{\cos\theta \cos\omega + \sin\theta \sin\omega\}$$

oder

$$\cos s = \frac{\cos\theta_1 \cos(\theta - \omega)}{\cos\omega}. \tag{40}$$

Ferner ergibt sich aus den Gleichungen (37) und (38)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\delta \cdot \sin\theta_1 \sin\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta \cos s}.$$

Digitized by Google

Setzt man hierin den Ausdruck für $\cos s$ aus der Formel (40) ein, so erhält man

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\delta \cdot \sin\theta_1 \cdot \sin\theta}{\cos\theta_1 - \cos\theta \cdot \frac{\cos\theta_1 \cos(\theta-\omega)}{\cos\omega}}$$

$$= \frac{\sin\delta \cdot \operatorname{tg}\theta_1 \cdot \sin\theta}{1 - \cos\theta\{\cos\theta + \sin\theta \operatorname{tg}\omega\}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\delta \cdot \{\cos\delta \cdot \operatorname{tg}\theta_1\}}{\sin\theta\cos\omega - \cos\theta\sin\omega} \cdot \cos\omega$$

oder schließlich, unter Berücksichtigung der Beziehung (39)

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\delta \cdot \sin\omega}{\sin(\theta-\omega)}. \tag{41}$$

Nach den Formeln (40) und (41) berechnen sich s und β sehr bequem. Die Resultate sind überdies eindeutig, denn die Vorzeichen von $\cos s$ und $\operatorname{tg}\beta$ bestimmen sofort, ob der entsprechende Winkel größer oder kleiner als 90° ist.

Um s in Kilometern auszudrücken, muß man seinen in Graden und Teilen des Grades ausgedrückten Wert multiplizieren mit

$$A = 6371\frac{\pi}{180}. \tag{42}$$

Es ist

$$\log A = 2{,}0461.$$

Für ein jedes Paar seismischer Stationen sind s und β konstante Größen, die im voraus berechnet werden können.

Wenden wir uns nun zu den Dreiecken BE_1B_1 und BE_2B_1, wählen ein beliebiges von ihnen, in dem die drei Seiten Δ, Δ_1 und s bekannt sind und berechnen den Winkel $\varepsilon = E_1BB_1 = E_2BB_1$.

Zuerst ist Δ und Δ_1 im Winkelmaß auszudrücken, d. h. es sind diese Größen durch A zu dividieren. Wir erhalten dann Δ und Δ_1 in Graden und Teilen derselben ausgedrückt.

Führt man ferner die Bezeichnung

$$p = \frac{\Delta + \Delta_1 + s}{2} \tag{43}$$

ein, so erhält man auf Grund der bekannten Formel der sphärischen Trigonometrie

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\varepsilon = \sqrt{\frac{\sin(p-\Delta)\cdot\sin(p-s)}{\sin p \cdot \sin(p-\Delta_1)}}. \tag{44}$$

Dann ist das Azimut des Epizentrums in bezug auf den Meridian der Station B entweder

$$\left.\begin{aligned}\alpha &= \beta - \varepsilon \\ \text{oder}\quad \alpha &= \beta + \varepsilon\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

Ist die Epizentralentfernung Δ und das Azimut des Epizentrums α für die Station B bekannt, so sind die geographischen Koordinaten φ_e und λ_e des Epizentrums sehr einfach zu bestimmen.

In dem Dreieck BNE (Fig. 27) sind zwei Seiten θ und Δ und der Winkel α bekannt. Es wird verlangt, die Ergänzung der Breite des Epizentrums θ_e und die Längendifferenz γ zu bestimmen.

Ähnlich wie früher bei der Berechnung von s erhalten wir

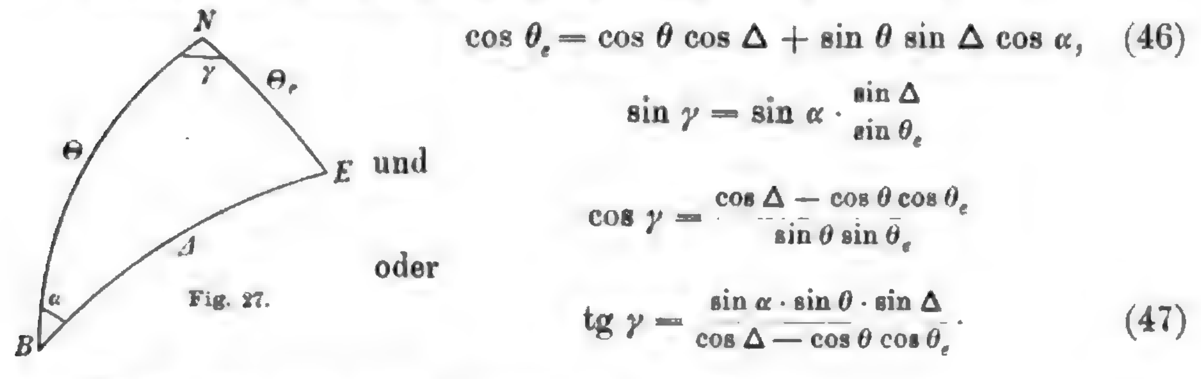


Fig. 27.

$$\cos\theta_e = \cos\theta\cos\Delta + \sin\theta\sin\Delta\cos\alpha, \qquad (46)$$

$$\sin\gamma = \sin\alpha\cdot\frac{\sin\Delta}{\sin\theta_e}$$

und

$$\cos\gamma = \frac{\cos\Delta - \cos\theta\cos\theta_e}{\sin\theta\sin\theta_e}$$

oder

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\cdot\sin\theta\cdot\sin\Delta}{\cos\Delta - \cos\theta\cos\theta_e}. \qquad (47)$$

Führen wir nun einen Hilfswinkel χ ein:

$$\operatorname{tg}\chi = \cos\alpha\operatorname{tg}\Delta. \qquad (48)$$

Dann ist

$$\cos\theta_e = \cos\theta\cos\Delta + \sin\theta\cos\Delta\operatorname{tg}\chi$$

$$= \frac{\cos\Delta}{\cos\chi}\cdot\{\cos\theta\cos\chi + \sin\theta\sin\chi\}$$

oder schließlich

$$\cos\theta_e = \frac{\cos\Delta\cdot\cos(\theta-\chi)}{\cos\chi}. \qquad (49)$$

Setzt man diese Größe in die Formel (47) ein, so ergibt sich

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\sin\alpha\sin\theta\cdot\sin\Delta}{\cos\Delta - \cos\theta\cdot\cos\Delta\,\dfrac{\cos(\theta-\chi)}{\cos\chi}}$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\chi}{\sin\theta\cos\chi - \cos\theta\sin\chi}\cdot\cos\chi$$

oder schließlich

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin\chi}{\sin(\theta-\chi)} \qquad (50)$$

Nach den Formeln (49) und (50) werden auch die Größen θ_e und γ berechnet.

Dann ist die Breite des Epizentrums

$$\varphi_e = 90 - \theta_e, \qquad (51)$$

und die Länge

$$\lambda_e = \lambda \pm \gamma, \qquad (52)$$

wo das Zeichen + genommen wird, wenn das Epizentrum östlich von der Station B liegt, und das Zeichen —, wenn es westlich liegt.

Digitized by Google

Kann man das Azimut des Epizentrums α aus den Beobachtungen der Station B allein bestimmen, so kann man, wenn die Epizentralentfernung Δ bekannt ist, die Lage des Epizentrums ohne die Mitwirkung anderer seismischer Stationen bestimmen.

Ist die Station mit passenden Seismographen versehen, die eine genügende Empfindlichkeit besitzen, so ist diese Aufgabe vollständig lösbar. Wir werden diese Frage später eingehend betrachten, wenn wir mit der Theorie der seismischen Instrumente bekannt geworden sind. Hier genügt es darauf hinzuweisen, daß man zu diesem Zweck die absoluten Größen der Bodenverschiebung beim ersten Einsatz der longitudinalen seismischen Wellen kennen muß, und zwar sowohl im Meridian, wie auch im ersten Vertikal. Das Verhältnis der zweiten Größe zur ersten gibt uns die Tangente des Azimuts des Epizentrums. Jegliche Unbestimmtheit in der Lösung der Aufgabe verschwindet, wenn wir die Richtung der Verschiebung bestimmen können, ob also die gemessenen Projektionen der Verschiebung nach Nord oder nach Süd, nach Ost oder nach West gerichtet sind und ob die Front der ersten longitudinalen Wellen einer Kondensations- oder Dilatationswelle entspricht.

Über andere Methoden der Bestimmung des Epizentrums von Beben wird später noch die Rede sein.

Die Konstruktion der Laufzeitkurve ist nicht allein für die Bestimmung des Epizentrums der Beben von Bedeutung. Von weit größerer Wichtigkeit ist es, daß sie uns ermöglicht, eine Reihe von interessanten Folgerungen über die physikalischen Eigenschaften der uns völlig unzugänglichen Schichten in der Tiefe des Erdkörpers zu ziehen.

§ 3. Die Bestimmung des Emergenzwinkels.

Im § 1 des Kapitels haben wir folgenden Ausdruck für die Epizentralentfernung Δ gefunden

$$\Delta = 2 r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = \Phi_1(\alpha), \quad \text{(Formel (24))}$$

wo α der Kosinus des Emergenzwinkels ist, also

$$\alpha = \cos e_0 \quad \text{(Formel (17))}.$$

Folglich entspricht einer jeden Epizentralentfernung Δ eine bestimmte Größe e_0.

Andererseits haben wir für die Laufzeit T des entsprechenden Strahles gefunden

$$T = 2 n_0 r_0 \int_{\varrho_m}^{1} \frac{\nu^2 \varrho \, d\varrho}{\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} \quad \text{(Formel (27))}.$$

Digitized by Google

Die untere Grenze dieser beiden bestimmten Integrale wird aus der Bedingung (22) bestimmt

$$\varphi(\varrho_m) = \alpha. \quad \text{(Formel (22))}.$$

Die Funktion

$$\varphi(\varrho) = \nu\varrho \quad \text{(Formel (20))}.$$

ist bekannt.

Die größte vom seismischen Strahl erreichte Tiefe oder die entsprechende Größe ϱ_m ist ebenfalls eine Funktion von α.

Wir wollen nun den Ausdruck $T - n_0\alpha\Delta$ bilden

$$T - n_0\alpha\Delta = 2n_0r_0\int\limits_{\varrho_m}^{1}\frac{\nu^2\varrho^2 d\varrho}{\varrho\sqrt{\varphi^2(\varrho)-\alpha^2}} - 2n_0r_0\int\limits_{\varrho_m}^{1}\frac{\alpha^2 d\varrho}{\varrho\sqrt{\varphi^2(\varrho)-\alpha^2}}$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (20)

$$T - n_0\alpha\Delta = 2n_0r_0\int\limits_{\varrho_m}^{1}\frac{\sqrt{\varphi^2(\varrho)-\alpha^2}}{\varrho}d\varrho. \tag{53}$$

Dieses Integral ist ebenfalls eine Funktion des Parameters α, die Integration geschieht nach ϱ.

Berücksichtigen wir, daß die untere Grenze auch eine Funktion von α ist, so erhalten wir auf Grund des bekannten Theorems der Integralrechnung, das die Differentiation der bestimmten Integrale nach dem variablen Parameter behandelt und nach dem

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x,\alpha)dx = \int\limits_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial\alpha}\{f(x,\alpha)\}dx + f(x_2)\frac{\partial x_2}{\partial\alpha} - f(x_1)\frac{\partial x_1}{\partial\alpha}$$

ist, den folgenden Ausdruck für den Differentialquotienten des Ausdruckes (53) nach dem Parameter α:

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0\Delta - n_0\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} = -2n_0r_0\alpha\int\limits_{\varrho_m}^{1}\frac{d\varrho}{\varrho\sqrt{\varphi^2(\varrho)-\alpha^2}} - \left[2n_0r_0\frac{\sqrt{\varphi^2(\varrho)-\alpha^2}}{\varrho}\right]_{\varrho=\varrho_m}\cdot\frac{\partial\varrho_m}{\partial\alpha}.$$

Nach Formel (22) ist aber das zweite Glied der rechten Seite gleich Null, ferner ist das erste Glied nach Formel (24) gleich $-n_0\Delta$.

Also

$$\frac{dT}{d\alpha} - n_0\Delta - n_0\alpha\frac{d\Delta}{d\alpha} = -n_0\Delta$$

oder

$$\alpha = \cos e_0 = \frac{1}{n_0}\cdot\frac{dT}{d\Delta}.$$

Da n_0 die reziproke Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit v_0 des entsprechenden seismischen Strahles in den obersten Erdschichten ist, so

Digitized by Google

erhält man, wenn man diese Formel auf den Fall der longitudinalen Wellen der ersten Vorphase eines Bebens anwendet,

$$\cos e_0 = v_0 \frac{d T_1}{d \Delta}. \tag{54}$$

Diese Formel hat eine wichtige Bedeutung.

$\frac{d T_1}{d \Delta}$ gibt uns den tangens des Winkels, welchen die Tangente zur Laufzeitkurve der Longitudinalwellen mit der Achse Δ bildet.

Wir können also immer den Emergenzwinkel e_0 berechnen, wenn wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen v_0 in den oberen Erdschichten kennen.

Bestimmt man umgekehrt aus den Beobachtungen auf irgendeine Weise den Winkel e_0, so kann man aus der Laufzeitkurve v_0 bestimmen und also etwaige Anomalien im geologischen Bau der oberen Erdschichten feststellen.

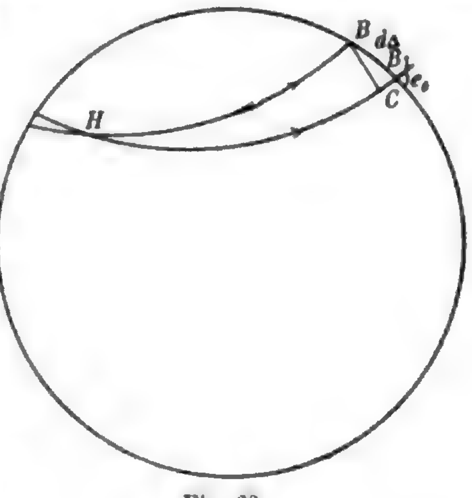


Fig. 28.

Da übrigens der Herd des Bebens niemals sehr tief liegt, so ist der Unterschied in der Form des Hodographen nur für die dem Epizentrum nahe liegenden Punkte bemerkbar, für Punkte mit großen Epizentralentfernungen hat die Tiefe des Herdes auf die Form der Laufzeitkurve praktisch fast gar keinen Einfluß.

In nebenstehender Figur 28 ist H der Herd des Bebens, B und B_1 sind zwei Punkte, die in einer unendlich kleinen Entfernung $d\Delta$ voneinander liegen.

Wir fällen aus B eine Senkrechte auf die Trajektorie der longitudinalen seismischen Welle, die nach B_1 läuft. Der Emergenzwinkel in B_1 sei e_0

Dann folgt aus dem kleinen Dreieck BCB_1, daß

$$CB_1 = d\Delta \cos e_0.$$

Andererseits entspricht der Distanz CB_1 die Laufzeit dT_1 des longitudinalen Strahles in den oberen Erdschichten.

Folglich ist

$$CB_1 = v_0 \, d T_1.$$

Vergleicht man die beiden Ausdrücke, so findet man

$$\cos e_0 = v_0 \frac{d T_1}{d \Delta}.$$

Die Formel (54) ist also immer richtig und ganz unabhängig von dem Gesetze, das die Abhängigkeit der Größe $\nu = \frac{v_0}{v}$, d. h. der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Strahlen von der Tiefe (ρ) bestimmt; ferner

Digitized by Google

ist die Lage des Herdes und des Beobachtungsortes B ganz willkürlich, was auch aus der Figur 28 direkt folgt.

Für den Fall transversaler Wellen kann eine dem Ausdrucke (54) ähnliche Formel angewandt werden.

Zoeppritz und Geiger haben nach den von ihnen veröffentlichten Angaben für die Laufzeitkurve der longitudinalen seismischen Wellen die in Tabelle III aufgeführten Werte für den Winkel e_0 für die Epizentralentfernung Δ gefunden.

Tabelle III.

Δ	e_0	ε	$e_0 - \varepsilon$	Δ	e_0	ε	$e_0 - \varepsilon$
0 km	0° 0′	0° 0′	0° 0′	7000 km	65 18	31 29	33 49
500	10 40	2 15	8 25	7500	65 42	33 43	31 59
1000	20 42	4 30	16 12	8000	66 11	35 58	30 13
1500	29 37	6 45	22 52	8500	66 45	38 13	28 32
2000	37 15	9 0	28 15	9000	67 22	40 28	26 54
2500	43 40	11 14	32 26	9500	68 3	42 43	25 20
3000	49 3	13 29	35 34	10000	68 48	44 58	23 50
3500	53 16	15 44	37 32	10500	69 34	47 13	22 21
4000	56 47	17 59	38 48	11000	70 23	49 28	20 55
4500	60 1	20 14	39 47	11500	71 17	51 43	19 34
5000	62 48	22 29	40 19	12000	72 13	53 58	18 15
5500	64 42	24 44	39 58	12500	73 11	56 12	16 59
6000	64 47	26 59	37 48	13000	74 9	58 27	15 42
6500	64 59	29 14	35 45				

Neben den Größen e_0 sind die Größen des Winkels ε angeführt, unter welchem die seismischen Strahlen aus dem Innern des Erdballs austreten müßten, wenn sie sich vom Epizentrum nach dem Beobachtungsort geradlinig längs der Sehne EB (Fig. 19) fortpflanzen würden, wenn also die elastischen Eigenschaften und die Dichte der inneren Erdschichten überall gleich wären.

Da der Zentriwinkel ϑ, der der Epizentraldistanz Δ (in Kilometern) entspricht,

$$\vartheta^0 = \frac{\Delta}{6371} \cdot \frac{180}{\pi} = \frac{1}{A} \cdot \Delta \quad \text{(Formel (42))}$$

ist, so ergibt sich sehr einfach aus Figur 19

$$\varepsilon = \frac{\vartheta}{2}. \tag{55}$$

Die Trajektorien der seismischen Strahlen wenden nun im allgemeinen ihre konkave Seite der Oberfläche der Erde zu und es ist daher

$$e_0 > \varepsilon.$$

Für die Werte von Δ, welche 13000 km übersteigen, ist die Form der Laufzeitkurve nur sehr ungenau bekannt.

Die Tabelle III zeigt, daß e_0 für kleine Werte von Δ schnell zunimmt; bei $\Delta = 6000$ km ist die Zunahme am geringsten.

Digitized by Google

Die Differenz $e_0 - \varepsilon$ wächst anfangs schnell, erreicht bei $\Delta = 5000$ km ihr Maximum, um darnach wieder langsam abzunehmen. Dieser Umstand führt zu der Vermutung, daß in den Tiefen des Erdkörpers, die $\Delta = 5000$ km entsprechen, Anomalien in dem Gesetze der Veränderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen mit der Tiefe vorhanden sind. Wir werden auf diese noch im folgenden Paragraphen zurückkommen.

Wir sehen also, daß die Kenntnis der Größe des Winkels e_0 als einer Funktion von Δ von sehr großer Bedeutung ist, denn sie gibt uns die Möglichkeit, die Trajektorie des seismischen Strahles durch den Erdkörper zu verfolgen und Schlüsse über die physikalischen Eigenschaften der inneren Schichten des Erdballs zu ziehen.

§ 4. Die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen von der Tiefe.

Zur Bestimmung dieser Abhängigkeit wenden wir uns wiederum der Grundgleichung (Formel (24)) zu, welche die Größe Δ in ihrer Abhängigkeit von dem Parameter $\alpha = \cos e_0$ darstellt

$$\Delta = 2 r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = \Phi_1(\alpha). \tag{24}$$

Die Abhängigkeit Δ von α kann, wie wir im vorhergehenden Paragraphen gesehen haben, als bekannt angesehen werden, falls wir die Gestalt der entsprechenden Laufzeitkurve kennen.

Folglich ist die Funktion $\Phi_1(\alpha)$ aus den Beobachtungen bekannt. Die Aufgabe besteht vom mathematischen Standpunkt aus also im folgenden: es ist eine Funktion $\varphi(\varrho) = \nu\varrho$ aufzusuchen, die in das vorhergehende bestimmte Integral eingesetzt der Gleichung (24) Genüge leistet.

Wir hatten früher die folgenden Beziehungen (siehe Formeln (14), (15) und (16)):

$$\varrho = \frac{r}{r_0} \tag{14}$$

$$\nu = \frac{v_0}{v} \tag{15}$$

und

$$\nu = f(\varrho), \tag{16}$$

folglich ist

$$\varphi(\varrho) = \nu\varrho = \frac{v_0}{v}\varrho \quad \text{(siehe Formel (20))}$$

oder

$$v = v_0 \frac{\varrho}{\varphi(\varrho)}. \tag{56}$$

Da ϱ der Radius der Erdschicht, ausgedrückt in Teilen des Erdradius ist, so wissen wir, wie die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seis-

Digitized by Google

mischen Wellen mit der Tiefe sich ändert, sobald wir imstande sind, die Funktion $\varphi(\varrho)$ zu bestimmen.

Zur Vereinfachung der weiteren Berechnungen führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$x = \varrho^2,$$

$$y = \varphi^2(\varrho).$$

$$y = v^2 x = F(x) \tag{57}$$

$$v = v_0 \sqrt{\frac{x}{F(x)}}. \tag{58}$$

Die Kurve $y = F(x)$ ist uns unbekannt. Wir wissen nur, daß, da v^2 immer endlich ist, für

$$x = 0, \quad y = 0$$

und für

$$x = 1, \begin{cases} (r = r_0) \\ (v = v_0) \end{cases} y = 1$$

ist.

Die Kurve $y = F(x)$ hat die in Fig. 29 dargestellte Form.

Welche Form die Kurve auch immer hat, wir können jedenfalls immer einen Teil zwischen zwei willkürlichen Punkten, z. B. A_1 und A_2 durch die Funktion ausdrücken

$$y = a + bx + cx^2. \tag{59}$$

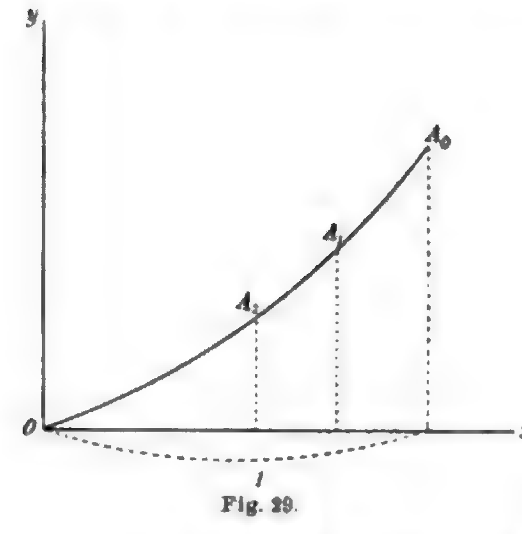


Fig. 29.

Je näher die Punkte A_1 und A_2 genommen sind, desto näher wird die durch die Gleichung (59) ausgedrückte Kurve mit der wahren Kurve $y = F(x)$ zusammenfallen.

Es ist selbstverständlich, daß für den Teil, der unmittelbar an den Punkt O grenzt, der entsprechende Koeffizient a gleich Null gesetzt werden soll.

Also setzen wir voraus, daß von A_0 an die Kurve auf einer gewissen Strecke zwischen $x = x_0 = 1$ und $x = x_1$ durch die Gleichung (59) dargestellt werden kann, wobei für

$$x = x_0 = 1, \quad y = y_0 = 1$$

und für

$$x = x_1, \qquad y = y_1$$

ist.

Die Aufgabe ist damit auf die Bestimmung der Koeffizienten a, b und c auf Grund der empirischen Abhängigkeit $\Delta = \Phi_1(\alpha)$ zurückgeführt.

Diese Koeffizienten sind aber verbunden durch

$$y_0 = a + bx_0 + cx_0^2$$

Digitized by Google

oder

$$b = \frac{y_0 - a - c x_0^2}{x_0} = \frac{y_0}{x_0} - \frac{1}{x_0} a - c x_0, \tag{60}$$

woraus wir für $x_0 = 1$

$$b = 1 - a - c \tag{61}$$

erhalten.

Wir wollen nun den Ausdruck des Integrals der Formel (24) aufsuchen. Führt man neue Variable ein, so erhält man

$$\Delta = 2 r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{\varrho \, d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = r_0 \alpha \int_{\varrho_m}^{1} \frac{dx}{x \sqrt{y - \alpha^2}}, \tag{62}$$

wo $x_m = \varrho_m^2$ ist.

Die entsprechende Größe y_m läßt sich auf Grund der Formel (22) bestimmen

$$y_m = \alpha^2. \tag{63}$$

Führen wir nun den Ausdruck y aus der Formel (59) in die Gleichung (62) ein, so erhalten wir

$$\Delta = r_0 \alpha \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}}. \tag{64}$$

Zuerst wollen wir den Ausdruck des unbestimmten Integrals, das wir mit I bezeichnen, aufsuchen

$$I = \int \frac{dx}{x \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \cdot \operatorname{arc\,tg} \frac{2(a - \alpha^2) + b x}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}}. \tag{65}$$

Die Richtigkeit dieser Formel können wir durch Differentiation beweisen.

Es ist

$$\frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \left[\operatorname{arctg} \frac{2(a - \alpha^2) + b x}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}} \right]'$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \frac{\left[\dfrac{2(a - \alpha^2) + b x}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}} \right]'}{1 + \left[\dfrac{2(a - \alpha^2) + b x}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}} \right]^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}} \cdot \frac{b^2 x - 4(a - \alpha^2) c x}{\{ b^2 - 4(a - \alpha^2) c \} x^2} = \frac{1}{x \sqrt{(a - \alpha^2) + b x + c x^2}}.$$

Die Formel (65) kann noch in einer anderen Form geschrieben werden.

$$I = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2(a - \alpha^2) + b x}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{y - \alpha^2}}.$$

Nun können wir in dem unbestimmten Integral die Grenzen einsetzen.

Digitized by Google

Die untere Grenze läßt sich aus folgender Bedingung ermitteln

$$y_m = a + bx_m + cx_m^2 = \alpha^2.$$

Wir nehmen an, daß die Konstanten ihre Zahlenwerte bis zu diesem x_m beibehalten.

Da für $x = x_m$, $y_m = \alpha^2$ ist, so verwandelt sich der Nenner des vorhergehenden Ausdrucks in Null und folglich das Argument bei arctg in ∞.

Da aber andererseits für die obere Grenze $x = x_0 = 1$ auch $y = 1$ ist, so erhält man

$$[I]_{x_m}^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}}\left[\operatorname{arctg} \frac{2(a - \alpha^2) + b}{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Führen wir nun die folgende Bezeichnung ein

$$w = \frac{2\sqrt{\alpha^2 - a} \cdot \sqrt{1 - \alpha^2}}{2(\alpha^2 - a) - b}. \tag{66}$$

Dann ist

$$[I]_{x_m}^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}}\left[\operatorname{arctg} \frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2}\right].$$

Es ist leicht zu sehen, daß $\operatorname{arctg} \frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} w$ ist.

Denn setzt man

$$\operatorname{arctg} \frac{-1}{w} = u,$$

so erhält man

$$\operatorname{arctg} \frac{-1}{w} - \frac{\pi}{2} = u - \frac{\pi}{2}.$$

Hieraus folgt

$$\operatorname{tg}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}}{1 + \operatorname{tg} u \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{\operatorname{tg} u}.$$

Aber es ist

$$\operatorname{tg} u = -\frac{1}{w},$$

folglich

$$\operatorname{tg}\left(u - \frac{\pi}{2}\right) = w$$

und

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{w}\right) - \frac{\pi}{2} = u - \frac{\pi}{2} = \operatorname{arctg} w$$

oder noch

$$\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{w}\right) = \frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg} w.$$

Also erhalten wir

$$[I]_{x_m}^1 = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \cdot \operatorname{arctg} w$$

und

$$\Delta = \frac{r_0 \alpha}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \cdot \operatorname{arctg} w. \tag{67}$$

Digitized by Google

Hat man nun zwei zusammengehörige Werte Δ und α und berücksichtigt man die Beziehung (61), so erhält man drei Gleichungen, aus denen die drei Konstanten a, b und c der Formel (59) ermittelt werden können.

Dann liefert uns die Formel (58) die Abhängkeit der Geschwindigkeit v von der Tiefe der Schicht.

In ähnlicher Weise wie Δ können wir auch die Laufzeit T ermitteln. Die Formel (27) gibt

$$T = 2 n_0 r_0 \int_{\varrho_m}^{1} \frac{v^2 \varrho d\varrho}{\sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} = \Phi_2(\alpha) \tag{27}$$

oder

$$T = n_0 r_0 \int_{\varrho_m}^{1} \frac{v^2 \varrho^2 \cdot \varrho d\varrho}{\varrho^2 \sqrt{\varphi^2(\varrho) - \alpha^2}} .$$

Führt man hier neue Variablen x und y ein, so ergibt sich

$$T = n_0 r_0 \int_{x_m}^{1} \frac{y dx}{x \sqrt{y - \alpha^2}} .$$

Führt man nun hierin den Ausdruck y aus der Formel (59) ein, so ist

$$T = n_0 r_0 \int_{x_m}^{1} \frac{a + bx + cx^2}{x \sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} dx$$

$$= n_0 r_0 \left[a \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x \sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} + b \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} \right.$$

$$\left. + c \int_{x_m}^{1} \frac{x dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} \right] .$$

Wir wollen uns nun mit der Bestimmung der entsprechenden unbestimmten Integrale beschäftigen.

Das erste Integral ist dasselbe, was wir vorher mit I bezeichnet haben.

Bezeichnen wir das zweite Integral mit I_1 und das dritte Integral mit I_2.

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} ,$$

$$I_2 = \int \frac{x dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}} .$$

Wir beginnen mit der Bestimmung des dritten Integrals

$$I_2 = \frac{1}{2c} \int \frac{(b + 2cx - b) dx}{\sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2}}$$

$$= \frac{1}{2c} \left[2 \sqrt{(a - \alpha^2) + bx + cx^2} - b I_1 \right] .$$

Digitized by Google

Für $c > 0$

$$I_1 = \int \frac{dx}{\sqrt{(a-\alpha^2) + bx + cx^2}} = \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{b + 2cx + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{(a-\alpha^2) + bx + cx^2}}{b + 2cx - 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{(a-\alpha^2) + bx + cx^2}}.$$

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich durch Differentiation überzeugen, was wir hier nicht ausführen wollen.

Also haben wir

$$T = n_0 r_0 [aI + bI_1 + cI_2]_{x_m}^1$$
$$= n_0 r_0 \left[aI + \tfrac{1}{2} bI_1 + \sqrt{(a-\alpha^2) + bx + cx^2}\right]_{x_m}^1.$$

Setzt man hier noch die Ausdrücke I und I_1 ein und geht zur Grenze über, so ergibt sich unter Bezugnahme auf die Relationen (61) und (63)

$$T = n_0 r_0 \left[a \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 - a}} \operatorname{arctg} w + \frac{1}{2} b \frac{1}{2\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{b + 2c + 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{1-\alpha^2}}{b + 2c - 2\sqrt{c} \cdot \sqrt{1-\alpha^2}} + \sqrt{1-\alpha^2}\right]. \quad (68)$$

Diese Formel gibt uns also die Werte von Δ und T, ausgedrückt durch die Konstanten a, b und c und den variablen Parameter α.

Eliminieren wir aus diesen beiden Ausdrücken α, so erhalten wir T als Funktion von Δ und den Konstanten a, b und c

$$T = \Psi(\Delta),$$

d. h. wir erhalten für den betreffenden Teil die theoretische Formel der Laufzeitkurve.

Eine solche Elimination kann man nun nicht ausführen, denn α ist in den algebraischen und transzendenten Funktionen mit enthalten; kennt man aber die Größen der Konstanten a, b und c, so kann man für ein jedes gegebene α die entsprechenden Größen T und Δ berechnen und sie dann in einer Tabelle zusammenstellen oder die Abhängigkeit T von Δ graphisch darstellen.

Hätten wir in Formel (59) noch ein Glied mit x^3, z. B. dx^3, mitgenommen, so würden wir ein noch genaueres Resultat erhalten; vom praktischen Standpunkt aus wäre dieses aber nicht zweckmäßig, denn die Rechnung würde uns dann zu elliptischen Integralen geführt haben, deren Lösung sehr kompliziert ist.

Viel zweckmäßiger ist es, umgekehrt zu handeln, nämlich in Formel (59) nur zwei Glieder mitzunehmen, dafür aber die beiden Punkte A_1 und A_2 (Fig. 29), zwischen denen man die Koeffizienten als konstant annimmt, einander zu nähern.

Wir werden auch diesen Weg verfolgen.

Eine jede Funktion kann mit größerer oder kleinerer Annäherung innerhalb gewisser Grenzen durch ein Polynom zweiten Grades in der Art der Formel (59) dargestellt werden; berücksichtigt man dabei, daß

$$y = v^2 x \quad \text{(Formel (57))}$$

Digitized by Google

ist und daß v^2 für $x = 0$ endlich bleibt, so ist natürlich in Formel (59) der Koeffizient $a = 0$ zu setzen.

Dann ist

$$y = bx + cx^2 \tag{69}$$

oder

$$v^2 = b + cx. \tag{70}$$

c ist eine positive Größe, denn $v^2 = \left(\frac{v_0}{v}\right)^2$ nimmt im allgemeinen mit x zu.

Bei Beibehaltung des dreigliedrigen Ausdruckes (59) hat man zu setzen

$$v^2 = \frac{a}{x} + b + cx. \tag{71}$$

Für den Teil der Kurve $y = F(x)$, der an das Zentrum O (Fig. 29) anstößt, muß man, wie wir früher gesehen haben, unbedingt $a = 0$ setzen, denn für $x = 0$ bleibt v^2 endlich. Für andere Teile der Kurve können wir die Abhängigkeit v^2 von x durch eine Funktion von der Form (71) ausdrücken; hierzu muß man nun die Koeffizienten a, b und c in entsprechender Weise bestimmen. Haben wir drei Paar der Größen v^2 und x, so können wir mit ihrer Hilfe die Werte dieser Koeffizienten bestimmen. Die Frage ist nun darauf zurückgeführt, durch drei gegebene Punkte, die auf der Kurve $y = v^2 x = F(x)$ liegen, eine Kurve zweiter Ordnung zu beschreiben. Liegen die Punkte genügend nahe aneinander, so wird diese Kurve sich sehr wenig von der vorgelegten $y = F(x)$ unterscheiden.

Wir setzen nun voraus, daß in dem betreffenden Intervall v^2 in seiner Abhängigkeit von x durch Formel (70) ausgedrückt ist und y durch (69).

Demgemäß gestalten wir die vorhergehenden Gleichungen um, indem wir $a = 0$ setzen. Diese Gleichungen gehören zu dem Teil der Kurve, der an der Erdoberfläche beginnt.

In diesem Falle gibt die Formel (61)

$$b = 1 - c. \tag{72}$$

Aus der Formel (66) für $a = 0$ erhält man:

$$w = \frac{2\alpha\sqrt{1-\alpha^2}}{2\alpha^2 - 1 + c}.$$

Diesen Ausdruck können wir folgendermaßen umgestalten:

$$\alpha = \cos e_0,$$

$$\sqrt{1-\alpha^2} = \sin e_0,$$

$$2\alpha^2 - 1 = 2\cos^2 e_0 - 1 = \cos 2e_0,$$

folglich

$$w = \frac{\sin 2e_0}{\cos 2e_0 + c}. \tag{73}$$

Aus der Formel (67) folgt, daß

$$\vartheta = \frac{\Delta}{r_0} = \operatorname{arctg} w. \tag{74}$$

Digitized by Google

Kennen wir die entsprechenden Größen Δ und e_0 aus dem Hodographen, so können wir sogleich die Werte der Konstante c berechnen.

Aus der Formel (68) für $\alpha = 0$ ergibt sich

$$T = n_0 r_0 \left[\frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}\sqrt{1-\alpha^2}}{1+c-2\sqrt{c}\sqrt{1-\alpha^2}} + \sqrt{1-\alpha^2}\right]$$

oder

$$T = n_0 r_0 \left[\sin e_0 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}\cdot\sin e_0}{1+c-2\sqrt{c}\cdot\sin e_0}\right]. \tag{75}$$

Eliminiert man e_0 aus den Formeln (74) und (75), so erhält man die theoretische Form der Laufzeitkurve.

Wir wollen nun sehen, was uns die vorigen Formeln geben, wenn $c = 0$ ist, d. h. wenn v^2 überall gleich 1 ist, was der Voraussetzung entspricht, daß die Schichten des Erdkörpers gleichartig sind.

Dann ist

$$w = \operatorname{tg} 2e_0$$

und

$$\Delta = r_0 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 2e_0) = r_0 \cdot 2e_0.$$

In diesem Falle ist $2e_0$ nichts anderes als der Winkel ϑ im Zentrum, der der Epizentraldistanz Δ entspricht. Folglich fällt die Trajektorie des Strahles mit der Sehne EB (Fig. 19) zusammen, welche das Epizentrum mit dem Beobachtungsort verbindet.

Zum Aufsuchen der Laufzeit T bestimmen wir den Wert des zweiten Gliedes der Formel (75), das c enthält, wenn wir letzteres gleich Null setzen.

Für kleine Werte von c ist

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \lg \frac{1+c+2\sqrt{c}\cdot\sin e_0}{1+c-2\sqrt{c}\sin e_0}$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \left[\lg \frac{1+\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\cdot\sin e_0}{1-\frac{2\sqrt{c}}{1+c}\cdot\sin e_0}\right]$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1-c}{\sqrt{c}} \cdot \frac{4\sqrt{c}}{1+c} \cdot \sin e_0 \left[1 + \frac{4}{3} \cdot \frac{c}{(1+c)^2} \sin^2 e_0\right]$$

$$= \frac{1-c}{1+c} \cdot \sin e_0 \cdot \left[1 + \frac{4}{3} c \sin^2 e_0\right].$$

Also für $c = 0$

$$T = 2 n_0 r_0 \sin e_0 = 2 r_0 \sin \frac{\vartheta}{2} \cdot \frac{1}{v_0}.$$

$2 r_0 \sin \frac{\vartheta}{2}$ ist die Länge der Sehne EB.

Wenden wir uns wieder der Formel (74) zu.

Bei ihrer Ableitung haben wir vorausgesetzt, daß für alle Schichten, welche der seismische Strahl durchdringt, c denselben Wert behält, d. h.

Digitized by Google

daß v^2 in den Grenzen von $x = 1$ bis zu $x = x_m$ durch eine Funktion von der Form (70) mit demselben Werte von c dargestellt werden kann.

Die Größe x_m, die der größten Tiefe des eindringenden Strahles entspricht, läßt sich aus der Beziehung (63) bestimmen

$$y_m = bx_m + cx_m^2 = \alpha^2 = \cos^2 e_0 \quad \text{(s. Formel (63))}.$$

Hieraus erhalten wir, da $b = 1 - c$,

$$x_m^2 + \frac{1-c}{c} x_m - \frac{\alpha^2}{c} = 0$$

oder

$$x_m = \frac{1}{2c} \cdot \left[\sqrt{(1-c)^2 + 4c\alpha^2} - (1-c)\right]. \tag{76}$$

Für $c = 0$ somit

$$x_m = \alpha^2 = \cos^2 e_0,$$

wie es auch sein soll, denn es ist $r_m = r_0 \cos e_0$, folglich $\varrho_m = \cos e_0$.

Den Koeffizienten c können wir nur in den Grenzen innerhalb einer gewissen Schicht als konstant betrachten; mit dem Übergange zu der nächsten Schicht müssen wir dagegen c ändern usw.

Das heißt also, daß wir die Kurve $y = F(x)$ (Fig. 29) einteilen, z. B. von A_0 bis A_1, von A_1 bis A_2 usw., und für jeden Teil ein bestimmtes c annehmen.

Wir wollen nun sehen, wie man das in der Praxis realisieren und wie man die Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit seismischer Strahlen von der Tiefe bestimmen kann.

Dazu wählen wir eine bestimmte anfängliche Epizentralentfernung Δ z. B. 1000 km, und bestimmen nach der Laufzeitkurve die entsprechende Größe $\alpha = \cos e_0$ (Formel (54)).

Nach diesen Angaben berechnen wir c.

Aus der Formel (74) haben wir

$$w = \operatorname{tg} \frac{\Delta}{r_0} = \operatorname{tg} \vartheta,$$

und aus der Formel (73)

$$w \cos 2e_0 + wc = \sin 2e_0$$

oder

$$c = \frac{1}{w} \left\{\sin 2e_0 - w \cos 2e_0\right\}.$$

Setzt man hierin den Ausdruck für w aus der vorhergehenden Formel ein, so erhält man

$$c = \frac{1}{\operatorname{tg} \vartheta} \cdot \left\{\sin 2e_0 - \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \cos 2e_0\right\}$$

oder

$$c = \frac{\sin(2e_0 - \vartheta)}{\sin \vartheta}. \tag{77}$$

Diese Formel ist sehr einfach und elegant.

Digitized by Google

Mit den bestimmten Größen $\alpha = \cos e_0$ und c berechnen wir nach der Formel (76) die entsprechende Größe x_m.

Zu dem Zweck führen wir den Ausdruck c aus der Formel (77) in die Formel (76) ein

$$x_m = \frac{\sin\vartheta}{2\sin(2e_0-\vartheta)}\left[\sqrt{1+2c(2\alpha^2-1)+c^2} - \left\{1-\frac{\sin(2e_0-\vartheta)}{\sin\vartheta}\right\}\right].$$

Wir suchen zuerst den Ausdruck der Wurzel auf

$$\sqrt{1+2c(2\alpha^2-1)+c^2} = \sqrt{1+\frac{\sin^2(2e_0-\vartheta)}{\sin^2\vartheta}+2\frac{\sin(2e_0-\vartheta)}{\sin\vartheta}\cos 2e_0}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta+\sin(2e_0-\vartheta)\sin(2e_0+\vartheta)}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{\sin^2\vartheta+\sin^2 2e_0\cos^2\vartheta-\sin^2\vartheta\cos^2 2e_0}$$

$$= \frac{1}{\sin\vartheta}\sqrt{1-\cos^2 2e_0}$$

$$= \frac{\sin 2e_0}{\sin\vartheta}.$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck in die vorige Formel für x_m ein, so ist

$$x_m = \frac{1}{2\sin(2e_0-\vartheta)}\cdot[\sin 2e_0 - \sin\vartheta + \sin(2e_0-\vartheta)]$$

$$= \frac{1}{2\sin(2e_0-\vartheta)}[\sin 2e_0(1+\cos\vartheta) - \sin\vartheta(1+\cos 2e_0)]$$

$$= \frac{2\sin e_0\cos e_0\cos^2\frac{\vartheta}{2} - 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}\cos^2 e_0}{\sin 2\left(e_0-\frac{\vartheta}{2}\right)}$$

$$= \frac{2\cos e_0\cos\frac{\vartheta}{2}\sin\left(e_0-\frac{\vartheta}{2}\right)}{2\sin\left(e_0-\frac{\vartheta}{2}\right)\cos\left(e_0-\frac{\vartheta}{2}\right)},$$

oder schließlich

$$x_m = \frac{\cos e_0\cos\frac{\vartheta}{2}}{\cos\left(e_0-\frac{\vartheta}{2}\right)}. \tag{78}$$

Diese Formel ist ebenfalls sehr einfach.

Ist $c = 0$, d. h. sind alle Schichten gleichartig, so ist $e_0 = \frac{\vartheta}{2}$ und $x_m = \cos^2 e_0$, was, wie wir früher gesehen haben, in diesem Falle auch stattfinden soll.

Die Formel (78) bestimmt die Tiefe der Schicht, bis zu welcher der seismische Strahl, der die Epizentralentfernung Δ durchläuft, dringt.

Digitized by Google

In dieser Tiefe ist

$$\varrho_m = \sqrt{x_m}, \quad y_m = \alpha^2 - \cos^2 e_0,$$

und

$$\nu_m = \sqrt{\frac{y_m}{x_m}} = \frac{\cos e_0}{\sqrt{x_m}} \quad \text{(Formel (57))}.$$

Bezeichnen wir die Werte r, n und v für diese Tiefe mit dem Index 1, dann ist

$$r_1 = \sqrt{x_m} \cdot r_0, \tag{79}$$

da aber $\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v}$, so ist

$$n_1 = n_0 \frac{\cos e_0}{\sqrt{x_m}} \tag{80}$$

und

$$v_1 = v_0 \frac{\sqrt{x_m}}{\cos e_0}. \tag{81}$$

Diese letzte Formel liefert uns die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen in der Tiefe, welche dem Abstande r_1 vom Erdzentrum entspricht.

Ist nun r_1 und v_1 bestimmt, so gehen wir zur nächsten Epizentralentfernung Δ' über, z. B. $\Delta' = 2\Delta = 2000$ km.

Nach der Laufzeitkurve bestimmen wir die entsprechende Größe $\alpha' = \cos e'$.

Wir können in bezug auf die Kugel vom Radius r_1 ganz dieselben Erwägungen anstellen, wie wir früher in bezug auf die Kugel vom Radius r_0 getan haben.

Für diese neue Kugel wollen wir die Größen r, n und v in Teilen ihrer Werte an der Oberfläche der Kugel vom Radius r_1 ausdrücken und dementsprechend setzen:

$$\left.\begin{aligned} \varrho_1 &= \frac{r}{r_1} \\ \nu_1 &= \frac{n}{n_1} = \frac{v_1}{v} \end{aligned}\right\} \tag{82}$$

Der seismische Strahl, der aus der Epizentralentfernung Δ' kommt, tritt in die neue Kugel ein und tritt dann aus derselben heraus unter dem Winkel e_1.

Setzen wir

$$\cos e_1 = \alpha_1.$$

Der Wert läßt sich sofort aus der Formel (18) berechnen:

$$\nu_m \varrho_m \cos e_1 = \alpha' = \cos e'. \tag{83}$$

Da ν_m und ϱ_m bekannt sind und α' angegeben ist, so kann hieraus e_1 bestimmt werden.

Der Winkel am Zentrum, der dem Wege des seismischen Strahles im Innern der zweiten Kugel mit dem Radius r_1 entspricht, sei ϑ_1 und der

Digitized by Google

Winkel am Zentrum, der der Epizentralentfernung Δ' auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r_0 entspricht, sei $\vartheta' = \frac{\Delta'}{r_0}$.

In Figur 30 sind:

$$\text{Bogen } APB = \Delta, \quad \text{und} \quad \text{Bogen } A'PB' = \Delta',$$

$$\angle AOB = \vartheta \quad \text{und} \quad \angle A'OB' = \vartheta',$$

$$OA' = OA = OB = OB' = r_0;$$

$$OA_1 = OM = OB_1 = r_1,$$

und

$$OM_1 = r_2.$$

$$\angle A_1OB_1 = \vartheta_1,$$

wobei

$$\vartheta_1 < \vartheta'.$$

Es erübrigt nun noch die Differenz zwischen ϑ' und ϑ_1 zu bestimmen. Diese Differenz ist durch den Lauf des Strahles in der Schicht, die zwischen den Radien r_0 und r_1 eingeschlossen ist, bedingt.

Die allgemeine Formel (19) gibt uns für die Änderung des Winkels θ

$$d\theta = \frac{\alpha\, d\varrho}{\varrho\sqrt{v^2\varrho^2 - \alpha^2}}. \tag{19}$$

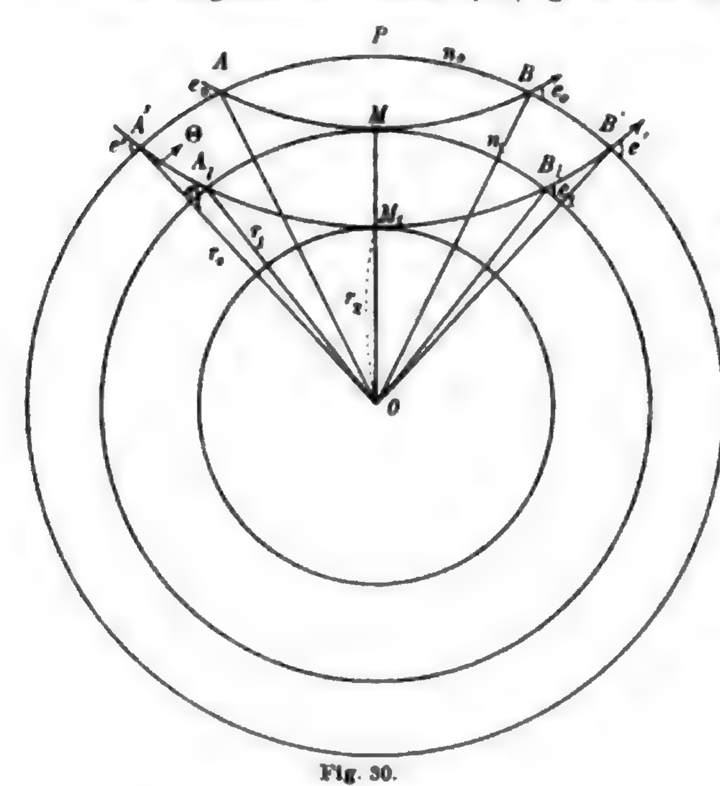


Fig. 30.

Wir müssen diese Formel auf den Lauf des Strahles in der ersten, obersten Schicht zwischen r_0 und r_1 anwenden und deshalb hierin setzen

$$\varrho = \frac{r}{r_0},$$

$$x = \varrho^2,$$

$$v^2\varrho^2 = v^2 x = y = bx + cx^2$$

und

$$\alpha = \alpha'.$$

Hier ist

$$b = 1 - c,$$

wo c nach Formel (77) für die obere Schicht bestimmt ist.

Also

$$d\theta = \frac{1}{2}\alpha' \frac{dx}{x\sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}.$$

Integriert man diesen Ausdruck in den Grenzen, von der Schicht mit dem Radius r_1 bis zur Oberfläche der Erde, oder von $x = x_m$ bis $x = 1$

Digitized by Google

und multipliziert man das Resultat mit 2, so erhält man die Differenz zwischen den Winkeln ϑ' und ϑ_1.

Folglich

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \alpha' \int_{x_m}^{1} \frac{dx}{x\sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}. \tag{84}$$

Der Ausdruck des unbestimmten Integrals I' ergibt sich aus der Formel (65), wenn man $a = 0$ setzt.

$$I' = \int \frac{dx}{x\sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}} = \frac{1}{\alpha'} \cdot \operatorname{arctg} \frac{bx - 2\alpha'^2}{2\alpha'\sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}. \tag{85}$$

Führt man folgende Bezeichnung ein:

$$w' = \frac{2\alpha'\sqrt{bx + cx^2 - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - bx}, \tag{86}$$

so erhält man (s. die vorhergehende Ableitung der Formel (67))

$$I' = \frac{1}{\alpha'} \operatorname{arctg} \frac{-1}{w'} = \frac{1}{\alpha'} \left[\operatorname{arctg} w' + \frac{\pi}{2}\right].$$

Folglich

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg} w' + \frac{\pi}{2}\right]_{x_m}^{1}$$

oder

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg} \frac{2\alpha'\sqrt{b + c - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - 1 + c} - \operatorname{arctg} \frac{2\alpha'\sqrt{bx_m + cx_m^2 - \alpha'^2}}{2\alpha'^2 - (1 - c)x_m}\right].$$

Es ist aber

$$b + c = 1,$$

$$bm_m + cx_m^2 = y_m = \alpha^2 = \cos^2 e_0$$

und

$$\alpha' = \cos e',$$

folglich

$$\vartheta_1 = \vartheta' - \left[\operatorname{arctg} \frac{\sin 2e'}{\cos 2e' + c} - \operatorname{arctg} \frac{2\cos e'\sqrt{\cos^2 e_0 - \cos^2 e'}}{2\cos^2 e' - (1 - c)x_m}\right]. \tag{87}$$

Da c und x_m schon aus den Formeln (77) und (78) bekannt sind, so ist ϑ_1 zu bestimmen.

Jetzt übertragen wir unsere vorhergehenden Erwägungen auf die Kugel mit dem Radius r_1.

Der Strahl, der in diese Kugel unter dem Winkel e_1, der durch die Gleichung (83) bestimmt wird, eingetreten ist, dringt bis zur maximalen Tiefe M_1, die dem Radius r_2 entspricht. Die entsprechende Größe ρ_1 sei $\rho_{m_1} = \frac{r_2}{r_1}$.

Setzen wir $\rho_1^2 = x_1$ und sei ferner unter den Schichten mit dem Radius r_1 und r_2 folgende Beziehung gültig:

$$v_1^2 = b_1 + c_1 x_1 \quad \text{(Formel (70))}$$

Digitized by Google

und

$$y_1 = \nu_1{}^2 x_1 = b_1 x_1 + c_1 x_1{}^2.$$

Wir haben für

$$x_1 = 1,\ \varrho_1 = 1,\ r = r_1,\ n = n_1 \text{ und } \nu_1 = 1;$$

$$b_1 + c_1 = 1$$

und für

$$x_1 = x_{m_1} = (\varrho_{m_1})^2, \qquad r = r_1 \varrho_{m_1} = r_2.$$

In diesem Falle ist $\cos e = 1$ und

$$\nu_{m_1}^2 \varrho_{m_1}^2 = \nu_{m_1}^2 x_{m_1} = y_{m_1} = \alpha_1 = \cos e_1.$$

Wenden wir auf diese Kugel, wie früher, dieselbe Formel (67) an, so haben wir für $a = 0$

$$\vartheta_1 = \operatorname{arctg} w_1,$$

wo

$$w_1 = \frac{\sin 2e_1}{\cos 2e_1 + c_1} \qquad \text{(Formel (73))}$$

ist. Die Formeln sind mit den vorhergehenden völlig identisch, jedoch steht bei den einzelnen Größen der Index 1.

Wir finden also

$$c_1 = \frac{\sin(2e_1 - \vartheta_1)}{\sin \vartheta_1} \qquad \text{(Formel (77))}$$

$$x_{m_1} = \frac{\cos e_1 \cos \frac{\vartheta_1}{2}}{\cos\left(e_1 - \frac{\vartheta_1}{2}\right)} \qquad \text{(Formel (78))}$$

$$\nu_{m_1} = \frac{\cos e_1}{\sqrt{x_{m_1}}},$$

$$\varrho_{m_1} = \sqrt{x_{m_1}}.$$

Da aber

$$\varrho_1 = \frac{r}{r_1} \quad \text{und} \quad \nu_1 = \frac{n}{n_1}$$

ist, so ergibt sich, wenn man die Größen n und v in dem Abstande r vom Zentrum der Kugel entsprechend mit n_2 und v_2 bezeichnet

$$\left.\begin{aligned} r_2 &= \sqrt{x_{m_1}} \cdot r_1 \\ n_2 &= n_1 \frac{\cos e_1}{\sqrt{x_{m_1}}} \\ v_2 &= v_1 \frac{\sqrt{x_{m_1}}}{\cos e_1} \end{aligned}\right\} \qquad (88)$$

Die letzte Formel gibt uns die Geschwindigkeit v_2 im Abstande r_2 vom Erdzentrum.

Digitized by Google

Diese Analyse kann nun nach demselben Schema weiter fortgeführt werden.

Wir nehmen die Kugel mit dem Radius r_2 und drücken die verschiedenen r und n in Teilen ihrer Werte an der Oberfläche dieser zweiten Kugel aus: z. B.

$$\varrho_2 = \frac{r}{r_2},$$

$$\nu_2 = \frac{n}{n_2} = \frac{v_2}{v}.$$

Danach betrachten wir eine neue Epizentraldistanz Δ'' mit dem entsprechenden Winkel e'', wo $\cos e'' = \alpha''$.

Dann läßt sich der Eintrittswinkel e_2 des Strahles in diese dritte Kugel aus der der Gleichung (83) ähnlichen bestimmen:

$$\frac{n_2}{n_0} \cdot \frac{r_2}{r_0} \cos e_2 = \alpha'' = \cos e''.$$

Es bleibt dann nur noch übrig, den Winkel am Zentrum ϑ_2, der dem Wege des seismischen Strahles in dieser dritten Schicht entspricht, zu bestimmen.

Hier ist nun gesondert die Änderung θ sowohl in der ersten, wie auch in der zweiten Schicht zu berechnen.

Wir kommen wieder zu Integralen von der Form (84), haben aber dabei zu beachten, daß in dem zweiten Integral für die zwischen r_1 und r_2 eingeschlossene Schicht die Konstanten b_1 und c_1 dem Falle entsprechen, daß die Größen r und n durch ϱ_1 und ν_1 ausgedrückt sind, d. h. in Teilen ihrer Werte an der Oberfläche der Kugel mit dem Radius r_1.

Hierauf wollen wir nicht weiter eingehen, da der Weg zur Lösung der vorliegenden Aufgabe klar ist.

Wir können also mit Hilfe der Laufzeitkurven die Änderung der Geschwindigkeit sowohl der longitudinalen wie auch der transversalen Wellen von einer Schicht zur anderen nach der Tiefe zu genau verfolgen.

Je mehr Intervalle wir nehmen, desto besser lernen wir das Gesetz der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit der seismischen Wellen mit der Tiefe kennen.

Zu demselben Resultat wären wir auch ohne die Laufzeitkurven gekommen, wenn es uns gelungen wäre, den Emergenzwinkel e_0 in verschiedenen Epizentralentfernungen Δ direkt auszumessen.

Wir sehen also, daß die eingehende Untersuchung der Trajektorie der seismischen Strahlen uns den Weg zur Kenntnis der physikalischen Eigenschaften der Erdschichten eröffnet, die in Tiefen liegen, die uns sonst ganz unzugänglich sind.

Die Trajektorie der seismischen Strahlen im Innern der Erde kann auch aus geometrischen Erwägungen auf Grund des schon früher abgeleiteten Ausdruckes für den Krümmungsradius der Trajektorie des Strahles R (Formel (31)) ermittelt werden. Auf diese Methode hat zuerst Wiechert[10]) hingewiesen.

Digitized by Google

Wir hatten früher den Ausdruck:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r_0 v} \cdot \frac{dv}{d\varrho} \cdot \cos e. \tag{31}$$

Nehmen wir nun irgendeine bestimmte Schicht im Innern der Erde an und bezeichnen die Winkel, unter denen die seismischen Strahlen ein- und austreten mit e_1, e_2, e_3 usw., und die entsprechenden Krümmungsradien der Strahlentrajektorie in diesen Punkten mit R_1, R_2, R_3 usw., so haben wir auf Grund des vorhergehenden Ausdruckes folgende Beziehung:

$$R_1 : R_2 : R_3 : \cdots = \frac{1}{\cos e_1} : \frac{1}{\cos e_2} : \frac{1}{\cos e_3} \cdot \tag{89}$$

Es sei in Figur 31 E das Epizentrum des Bebens, A_1, A_2, A_3 usw. seien eine Reihe Punkte auf der Oberfläche der Erde, die sich in verschiedenen Entfernungen Δ_1, Δ_2, Δ_3 usw. vom Epizentrum befinden.

Der seismische Strahl, der von E ausgeht und nach dem nächsten Punkte A_1 mit der Entfernung Δ_1 gelangt, dringt ins Innere der Erde bis zu einer Tiefe ein, die dem Abstande r_1 vom Erdzentrum entspricht.

Wir wollen Δ_1 so klein nehmen, daß wir den Krümmungsradius R_1 der Trajektorie des Strahles, welche in der Schicht zwischen r_1 und der Oberfläche eingeschlossen ist, als konstant betrachten können.

Dieser Voraussetzung entsprechend können wir in die Formel (31) für die ganze Schicht einen mittleren Wert einführen, also

$$\frac{1}{v}\frac{dv}{d\varrho} = \frac{d \lg v}{d\varrho}.$$

Der Epizentralentfernung Δ_1 entspricht nach der Laufzeitkurve ein bestimmter Emergenzwinkel e_1.

Fig. 31.

Dann ziehen wir zwei Geraden A_1P_1 und EP_1, die den Winkel e_1 mit den entsprechenden Radien der Kugel OA_1 und OE bilden sollen.

Der Kreuzungspunkt P_1 dieser Geraden bildet den Mittelpunkt des Kreises, welcher der Strahlentrajektorie in der ersten Schicht entspricht. Der Radius des Kreises ist $R_1 = P_1A_1$.

Digitized by Google

Der dem Erdmittelpunkt am nächsten liegende Punkt dieses Kreises hat den Radius $OD_1 = r_1$, der somit die untere Grenze der ersten Schicht bestimmt.

Wir gehen nun zum Punkte A_2 im Abstande Δ_2 von E über. Diesem Abstande entspricht der Winkel e_2.

In den Punkten A_2 und E ziehen wir wieder zwei Gerade A_2P_2 und EP_2' unter dem Winkel e_2 zu den entsprechenden Radien der Kugel OA_2 und OE.

Auf diesen Geraden tragen wir die Größe R_2 ab, welche dem Krümmungsradius dieses zweiten Strahles in der ersten Schicht entspricht. R_2 läßt sich unmittelbar aus der Formel (89) ermitteln, denn in der ganzen ersten Schicht nehmen wir $\frac{d \lg v}{d\varrho}$ als konstant an.

Also

$$R_2 = R_1 \cdot \frac{\cos e_1}{\cos e_2}. \tag{90}$$

Wir erhalten so die Punkte P_2 und P_2', von denen als Mittelpunkten wir mit dem Radius R_2 die Bogen A_2B_2 und EB_2' zeichnen, die also die Teile der Trajektorie des zweiten Strahles in der ersten Schicht vorstellen.

In gleicher Weise zeichnen wir von den Punkten P_3 und P_3' aus mit dem Radius $R_3 = R_1 \frac{\cos e_1}{\cos e_3}$ die Bogen A_3B_3 und EB_3', die dem Teile der Trajektorie des seismischen Strahles mit der Epizentralentfernung Δ_3 entsprechen usw.

Wir können so für eine beliebige Entfernung Δ die Trajektorie des seismischen Strahles in der ersten Schicht zeichnen.

Wir gehen nun zur zweiten Schicht über, welche zwischen den Radien r_1 und $r_2 = OD_2$ sich befindet und innerhalb deren wir wiederum die Trajektorie mit einem Kreise identifizieren.

Um die Trajektorie des zweiten Strahles, der von E nach A_2 geht, in der zweiten Schicht zu zeichnen, verlängern wir die Geraden B_2P_2 und $B_2'P_2'$, die zu dem Element der Trajektorie des Strahles in den Punkten B_2 und B_2' senkrecht sind, bis zu ihrem Schnittpunkte im Punkte Q_2.

Von dem Punkte Q_2 als Mittelpunkt zeichnen wir wiederum mit dem Radius $R_2' = Q_2B_2$ den Bogen $B_2'B_2$, welcher uns die Trajektorie des zweiten Strahles in der zweiten Schicht liefert. Der dem Erdmittelpunkt am nächsten liegende Punkt dieses Kreises entspricht dem Radius $r_2 = QD_2$, der die untere Grenze der zweiten Schicht bestimmt.

Den Emergenzwinkel e_2' des zweiten Strahles aus der zweiten Schicht kann man aus der Figur entnehmen.

Betrachten wir nun den dritten Strahl, der von E nach A_3 geht.

Die Teile der Trajektorie dieses Strahles B_3A_3 und EB_3' in der ersten Schicht sind schon bekannt und wir können daher den entsprechenden Winkel e_3' dieses Strahles aus der zweiten Schicht bestimmen.

Der entsprechende Krümmungsradius R_3' dieses Strahles in der zweiten

Schicht läßt sich nach einer der Formel (90) ähnlichen Formel bestimmen; es ist nämlich

$$R_3' = R_2' \cdot \frac{\cos e_2'}{\cos e_3'}.$$

Wir tragen nun auf der Verlängerung der Linien $B_3 P_3$ und $B_3' P_3'$, die zu den Elementen der Trajektorie des Strahles in den Punkten B_3 und B_3' senkrecht sind, die Länge R_3' ab. Wir erhalten die Punkte Q_3 und Q_3'.

Nun zeichnen wir um die Punkte Q_3 und Q_3' als Mittelpunkte mit dem Radius R_3' die Bogen $B_3 C_3$ und $B_3' C_3'$, die die Teile der Trajektorie des dritten Strahles in der zweiten Schicht darstellen usw.

Um die Trajektorie dieses dritten Strahles in der dritten Schicht zu schließen, verlängern wir die Linien $C_3 Q_3$ und $C_3' Q_3'$ bis zu ihrem Schnittpunkte im Punkte M_3, und zeichnen dann um denselben Punkt M_3 als Mittelpunkt mit dem Radius $M_3 C_3$ den Bogen $C_3 C_3'$, welcher die Trajektorie des dritten Strahles in der dritten Schicht liefert.

Der zum Erdzentrum am nächsten liegende Punkt dieses Kreises entspricht dem Radius $r_3 = OD_3$, der die untere Grenze der dritten Schicht bestimmt.

So können wir graphisch allmählich von einer Epizentralentfernung und einer Schicht zur nächsten übergehen und die Trajektorie der longitudinalen und transversalen seismischen Wellen im Innern des Erdballs für eine beliebige Epizentralentfernung darstellen.

Mit der Untersuchung der Frage nach den Trajektorien der seismischen Strahlen und nach der Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen von der Schichttiefe beschäftigten sich Wiechert, Zoeppritz und Geiger[11]), wobei sie für die Berechnung von v als einer Funktion von r sich etwas anderer Formeln bedienten, als diejenige, welche hier abgeleitet worden sind; das Wesen der Sache ändert sich deswegen jedoch nicht.

Die Resultate der letzten Untersuchungen Zoeppritz und Geigers[12]), die im folgenden kurz wiedergegeben werden sollen, sind von großer Bedeutung.

Als Grundlage für diese Untersuchungen dienten die Laufzeitkurven der Longitudinal- und Transversalwellen, wobei Zoeppritz und Geiger sich auf die Erforschung dreier Schichten beschränkten.

In Figur 32 sind die erreichten Tiefen h_m des Eindringens der longitudinalen und der transversalen seismischen Strahlen in ihrer Abhängigkeit von der Epizentraldistanz Δ bis zu $\Delta = 13000$ km dargestellt.

$$h_m = r_0 - r_m = F_m(\Delta).$$

h_m ist in Kilometern und Δ in Megametern angegeben.

Die Kurve I bezieht sich auf die longitudinalen und Kurve II auf die transversalen Wellen.

Außerdem sind in die Figur noch die größten Tiefen h_m' (Kurve III) eingetragen, welche erreicht würden, wenn der Erdball ein gleichartiger

Digitized by Google

Körper wäre und die seismischen Strahlen längs der Sehnen, welche das Epizentrum mit dem Beobachtungsort verbinden, sich fortpflanzen würden.

Aus der früheren Figur 19 sieht man, daß

$$h'_m = r_0(1 - \cos \varepsilon) = r_0\left(1 - \cos\frac{\vartheta}{2}\right)$$

oder

$$h'_m = 2r_0 \sin^2\frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Hier ist ϑ der Zentriwinkel, der der Epizentraldistanz Δ entspricht.

Die Größen des Winkels ε, die den verschiedenen Epizentralentfernungen Δ entsprechen, waren schon früher in Tabelle III angeführt.

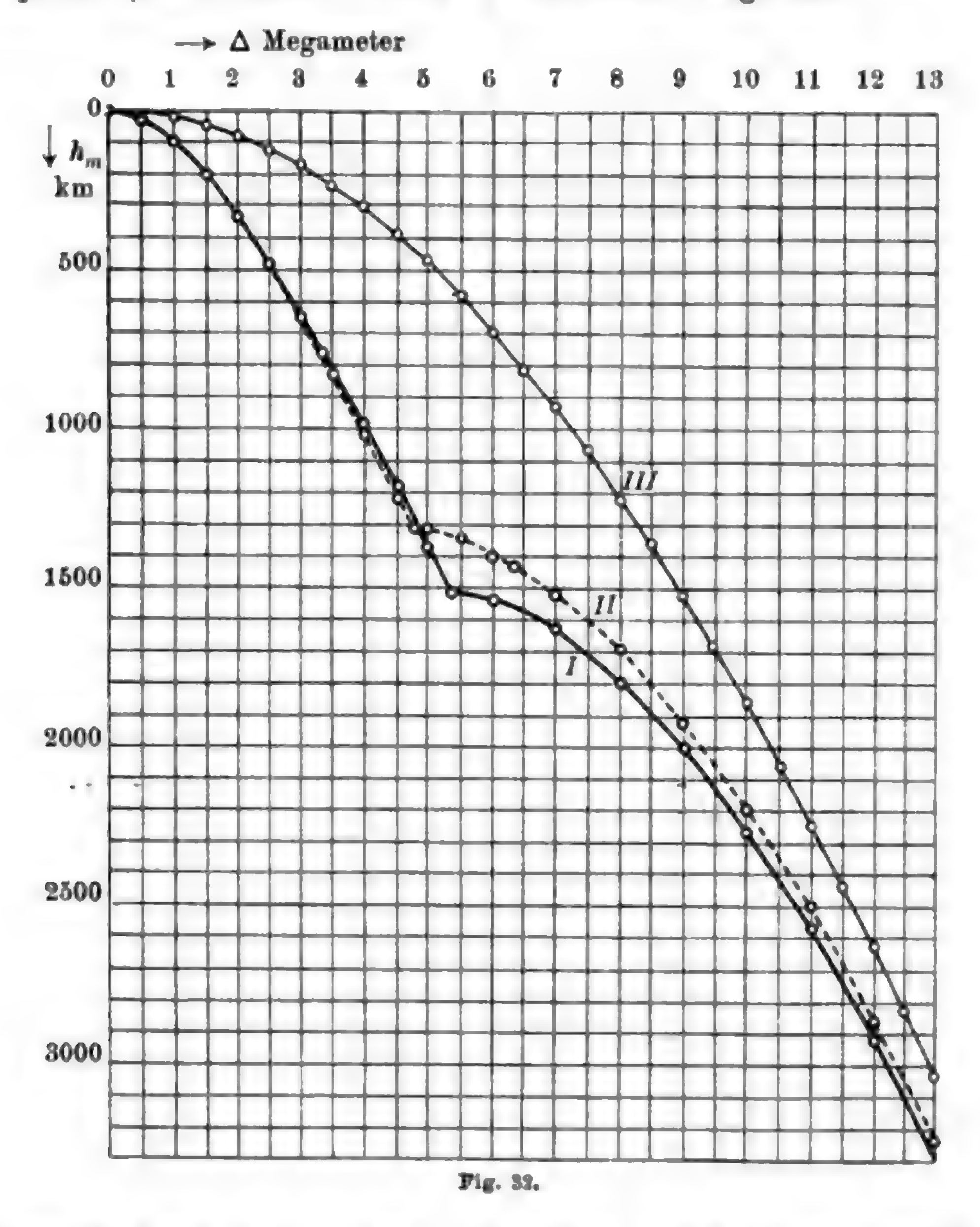


Fig. 32.

Figur 32 zeigt, daß bis zu $\Delta = 5000$ km oder $h_m =$ zirka 1300 km die beiden Kurven I und II nahezu ineinanderfallen; für die größeren Epizentralentfernungen aber liegt die Kurve II höher als die Kurve I; beide liegen aber in allen Teilen unterhalb der Kurve III.

Digitized by Google

Wenn wir nun die Abhängigkeit h_m von Δ untersuchen, so finden wir, daß in einer Tiefe von etwa 1500 km die Kurve $h_m = F_m(\Delta)$ ihre Form plötzlich ändert, sie bildet einen Knick. Man muß also in dieser Tiefe unter der Erdoberfläche eine ziemlich plötzliche Änderung der physikalischen Eigenschaften der inneren Schichten annehmen, worauf schon früher hingewiesen wurde.

Für die transversalen Wellen liegt der Knick in der Kurve $h_m = F_m(\Delta)$ in einer geringeren Tiefe.

Dieses interessante Resultat folgt also unmittelbar aus einer eingehenden Analyse der Eigenschaften der entsprechenden Laufzeitkurve und zeigt, wie wichtig es ist, die letzteren möglichst zu vervollkommnen.

In der folgenden Tabelle IV sind die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen V_1 und V_2 in verschiedenen Tiefen h nach Zoeppritz und Geiger angegeben.

Tabelle IV.

h	V_1	V_2	h	V_1	V_2
0 km	7,17 km/s.	4,01 km/s.	900	10,73 km/s.	6,00 km/s.
100	7,60	4,24	1000	11,07	6,21
200	8,01	4,47	1100	11,43	6,41
300	8,42	4,70	1200	11,75	6,60
400	8,83	4,93	1300	12,08	6,80
500	9,23	5,15	1316	—	6,83
600	9,62	5,37	1400	12,40	6,87
700	10,00	5,59	1430	—	6,87
760	10,23	—	1500	12,72	—
800	10,37	5,80	1519	12,78	—

Die Abhängigkeit von V_1 und V_2 von der Tiefe kann man sehr anschaulich bis zu einer Tiefe von etwas mehr als 3000 km, also etwa bis zur Hälfte des Erdradius graphisch darstellen, denn eben dieser Tiefe entspricht nach Figur 32 die Epizentraldistanz $\Delta = 13000$ km, bis zu der die Laufzeitkurven gegenwärtig mit einiger Sicherheit fortgeführt werden konnten.

Zu dem Zweck tragen wir auf der Abszissenachse die Tiefe der Schicht h in Kilometern und auf der Ordinatenachse die entsprechenden Größen der Geschwindigkeiten V_1 und V_2 der longitudinalen und transversalen Wellen in Kilometern pro Sekunde ab. Die Zahlen sind aus der vorhergehenden Tabelle IV entnommen.

Wir erhalten dann die Kurven I und II (vgl. Fig. 33).

Diese Kurven zeigen uns, daß V_1 und V_2 anfangs fast proportional mit der Tiefe zunehmen, daß aber von einer gewissen Tiefe an, die Geschwindigkeiten konstant bleiben. Für longitudinale Wellen beginnt diese konstante Geschwindigkeit in einer Tiefe von etwa 1500 km.

Dieses merkwürdige Resultat weist darauf hin, daß nur in den oberen Schichten der Erde bis zur Tiefe von etwa $\frac{1}{4}$ des Erdradius die Trajektorien der seismischen Strahlen gekrümmt sind, daß aber in den tieferen Schichten die Bahn der Strahlen geradlinig ist.

Digitized by Google

Wenn wir nun voraussetzen, daß von dieser kritischen Schicht an, wo sich das Abhängigkeitsverhältnis der Geschwindigkeit von der Tiefe plötzlich ändert, bis zum Epizentrum die Geschwindigkeiten V_1 und V_2 denselben Zahlenwert behalten, so können wir die Zeit, die der seismische Strahl zum Durchlaufen des Durchmessers der Erde vom Epizentrum bis zum Antiepizentrum nötig hat, berechnen.

Für longitudinale Wellen gibt Geiger die Zeit $19^m 31^s$ und für transversale $36^m 50^s$.

Alle oben angeführten Zahlen können gewiß keinen Anspruch auf eine absolute Genauigkeit erheben und nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit betrachtet werden, aber es unterliegt keinem Zweifel, daß es mit der Zeit auf Grund eines größeren und zuverlässigeren seismometrischen Materials, als wir es bis jetzt besitzen, gelingen wird, Laufzeitkurven zu konstruieren, die das Gesetz der Veränderlichkeit der Geschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen mit der Tiefe mit der für unsere Zwecke erforderlichen Genauigkeit darstellen.

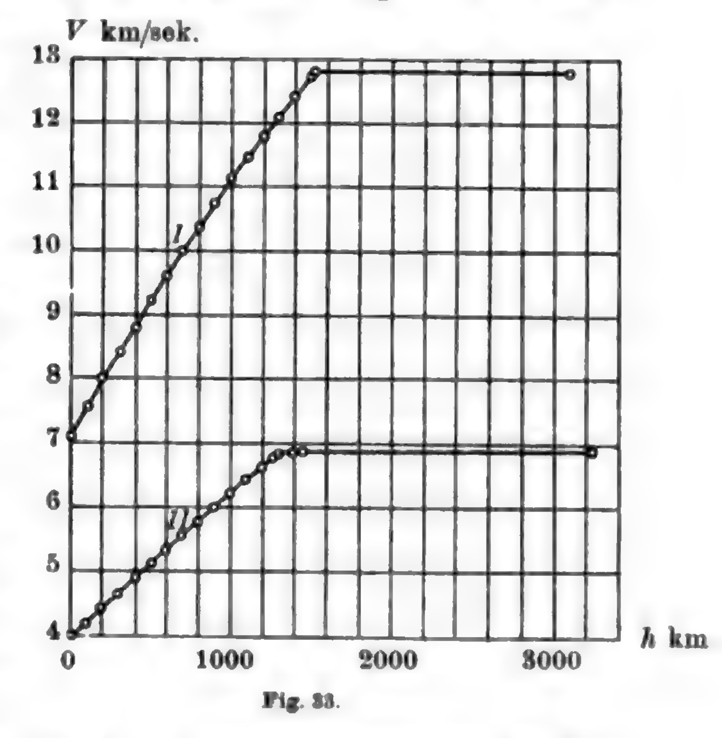


Fig. 33.

Besonders wichtig würde es sein, zuverlässige Werte für die Laufzeit T für die 13000 km übersteigenden Epizentralentfernungen zu erhalten. Das würde uns ermöglichen, nicht nur die Lage des Epizentrums sehr entfernter Beben aufzufinden, sondern auch die Geschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen in den tiefsten Erdschichten, die in der Nähe des Mittelpunktes liegen, zu bestimmen. Die Form der Laufzeitkurve für größere Epizentralentfernungen als 13000 km ist aber bis jetzt noch unsicher.

Nach der Ansicht Wiecherts zeigt die Kurve in den Grenzen von $\Delta = 13000$ km bis zu $\Delta = 16000$ km eine Unterbrechung, d. h. die seismischen Wellen erreichen infolge der verschiedenen Reflexionen und Brechungen im Innern der Erde gar nicht den Beobachtungsort. Es ist also für diese Entfernungen etwa ein seismischer Schatten vorhanden. Von $\Delta = 16000$ km bis zu $\Delta = 20000$ km, dem halben Erdumfang, liegt die Laufzeitkurve bedeutend höher und kann nicht als eine Fortsetzung des früheren betrachtet werden. Dieses Resultat bedarf jedoch noch einer weiteren Untersuchung.

Es ist auch möglich, daß die Form der Laufzeitkurve von dem Azimut, aus welchem die seismischen Wellen kommen, abhängig ist.

In der letzten Zeit haben Geiger und Gutenberg auf Grund einer

Digitized by Google

Methode, die Zoeppritz kurz vor seinem Tode erdacht hatte, versucht, die vorhandenen Laufzeitkurven zu verbessern. Sie benutzten die Tatsache, daß Vorläuferwellen, die gerade eine Störungsfläche im Erdinnern passiert haben, andere Amplituden zeigen als die Wellen aus einer wenig geringeren Herdentfernung, die diese Störungsfläche noch nicht gestreift haben, da in den beiden Fällen ein Strahlenbündel, das vom Herde ausgeht, infolge des wesentlich verschiedenen Strahlenganges auf 2 Streifen der Erdoberfläche trifft, von denen in praktisch vorkommenden Fällen der eine zehnmal so breit sein kann wie der andere.

Das Resultat dieser Untersuchung, das auf der letzten Versammlung der Internationalen Seismologischen Assoziation in Manchester im Jahre 1911 vorgetragen wurde, zeigt bei Epizentralentfernungen über 500 km bei der neuen Laufzeitkurve der Longitudinalwellen Abweichungen, die bei $\Delta = 8000$ km mit + 15 Sek. ihren Höchstbetrag erreichen.

Statt einer Störungsfläche in einer Tiefe von 1500 km gibt es nach den oben erwähnten Untersuchungen drei: die erste in einer Tiefe von 1200 km, die zweite in einer Tiefe von 1700 km und die dritte in der Tiefe von 2450 km. In der Tiefe von 2900 km beginnt nach Gutenberg der von Wiechert vermutete Kern, an dessen äußerer Grenze die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Erdbebenwellen von 13 auf 8 km/sek., die der transversalen von $7^1/_4$ auf $4^3/_4$ km/sek. sinkt, um dann nach dem Erdmittelpunkt hin zuerst langsam, dann schneller bis auf 11,1 bzw. 6,2 km/sek. zuzunehmen. Der Zentralkern der Erde soll nach der Meinung Wiecherts aus Nickel und Eisen bestehen.

Aus dem vorstehenden ergibt sich, daß die moderne Seismometrie ermöglicht, auf Grund des auf verschiedenen seismischen Stationen gesammelten Beobachtungsmaterials zur Erkenntnis der physikalischen Eigenschaften der tiefsten inneren Erdschichten zu gelangen.

Gleich wie die Lichtstrahlen, die aus dem Weltenraume zu uns kommen, Hinweise auf die chemischen Verhältnisse und zum Teil auf die Temperatur und den Druck geben, welche auf den verschiedenen Himmelskörpern herrschen, und in Verbindung mit dem Dopplerschen Prinzip uns die Möglichkeit bieten, die Geschwindigkeiten ihrer Bewegung in der Richtung der Gesichtslinie zu bestimmen, so liefern auch die seismischen Strahlen den Schlüssel zu den verborgenen Geheimnissen des inneren Baues der Erde, gerade derjenigen Tiefen, welche ihrer Unzugänglichkeit halber dem Forschungsgebiete der Geologie verschlossen sind. Sie dringen zu uns aus dem Schoße der Erde und bringen Nachrichten über ihre inneren Eigenschaften und Eigentümlichkeiten mit sich.

Schon die ersten Schritte, die die junge Wissenschaft der Seismometrie ins Leben getan hat, sind von dem eben besprochenen glänzenden Resultat begleitet gewesen; fraglos wird sie uns auch weiterhin noch manche bedeutende Entdeckung bringen.

Die Seismologie als Wissenschaft hat erst von dem Zeitpunkte an große Fortschritte zu verzeichnen, als sie sich den physikalischen Untersuchungsmethoden zuwandte; ihre weitere Entwickelung wird sich auch fernerhin

Digitized by Google

vorwiegend auf die Instrumentalseismologie oder die Seismometrie zu stützen haben.

Wie wir vorher gesehen haben, können wir aus der Größe des Emergenzwinkels für verschiedene Epizentralentfernungen Δ, welcher entweder aus der Laufzeitkurve oder durch direkte Beobachtung mit geeigneten, an der Erdoberfläche aufgestellten Apparaten zu ermitteln ist, die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten V_1 und V_2 der longitudinalen und der transversalen Wellen in verschiedenen Tiefen ermitteln.

Diese Geschwindigkeiten sind mit den Elastizitätskoeffizienten E und σ und mit der Dichte ϱ durch die folgenden Relationen, welche in dem § 1 des Kap. II abgeleitet worden sind, verbunden:

$$V_1 = \sqrt{\frac{1-\sigma}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} \cdot \frac{E}{\varrho}}$$

$$V_2 = \sqrt{\frac{1}{2(1+\sigma)} \cdot \frac{E}{\varrho}}.$$

Obwohl V_1 und V_2 bekannt sind, können wir doch nicht den Modul der Längenelastizität E und die Dichte ϱ der entsprechenden Schicht getrennt bestimmen, sondern nur das Verhältnis $\frac{E}{\varrho}$.

Eliminiert man aus den vorigen Formeln $\frac{E}{\varrho}$, so kann man den anderen Elastizitätskoeffizienten, den Modul der Querkontraktion oder Poissonsche Konstante σ bestimmen.

Wir können hierfür Formel (40) des II. Kapitels benutzen

$$\sigma = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}{\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^2 - 1}.$$

Zoeppritz und Geiger haben diese Berechnungen ausgeführt und erhielten folgende Größen der Konstanten σ für die verschiedenen Tiefen h.

Tabelle V.

h	σ	h	σ
0 km	0,272	700 km	0,273
100	0,273	800	0,272
200	0,272	900	0,271
300	0,272	1000	0,270
400	0,274	1100	0,270
500	0,272	1200	0,269
600	0,274	1300	0,268

Diese Zahlen zeigen uns, daß bis zur Tiefe $h = 1300$ km σ eine große Konstanz aufweist. Dabei weicht es sehr wenig von der theoretisch ermittelten Größe, wie sie Poisson für den Modul der Querkontraktion angenommen hat, nämlich $\sigma = \frac{1}{4}$, ab.

Digitized by Google

§ 5. Über die Herdtiefe eines Bebens.

Wir haben im vorigen stets vorausgesetzt, daß der Bebenherd nicht tief unter der Erdoberfläche liegt, oder daß die Beoachtungsstation in so großer Entfernung vom Epizentrum sich befindet, daß wir ohne erheblichen Fehler Herd und Epizentrum als zusammenfallend annehmen konnten.

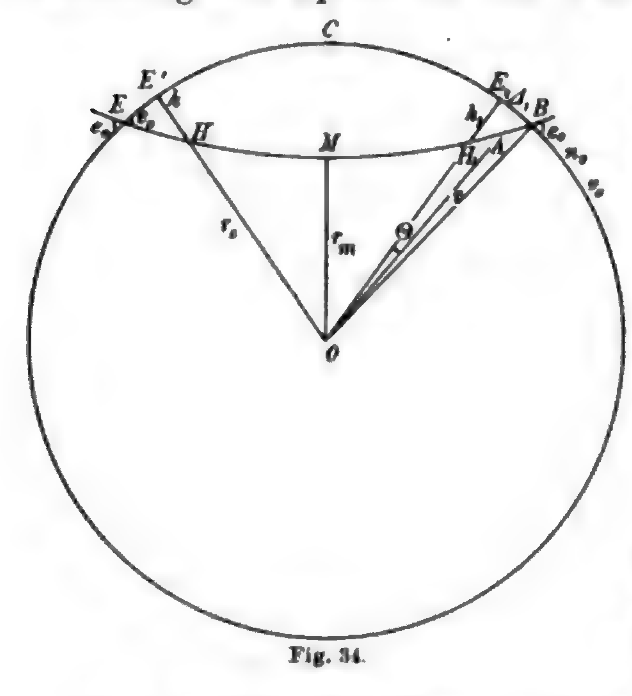


Fig. 34.

Es sei in Fig. 34 E ein solches Herd-Epizentrum und B irgendein Beobachtungsort. Die Epizentralentfernung sei $\Delta = ECB$.

Die entsprechende Laufzeit, d. h. die Differenz der Einsatzmomente derselben Phase des Bebens in B und in E sei T.

Dann ist

$$T = \Psi(\Delta),$$

wo $\Psi(\Delta)$ nichts anderes darstellt, als die entsprechende Kurve der normalen Laufzeitkurve (für $h = 0$, wo h die Tiefe des Herdes ist).

Der entsprechende Emergenzwinkel sei e_0.

Wir wollen nun annehmen, daß der Herd des Bebens sich nicht in E befindet, sondern in H, in einer Tiefe h unter der Erdoberfläche.

Dann liegt das Epizentrum, als der dem Herde nächste Punkt der Oberfläche in E' und die entsprechende Epizentralentfernung ist

$$\Delta' = E'CB$$

oder

$$\Delta' = \Delta - \delta\Delta, \tag{91}$$

wo

$$\delta\Delta = EE'.$$

Wir bezeichnen nun die mittlere Geschwindigkeit der Fortpflanzung der seismischen Strahlen in den oberen Erdschichten, welche zwischen der Oberfläche und der Tiefe h eingeschlossen sind, mit v_0.

Da die Laufzeit des seismischen Strahles von E nach B gleich T war, so ist die Laufzeit von H nach B

$$T - \frac{EH}{v_0}.$$

Es sei t_0 der Ausgangsmoment der von H kommenden Welle. Die Bewegung gelangt an den Punkt E' im Moment t' und an den Punkt B im Moment t, wo

$$t' = t_0 + \frac{E'H}{v_0}$$

Digitized by Google

und

$$t = t_0 + T - \frac{EH}{v_0}.$$

Bezeichnen wir nun wie zuvor die Differenz der Einsatzmomente derselben Vorphase am Beobachtungsort B und im wahren Epizentrum E' mit T', so erhalten wir

$$T' = t - t' = T - \frac{1}{v_0}\{EH + E'H\}$$

oder

$$T' = T - \delta T, \tag{92}$$

wo

$$\delta T = \frac{1}{v_0}[EH + E'H]$$

ist. Wir sehen also, daß die Laufzeitkurve eine Korrektion für die Herdtiefe h eines Bebens erfordert, und zwar sowohl für die Epizentralentfernung Δ als auch für die Laufzeit T.

Wir wollen nun diese Korrektionen $\delta\Delta$ und δT bestimmen.

Aus dem Dreieck EHE' haben wir

$$EE' \cdot \operatorname{tg} e_0 = h$$

und

$$EH \cdot \sin e_0 = h$$

oder

$$EE' = h \operatorname{cotg} e_0$$

und

$$EH = h\,\frac{1}{\sin e_0}.$$

Folglich

$$\delta\Delta = h \operatorname{cotg} e_0 \tag{93}$$

und

$$\delta T = \frac{h}{v_0} \cdot \frac{1 + \sin e_0}{\sin e_0}. \tag{94}$$

Bringt man diese Korrektionen in den Formeln (91) und (92) an, so erhält man die entsprechenden Elemente der Laufzeitkurve, korrigiert für die Herdtiefe des Bebens.

Bestimmt man umgekehrt aus den Beobachtungen die Abweichungen Δ und T für ein bestimmtes Beben gegen die normale Laufzeitkurve (für $h = 0$), so kann man gewisse Schlüsse über die Herdtiefe des entsprechenden Bebens ziehen.

Wir wollen nun betrachten, auf welche Weise man die Beobachtungen in der Nähe des Epizentrums benutzen kann, um die wahre Herdtiefe zu bestimmen.

Denken wir uns, daß die seismische Station B in einer geringen Entfernung Δ_1 vom Epizentrum sich befindet; wir nehmen dementsprechend den Herd in Fig. 34 in H_1 in einer Tiefe h_1 an. Dann ist das Epizentrum in E_1. Den Abstand des Punktes H_1 vom Erdzentrum bezeichnen wir mit $r_1 = r_0 - h_1$.

Digitized by Google

Wir wollen nun die Trajektorie des seismischen Strahles, der von H_1 aus nach B geht, in Fig. 34 nach links fortsetzen; wir erreichen dann einen Punkt M, wo die Entfernung r_m der Trajektorie von dem Erdzentrum ein Minimum ist.

Wir setzen dabei voraus, daß die Epizentralentfernung Δ_1 so gewählt ist, daß r_1 immer größer als das entsprechende r_m ist.

Wenn wir mehrere Stationen, die in der Nähe des Epizentrums liegen und der zuletzt genannten Bedingung genügen, haben, so können wir aus den seismometrischen Beobachtungen, wenn die Lage des Epizentrums bekannt ist, die entsprechende Laufzeitkurve ableiten, aus der wir nach der allgemeinen Formel

$$\cos e_0 = v_0 \frac{dT}{d\Delta} \quad \text{(Formel (54))},$$

den Emergenzwinkel für verschiedene Epizentralentfernungen Δ_1 bestimmen können.

Setzt man wie zuvor

$$\alpha_1 = \cos e_0,$$

so erhält man eine Reihe von einander entsprechenden Werten Δ_1 und α_1, die uns die Bestimmung der Herdtiefe des Bebens ermöglichen.

Wir wollen dazu irgendeinen Punkt A auf der Trajektorie des seismischen Strahles zwischen H_1 und B im Abstande r vom Erdmittelpunkt O annehmen und den Winkel H_1OA mit θ bezeichnen.

Den Winkel H_1OB am Erdmittelpunkt O, der der Epizentraldistanz Δ_1 entspricht, bezeichnen wir mit ϑ_1.

Dann ist

$$\vartheta_1 = \frac{\Delta_1}{r_0},$$

wo r_0 der Erdradius ist.

Wir drücken jetzt wie zuvor r in Teilen von r_0 aus und setzen dementsprechend

$$\varrho = \frac{r}{r_0}$$

und

$$\varrho_1 = \frac{r_1}{r_0}.$$

Wir wenden nun die Grundformel (19) an, nach der

$$d\theta = \frac{\alpha_1 \, d\varrho}{\varrho \sqrt{\nu^2 \varrho^2 - \alpha_1^2}}$$

ist. Integrieren wir diesen Ausdruck in den Grenzen von H_1 bis B, d. h. von $\varrho = \varrho_1$ bis $\varrho = 1$, so erhalten wir

$$\Delta_1 = r_0 \alpha_1 \int_{\varrho_1}^{1} \frac{d\varrho}{\varrho \sqrt{\nu^2 \varrho^2 - \alpha_1^2}}, \tag{95}$$

Digitized by Google

wo

$$\nu = \frac{n}{n_0} = \frac{v_0}{v}$$

ist. Da r_1 nach der Voraussetzung immer größer als r_m ist, so kann die Größe unter dem Wurzelzeichen in den Integrationsgrenzen sich nicht in Null verwandeln.

Es hängt nun ν von ϱ ab.

Für $\varrho = 1$ ist $\nu = 1$.

Wir führen jetzt eine neue Variable ein

$$\xi = 1 - \varrho. \tag{96}$$

Dann ist für

$$\varrho = 1, \quad \xi = 0$$

und für

$$\varrho = \varrho_1, \quad \xi = \xi_1 = 1 - \varrho_1.$$

Wir können nun ν als eine Funktion von ξ betrachten

$$\nu = F(\xi).$$

Da aber in den oberen Erdschichten mit der Zunahme von ϱ der Wert von ν wächst, so ist

$$\frac{d\nu}{d\xi} < 0.$$

Auch ohne Kenntnis der Funktion $F(\xi)$ können wir für kleine Werte von ξ, welche jetzt nur in Frage kommen, $F(\xi)$ nach dem Maclaurinschen Satz in eine Reihe entwickeln

$$\nu = F(\xi) = 1 - a_1\xi + a_2\xi^2,$$

wo $a_1 > 0$ ist.

Wir beschränken uns auf die Glieder bis ξ^2.

Dann ist

$$\nu^2\varrho^2 = [1 - a_1\xi + a_2\xi^2]^2[1 - \xi]^2$$
$$= 1 - (2a_1 + 2)\xi + (a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1)\xi^2$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2\varrho^2 - \alpha_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1 - \alpha_1^2) - 2(a_1 + 1)\xi + (a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1)\xi^2}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}\left[1 - 2\xi\left\{\frac{a_1 + 1}{1 - \alpha_1^2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1}{1 - \alpha_1^2}\xi\right\}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ordnen wir diesen Ausdruck nach Potenzen von ξ, so erhalten wir

$$\frac{1}{\sqrt{\nu^2\varrho^2 - \alpha_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \alpha_1^2}}\left[1 + \frac{a_1 + 1}{1 - \alpha_1^2}\xi\right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\left\{3\left(\frac{a_1 + 1}{1 - \alpha_1^2}\right)^2 - \frac{a_1^2 + 2a_2 + 4a_1 + 1}{1 - \alpha_1^2}\right\}\xi^2\right].$$

Andererseits ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{1-\xi} = 1 + \xi + \xi^2.$$

Multipliziert man diese zwei Ausdrücke (Formel (95)), so erhält man

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2\varrho^2 - \alpha_1^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\Big[1 + \Big\{1 + \frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\Big\}\xi$$

$$+ \Big\{1 + \frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2} + \frac{1}{2}\Big(3\Big(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\Big)^2 - \frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\Big)\Big\}\xi^2\Big].$$

Nun führen wir die folgenden Bezeichnungen ein:

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{2 + a_1 - \alpha_1^2}{1-\alpha_1^2} \tag{97}$$

und

$$A_2 = \frac{1}{3}\Big[\frac{2 + a_1 - \alpha_1^2}{1-\alpha_1^2} + \frac{1}{2}\Big\{3\Big(\frac{a_1+1}{1-\alpha_1^2}\Big)^2 - \frac{a_1^2+2a_2+4a_1+1}{1-\alpha_1^2}\Big\}\Big]$$

$$= \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{(1-\alpha_1^2)^2}\big[\{6 + 4a_1 - 2a_2 + 2a_1^2\}$$

$$- \{5 - 2a_1 - 2a_2 - a_1^2\}\alpha_1^2 + 2\alpha_1^4\big]. \tag{98}$$

Dann ist

$$\frac{1}{\varrho} \cdot \frac{1}{\sqrt{v^2\varrho^2 - \alpha_1^2}} = [1 + 2A_1\xi + 3A_2\xi^2] \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}.$$

Führt man diesen Ausdruck in die Formel (95) ein und berücksichtigt, daß

$$d\varrho = -d\xi,$$

so erhält man durch Vertauschen der Integrationsgrenzen

$$\Delta_1 = \frac{r_0\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\int_0^{\xi_1}[1 + 2A_1\xi + 3A_2\xi^2]\,d\xi$$

oder

$$\Delta_1 = r_0\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}[\xi_1 + A_1\xi_1^2 + A_2\xi_1^3].$$

Hier ist $\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}$ nichts anderes als die Kotangente des Emergenzwinkels e_0, der der Epizentralentfernung Δ_1 entspricht.

Läßt man in der vorhergehenden Formel das Glied mit ξ_1^3 fallen, so ergibt sich

$$\Delta_1 = r_0\frac{\alpha_1}{\sqrt{1-\alpha_1^2}}\xi_1[1 + A_1\xi_1]. \tag{99}$$

Der Koeffizient A_1 hängt von a_1 und α_1 ab. Hat man so ein Paar zugehöriger Werte Δ_1 und α_1 bestimmt, so kann man die zwei Unbekannten ξ_1 und a_1 ermitteln.

Digitized by Google

Hätten wir Beobachtungen von drei Stationen genommen, so könnten wir unter Beibehaltung des Gliedes $A_2\xi^3$ auch die andere Konstante a_2 bestimmen.

Die Größe ξ_1 gibt uns sofort die gesuchte Herdtiefe h_1.

Denn es ist

$$\xi_1 = 1 - \rho_1 = 1 - \frac{r_1}{r_0} = 1 - \frac{r_0 - h_1}{r_0} = \frac{h_1}{r_0}$$

oder

$$h_1 = \xi_1 r_0. \tag{100}$$

Da andererseits

$$v = \frac{v_0}{\mathfrak{v}}$$

ist, so werden wir das Gesetz der Änderung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Strahlen in den oberen Erdschichten, die unmittelbar an das betreffende Epizentralgebiet angrenzen, kennen, wenn wir die Koeffizienten a_1 und a_2 aus den Beobachtungen bestimmt haben.

Wir sehen also, daß es theoretisch durchaus möglich ist, die Herdtiefe eines Bebens festzustellen; man muß jedoch dafür über ein zuverlässiges seismometrisches Material verfügen, das auf verschiedenen, dem Epizentrum nahe liegenden Stationen gesammelt worden ist.

Viertes Kapitel.

Die Hauptprobleme der Seismometrie.

§ 1. Untersuchung verschiedener seismischer Erscheinungen.

In dem vorhergehenden Kapitel haben wir die Theorie der seismischen Strahlen eingehend betrachtet und gesehen, von wie großer Bedeutung für die praktische Seismometrie die genaue Bestimmung des Moments des Eintreffens der longitudinalen und transversalen Wellen an den verschiedenen seismischen Stationen ist.

Nach dem Eintreffen dieser Wellen beruhigt sich die Bewegung des Bodens jedoch nicht, sondern auf die ersten folgen weitere Wellen mit verschiedenen Perioden und Amplituden, welche sich zum Teil übereinander lagern, so daß wir im Resultat ein überaus kompliziertes und verwirrtes Bild der Bodenbewegung erhalten.

Am spätesten kommen die langen Oberflächenwellen, die in der Mehrzahl der Fälle eine Überlagerung einzelner, mehr oder weniger regelmäßiger Sinusschwingungen darstellen. In der Nähe der Maximalphase des Bebens klärt sich gewöhnlich das Bild; die Seismogramme zeigen hier meistens einige mehr oder weniger reine Sinuswellen mit einer bestimmten Periode und Amplitude. Jedoch erhalten sich diese Wellen selten für die Dauer

Digitized by Google

mehrerer Perioden so rein, sondern sie werden meistenteils durch Überlagerung neuer Wellen, ferner auch infolge des unvermeidlichen Einflusses der Dämpfung, die zweifellos bei allen Wellentypen eintritt, in ihrem Aussehen verändert.

Denn jede harmonische Schwingung der Oberfläche, auf der wir unsere seismometrischen Beobachtungen anstellen, muß infolge des Einflusses der Reibung eine gedämpfte Schwingung sein, deren Charakter den gedämpften Schwingungen eines gewöhnlichen Horizontalpendels, mit dessen Theorie wir uns im folgenden Kapitel beschäftigen wollen, völlig analog ist.

Eine der wichtigsten, aber zugleich auch eine der schwierigsten Aufgaben der modernen Seismometrie besteht in der Analyse dieser komplizierten Bodenbewegungen, in der Absonderung einer Welle von der anderen, in der Untersuchung ihres Charakters, ihrer Periode und Amplitude, ihrer Herkunft, des entsprechenden Dämpfungskoeffizienten usw.

Der japanische Seismologe Omori[13]) machte einen Versuch, die seismischen Wellen, welche an der Oberfläche beobachtet werden, nach Gruppen zu klassifizieren, und zwar suchte er das Seismogramm nach der Verschiedenheit der Periode der auftretenden Wellen einzuteilen; eine solche Einteilung ist jedoch immer mit einer gewissen Willkür verbunden, so daß es in vielen Fällen schwer ist, das registrierte Diagramm einer solchen Norm anzupassen.

Ferner bemerkte Wiechert[14]), daß bei der Mehrheit der Erdbeben in der Hauptphase, den Oberflächenwellen, eine Wellenperiode von 18 Sekunden am häufigsten auftritt.

Da das Produkt aus der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Welle V und der Periode T die entsprechende Wellenlänge λ liefert (s. Form. (29) des II. Kap.), so ist

$$\lambda = VT.$$

Für die Oberflächenwellen können wir nach dem früheren annehmen, daß $V = 3{,}5$ km/sek ist; folglich ist

$$\lambda = 3{,}5 \times 18 = 63 \text{ km},$$

die Oberflächenwellen besitzen also eine große Länge.

Man nimmt nun in der modernen Geologie an, daß die äußere, aus verschiedenen Gesteinsarten bestehende Erdrinde von dem inneren Erdkern durch eine Magmaschicht, in der der Stoff sich etwa im geschmolzenen Zustande befindet, isoliert ist. Dieses Magma soll auch die tätigen Vulkane bei den Eruptionen speisen. Wenn nun auch das Magma sich im geschmolzenen Zustande befindet, so befindet es sich doch infolge des ungeheuren Druckes, welcher in solchen Tiefen herrscht, nicht im völlig flüssigen Zustande, sondern es ist als eine zähe Flüssigkeit, als ein plastischer Körper, wie etwa Pech bei gewöhnlicher Temperatur, aufzufassen.

Daß das Magma die Eigenschaften einer Flüssigkeit nicht besitzen kann, geht schon daraus hervor, daß durch die Magmaschicht die transversalen Wellen der fernen Beben zu uns dringen. Denn in einer echten Flüs-

Digitized by Google

sigkeit kann sich eine transversale elastische Welle nicht fortpflanzen, da die Flüssigkeiten einer Formänderung keinen Widerstand entgegensetzen. Das Auftreten von transversalen Wellen ist aber nur möglich, wenn ein solcher Widerstand auftritt, da diese Wellen eben Scherungswellen sind.

Die Frage nach der Tiefe der Magmaschicht versuchte Wiechert in der folgenden Weise zu lösen:

Er findet zunächst, daß bei den Beben eine Wellenlänge von 63 km am häufigsten auftritt, und nimmt dann an, daß diese Wellen den Eigenschwingungen der ganzen äußeren Erdrinde, welche auf der Magmaschicht ruht, entspricht. An den äußeren und inneren freien Oberflächen dieser Rinde müßten dann Schwingungsbäuche auftreten, in der Mitte aber eine Knotenfläche, gleichwie eine Metallstange, welche an beiden Enden schwingt, in der Mitte einen Knoten hat. In diesem Falle ist der Abstand zwischen den freien schwingenden Flächen der Erdrinde gleich einer halben Wellenlänge.

Unter dieser Annahme kam Wiechert zu dem Resultat, daß die wahrscheinliche Tiefe der Magmaschicht 31,5 km betrage.

Zu demselben Resultat kann man auch auf einem anderen Wege gelangen.

Wir wissen aus den Beobachtungen in tiefen Schachten und Bohrlöchern, daß die Temperatur mit der Tiefe zunimmt.

Das tiefste bis jetzt erbohrte Bohrloch befindet sich in Czuchow in Preußisch-Schlesien. Seine Tiefe beträgt 2239,7 m.

In diesem herrscht in einer Tiefe von 2221 m eine Temperatur von $+ 85^{0},0$ C. Nehmen wir nun als mittlere Temperatur in der Nähe der Oberfläche $+ 15^{0}$ C an, so erhalten wir für den mittleren geothermischen Gradienten oder die geothermische Tiefenstufe, d. h. für die Zahl der Meter, die einer Zunahme der Temperatur nach der Tiefe um 1^{0} C entspricht,

$$\frac{2221}{85 - 15} = 31{,}7 \text{ m.}$$

Wir können annehmen, daß bei einer Temperatur von 1000^{0} C die verschiedenen Gesteinsarten sich im geschmolzenen Zustande befinden; in der entsprechenden Tiefe können wir erwarten, die Magmaschicht anzutreffen.

Diese Tiefe ergibt sich nach dem geothermischen Gradienten zu $(1000 - 15) \times 0{,}0317 = 31{,}2$ km, eine Zahl, die recht gut mit der von Wiechert aus den seismischen Beobachtungen erhaltenen übereinstimmt.

Es fragt sich nun, in welchem physikalischen Zustande sich die Materie unter der Magmaschicht und überhaupt in sehr tiefen Erdschichten befindet? Diese Frage ist noch nicht mit einiger Sicherheit zu beantworten.

Die Temperatur ist hier so hoch, daß die Materie sich in dem sogenannten festen Zustande nicht befinden kann. Der flüssige Zustand ist auch kaum denkbar, da die Temperatur sehr wohl höher sein kann als die kritische Temperatur. Man könnte nun annehmen, daß die Materie sich hier in gasförmigem Zustande befinde, aber auch diese Annahme ist wenig befriedigend. Eins können wir aber mit Wahrscheinlichkeit behaupten, daß die Materie sich in den Tiefen der Erde unter einem so hohen Druck be-

Digitized by Google

findet und so sehr komprimiert ist, daß sie trotz der hohen Temperatur sich wie ein fester Körper verhält.

Wir haben oben ausgeführt, daß bei den fernen Beben die beobachteten Bodenschwingungen sehr kompliziert sind, da sie aus der Superposition einer ganzen Reihe von verschiedenen seismischen Wellen resultieren. Man kann sich hiervon durch einen Blick auf Fig. 25 leicht überzeugen, die eine Reproduktion des kleinasiatischen Bebens vom 9. Febr. 1909 darstellt.

Außer der großen Kompliziertheit der Schwingungen beobachtet man noch folgende interessante Erscheinung.

In den pleistoseistischen und epizentralen Gebieten dauern die Beben gewöhnlich nicht lange an, sondern sie sind gewöhnlich auf eine Reihe von einzelnen Stößen und Bodenerschütterungen beschränkt, die sich innerhalb kurzer Zeit abspielen. Auf fernen Stationen erstrecken sich aber die Bebenerscheinungen über einen sehr viel größeren Zeitraum, zuweilen über die Dauer einer Stunde und mehr. Auf den Seismogrammen solcher Stationen findet man keine Unterbrechungen in der Registrierung, die den Momenten der Ruhe zwischen den einzelnen Stößen im Epizentrum entsprächen. Nach dem Beginn des Bebens folgen die seismischen Wellen einander ohne Unterbrechung, und erst nach längerer Zeit beginnt ein allmähliches Abklingen der Bodenschwingungen.

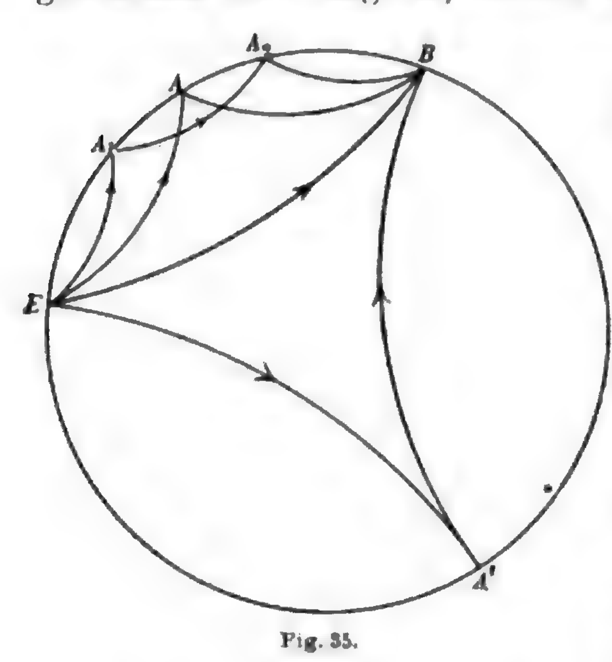


Fig. 35.

Es fragt sich nun, wodurch diese andauernden Wellen verursacht werden und warum sich die Schwingungen über eine so lange Zeit erstrecken.

Es können dem drei verschiedene Ursachen zugrunde liegen.

Erstens können außer den longitudinalen und transversalen Wellen, die den Beobachtungsort auf den schon von uns untersuchten Bahnen der seismischen Strahlen erreichen, auch ganze Wellensysteme ankommen, welche einmal oder mehrmals von der freien Erdoberfläche reflektiert worden sind, wie es in Figur 35 dargestellt ist.

Die Wellen können aus dem Epizentrum nach der seismischen Station B kommen, indem sie einmal von der Erdoberfläche in A, oder zweimal in A_1 und A_2 usw. reflektiert worden sind. Sie können auch in A' Reflexion erleiden.

Außerdem können auch im Innern der Erde, wo Schichten mit sehr verschiedenen physikalischen Eigenschaften aneinanderstoßen, innere Reflexionen und Brechungen vor sich gehen. Es sei nochmals erwähnt, daß jedesmal, wenn irgendein seismischer Strahl — sei es ein longitudinaler oder ein transversaler — eine Trennungsgrenze von Schichten mit verschiedenen physikalischen Eigenschaften trifft, dies den Ausgangspunkt für

Digitized by Google

vier neue Strahlen, zwei reflektierte und zwei gebrochene, bildet, wobei einem jeden Strahlenpaar eine longitudinale und eine transversale Welle entspricht. Es ist daher erklärlich, daß das registrierte Bild eines Bebens auf einer fernen Station sehr kompliziert sein muß.

Es ist zweitens möglich, daß die seismischen Wellen beim Laufe durch den Erdkörper Eigenschwingungen der verschiedenen Schichten veranlassen. Solche Eigenperioden der Schwingungen bestimmter Gesteinsarten sind zweifellos vorhanden. So hat Grunmach[15]) unlängst die Schwingungen eines Felsens bestimmt, die durch stürzende Wassermassen hervorgerufen wurden. Er kam zu dem Schluß, daß die beobachtete sehr kurze Schwingungsperiode gerade der Eigenperiode des betreffenden Gesteinsmassivs entspricht.

Daß die seismischen Wellen bei genügender Intensität tatsächlich ähnliche Erscheinungen veranlassen können, läßt sich aus dem Umstande schließen, daß zuweilen ein Beben durch die von ihm ausgehenden seismischen Wellen an einem anderen Orte ebenfalls ein Beben hervorruft. Die Energie der seismischen Wellen erscheint in manchen Fällen hinreichend, um wenig stabile Gleichgewichtsverhältnisse von solchen Schichten zu stören, die sich im Zustande großer elastischer Spannungen befinden; sie erregt hier ein neues Beben, das seiner Ursache nach als Relaisbeben bezeichnet wird.

Ein dritter Grund für die Kompliziertheit der Aufzeichnungen auf entfernten Stationen kann auf einer besonderen Erscheinung, die nach Analogie mit der Optik seismische Dispersion genannt werden kann, beruhen.

In der früher entwickelten Theorie der seismischen Wellen sind wir niemals der Erscheinung der Dispersion begegnet, d. h. wir haben nirgends eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen von der Periode gefunden. Für einen bestimmten Wellentypus war die Geschwindigkeit in einem Körper mit bestimmten physikalischen Eigenschaften eine konstante Größe. Das kam daher, daß wir in unseren Grunddifferentialgleichungen die Glieder höherer Ordnung vernachlässigt haben und so zu linearen Differentialgleichungen gelangen konnten. Bei der Mitnahme dieser Glieder zeigt sich aber, daß die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen wie von der Periode, so auch von der Amplitude der Schwingungen abhängt. Die Abhängigkeit der Geschwindigkeit von der Periode könnte auch aus der linearen Form der Differentialgleichungen ermittelt werden, wenn wir ihnen eine andere Gestalt gegeben hätten. Ergänzen wir, um uns der Wirklichkeit zu nähern, die Gleichungen der klassischen Elastizitätstheorie, so werden wir auf die seismische Dispersion hingeführt.

In der Optik ist die Erscheinung gut bekannt und erforscht. Einer jeden Schwingungsperiode oder einer jeden bestimmten Wellenlänge kommt eine bestimmte Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Strahles zu, die von dem entsprechenden Brechungsexponenten abhängig ist. Dem Anscheine nach ist die Erscheinung der Dispersion eine allgemeine Eigenschaft der Materie; es wäre daher unnatürlich und unlogisch, vorauszusetzen, daß die seismischen Strahlen in dieser Beziehung eine Ausnahme bilden.

In sehr elastischen Körpern, wie z. B. in Stahl und Elfenbein, die den Forderungen der klassischen Elastizitätstheorie am meisten entsprechen,

Digitized by Google

tritt nur eine unbedeutende Dispersion auf; es ist aber sehr wahrscheinlich, daß in den verschiedenen Gesteinsarten, die den oben erwähnten Forderungen weniger entsprechen, die seismische Dispersion reell ist.

Infolge der Dispersion kommen die seismischen Wellen, die gleichzeitig von demselben Herde ausgingen, aber durch verschiedene Schwingungsperioden sich charakterisieren (Analogie mit dem weißen Lichte in der Optik), an dem Beobachtungsort zu verschiedenen Zeiten an, wodurch somit ebenfalls eine zeitliche Ausdehnung des Seismogramms herbeigeführt wird.

Die Frage nach der seismischen Dispersion ist noch nicht erforscht worden. Dem Wesen nach stimmt sie in vielen Zügen mit den Fragen der Spektralanalyse überein.

Dem Anscheine nach pflanzen sich die Wellen mit kurzen Perioden bei den longitudinalen Wellen schneller fort, denn sie treten am häufigsten am Anfange der ersten Vorphase des Seismogramms von entfernten Beben auf.

In dieser Beziehung ist die seismische Dispersion entgegengesetzt der normalen optischen, wo sich die Wellen mit kurzen Perioden (z. B. die violetten Strahlen mit größerem Brechungsexponent) in durchsichtigen Medien mit einer kleineren Geschwindigkeit fortpflanzen als die Wellen mit längeren Perioden. Die seismische Dispersion entspricht also etwa der anormalen optischen Dispersion in der Nähe der Absorptionsstreifen.

Streng genommen müßte für eine jede einzelne Schwingungsperiode und zwar sowohl für Longitudinal- wie auch für Transversalwellen eine besondere Laufzeitkurve vorhanden sein. Die Aufstellung solcher Laufzeitkurven ist der Zukunft vorbehalten; es wird jedoch die Bedeutung der mittleren Laufzeitkurven, mit denen wir bis hierher zu tun hatten, deswegen nicht vermindert, denn die Beobachtungen ergeben, daß die Perioden der longitudinalen und transversalen Wellen im ersten und zweiten Vorläufer eines Bebens nicht erheblich schwanken.

Ähnliche Erwägungen können auch auf die Oberflächenwellen angewandt werden, denn auch da kann eine Abhängigkeit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Wellen von der Periode bis zu einem gewissen Grade auftreten. Diese Frage ist ebenfalls noch nicht geklärt worden; der englische Mathematiker Love[16]) hat jedoch darauf hingewiesen, daß es gewisse Gründe gibt, welche die Existenz der Dispersion der seismischen Wellen mit langen Perioden vermuten lassen.

Bei der Untersuchung der charakteristischen Eigentümlichkeiten der longitudinalen Wellen im Moment ihres ersten Erscheinens auf den entfernten seismischen Stationen hat sich in der letzten Zeit ein sehr interessantes Resultat ergeben. Es scheint nämlich, daß in vielen Fällen die Front der ersten longitudinalen Wellen eine Kondensationswelle darstellt, so daß also die Welle, wenn sie an der Erdoberfläche im Beobachtungsort ankommt, eine geringe Bodenverschiebung in der Richtung vom Epizentrum weg bewirkt. Es kommen aber auch Fälle vor, wo eine Dilatationswelle die Front der ersten Welle bildet, die in einer Art von Saugwirkung die Erdoberfläche in der Richtung nach dem Epizentrum hin bewegt. Wovon es abhängt, daß entweder die eine oder die andere Bewegungsrichtung

Digitized by Google

des Bodens auftritt, bleibt noch eine offene Frage. Jedoch muß man die Art des Auftretens unbedingt berücksichtigen bei der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums eines Bebens aus der Größe der Projektionen der anfänglichen Bodenverschiebung auf die Richtung des Meridians und des Parallels, die aus den Beobachtungen mit den entsprechenden Seismographen abgeleitet worden sind, denn bei der Abhängigkeit von dem Charakter der Wellen (Kondensation oder Dilatation) kann die erste Bodenverschiebung (bei P) entweder vom Epizentrum oder nach dem Epizentrum hin gerichtet sein. Wenn wir diesen Umstand nicht berücksichtigen, können wir leicht bei der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums einen Fehler von 180° begehen.

Der Vertikalseismograph, der die Bodenbewegungen in der Vertikalen anzeigt, gibt uns sofort Klarheit darüber, ob die von unten kommenden Longitudinalwellen mit einer Kondensations- oder einer Dilatationswelle beginnen.

Der Vertikalseismograph ist somit ein sehr wertvolles Instrument, das jede Unbestimmtheit in der Frage nach der Bestimmung des wahren Azimuts des Epizentrums aus den zwei horizontalen Komponenten beseitigt.

Gehen wir nun zur Betrachtung der transversalen Wellen über, so stehen wir hier vor der Frage, in welcher Schwingungsrichtung ein Bodenteilchen in der transversalen Welle schwingt, also vor der Frage nach der Lage der Schwingungsebene in dem transversalen seismischen Strahle, die man bedingungsweise als Polarisationsebene bezeichnen kann. Durch die Bestimmung der Richtung der wahren Bodenverrückung beim ersten Einsatz der transversalen Wellen im Anfange der zweiten Phase eines Bebens können wir zur Lösung dieser Frage kommen. Wir werden eingehend im § 3 des X. Kapitels darauf zurückkommen.

Charakteristische geologische und physikalische Eigentümlichkeiten der Schichten, die die seismischen Strahlen durchlaufen, müssen jedenfalls die Lage dieser Polarisationsebene beeinflussen.

Für die Untersuchung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen in den alleroberstenErdschichten wie auch für das Studium ihrer verschiedenen charakteristischen Eigentümlichkeiten würde es sehr wichtig und interessant sein, genaue Messungen mit geeigneten Seismographen bei künstlichen Beben anzustellen, wie z. B. bei Sprengungen mittelst größerer Mengen Dynamit; man würde hierbei um den Ort der Sprengung in verschiedenen Entfernungen von ihm entsprechende Apparate aufzustellen haben. Ohne Zweifel müssen die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und transversalen Wellen in hohem Grade von den physikalischen Eigenschaften der oberen Erdschichten abhängen, es müssen z. B. in den Eruptionsgesteinen diese Geschwindigkeiten ganz andere Werte haben als im Sand oder überhaupt im Alluvialboden. Durch solche Versuche würden diese Werte leicht festzustellen sein.

Es wurden bereits früher in dieser Richtung einige Versuche angestellt, die aber besonders auch wegen der Verwendung unzureichender instrumenteller Hilfsmittel, wie sie damals nur zur Verfügung standen, nicht

Digitized by Google

genügen. Es würde sich lohnen, systematische und rationelle Untersuchungen dieser Art durchzuführen.

Daß solche Beobachtungen in der Tat möglich sind, wird durch die Tatsache bestätigt, daß ein sehr empfindlicher in Göttingen aufgestellter Seismograph mit einer 2000fachen Normalvergrößerung (§ 4 Kap. V) eine Explosion, die in Besançon, also in einer Entfernung von 600 km stattfand, registriert hat.

Die seismischen Erscheinungen, welche bei Beben an der Erdoberfläche beobachtet werden, können in zwei Hauptklassen eingeteilt werden, nämlich in mikroseismische und makroseismische Erscheinungen.

Die ersten werden wegen ihrer Kleinheit von dem Menschen durch die Sinne nicht empfunden, sie können nur von empfindlichen Seismographen angezeigt werden. Meistenteils sind diese Bodenschwingungen von entfernten Beben verursacht worden. Die Seismographen besitzen jetzt eine so große Empfindlichkeit, daß man wohl behaupten kann, daß kein einziges Beben von einiger Bedeutung, wo es auch immer auf der Erdkugel aufgetreten ist, von den Apparaten der seismischen Stationen ersten Ranges unaufgezeichnet bleibt. Die Vergrößerung der ersten Apparate ist eine solche, daß sie Bodenbewegungen von der Ordnung 0,1 Mikron oder 0,0001 Millimeter anzeigen.

Makroseismische Bodenschwingungen sind dagegen solche, welche von den Menschen unmittelbar gefühlt werden. Sie verursachen zuweilen gewaltige Zerstörungen, fordern große Opfer an Menschen und bewirken dauernde Veränderungen des Bodenreliefs. Selbstverständlich ist der Übergang von den mikroseismischen zu den makroseismischen Schwingungen ein ganz allmählicher.

Wenn die moderne Seismometrie bei dem Studium der mikroseismischen Erscheinungen durchaus rationell vorgeht und mit den geeigneten Apparaten — Seismographen — die Stärke dieser Erscheinungen nach ihrer mechanischen Wirkung an der Erdoberfläche feststellt, indem sie die absoluten Werte der Verschiebungen und die Schwingungsperioden der Punkte der Oberfläche und damit die entsprechenden größten Beschleunigungen der Bewegung ermittelt, so herrscht in der Frage der Schätzung der Stärke der makroseismischen Erscheinungen noch eine große Willkür.

Denn die Intensität der makroseismischen Erscheinungen wird zurzeit fast ausnahmsweise auf Grund subjektiver Eindrücke geschätzt, wobei als Maßstab verschiedene Skalen dienen, wie z. B. die zehnteilige Skala von Rossi-Forel und die zwölfteilige von Mercalli, in denen als Basis für die Schätzung der Bebenstärke gewisse äußere Erscheinungen dienen, so z. B. die Empfindung der Bodenschwingungen von Personen im Zustande der Ruhe, das Schwanken hängender Gegenstände, das Stillstehen von Pendeluhren, das Einstürzen von Schornsteinen u. a. Eine solche Schätzung der Bebenstärke kann natürlich auf große Genauigkeit keinen Anspruch machen und gibt uns keine exakte Vorstellung von der dynamischen Intensität der Erscheinung.

Digitized by Google

Für eine rationelle Schätzung der Stärke der makroseismischen Erscheinungen würde es ebenso wie bei der Bestimmung der Intensität der mikroseismischen Erscheinungen notwendig sein, den Maximalbetrag der Beschleunigung der Bodenbewegung zu kennen.

Nur wenn man über ein solches Beobachtungsmaterial verfügt, kann man die Bebenstärke in verschiedenen Punkten des sogenannten pleistoseistischen Gebietes oder des Gebietes der größten Zerstörungen rationell abschätzen und dann exakte Isoseisten oder Kurven gleicher Intensität des Bebens in die Karte eintragen.

Leider wird bis jetzt noch nirgendwo in dieser Weise vorgegangen und es wird die Stärke auch bei Nahbeben nach wie vor nach den vorher genannten Skalen abgeschätzt. Prinzipiell dürfte jedoch kein Hindernis vorliegen, für die Abschätzung der makroseismischen Erscheinungen Apparate von derselben Art, wie für die Schätzung der mikroseismischen zu benutzen, wenn man nur den letzteren eine bedeutend geringere Empfindlichkeit und eine größere Festigkeit gibt und ihre Konstruktion möglichst vereinfacht, damit sie bei starken Bodenschwingungen nicht außer Betrieb gesetzt werden.

Eine angenäherte Schätzung der Stärke der makroseismischen Erscheinungen kann man erhalten, wenn man eine Reihe von Gegenständen bestimmter, jedoch verschiedener Dimensionen und Formen aufstellt und beobachtet, welche von denselben durch die Bodenschwankungen umgeworfen werden. Dieses Prinzip läßt sich für die Aufstellung einer dynamischen Skala für die Schätzung der makroseismischen Erscheinungen benutzen.

Auf diese Frage werden wir noch weiter unten zurückkommen.

Die seismischen Erscheinungen zerfallen weiter nach der Periode der Bewegung in tachyseismische und bradyseismische.

Tachyseismische Erscheinungen sind solche, die zeitlich verhältnismäßig schnell verlaufen. Zu ihnen gehören die Bodenschwingungen bei Nah- und Fernbeben.

Bradyseismische Erscheinungen sind dagegen solche, welche verhältnismäßig langsam verlaufen. Zum Teil erstrecken sich die Bewegungen über viele Tausende von Jahren, wie das langsame Aufsteigen und Sinken der Festländer oder die langsame relative Verschiebung von Bergmassen gegeneinander. Derartige bradyseismische Bewegungen sind ohne Zweifel von großer Bedeutung für das Entstehen der Beben, denn bei solchen relativen Verschiebungen kann die elastische Spannung in den einzelnen Gesteinsarten und Schichten sehr bedeutend werden, so daß ein ganz unbedeutender äußerer Impuls genügt, ein Überschreiten der Elastizitätsgrenze zu bewirken und eine plötzliche Verschiebung einer Schicht gegen die andere hervorzurufen; eine solche Verschiebung kann dann ein tektonisches Beben veranlassen.

Als Beispiel für bradyseismische Erscheinungen dieser Art sei das Verhalten der beiden bekannten Bergmassive Aspromonte und Capo di Faro am Kalabrischen und Sizilianischen Ufer der Straße von Messina genannt, die sich langsam gegeneinander verschieben. In der Tat sind denn auch Kalabrien

Digitized by Google

und Sizilien starke seismische Gebiete, in denen nicht selten sehr starke Beben auftreten. Das letzte große Messinabeben am 28. Dezember 1908 ist ja noch in jedermanns Gedächtnis.

Zu den bradyseismischen Erscheinungen können weiter auch die langsamen Deformationen des Erdkörpers unter dem Einfluß der Attraktion der Sonne und des Mondes gerechnet werden.

In der folgenden Figur 36 ist die Erdkugel dargestellt.

An dem Beobachtungsort B hat die Resultierende aller anziehenden Kräfte des Erdkörpers und der Zentrifugalkraft infolge der Rotation der Erde um ihre Achse eine bestimmte Richtung F im Raume. Diese Richtung OBA ist die normale Lotlinie.

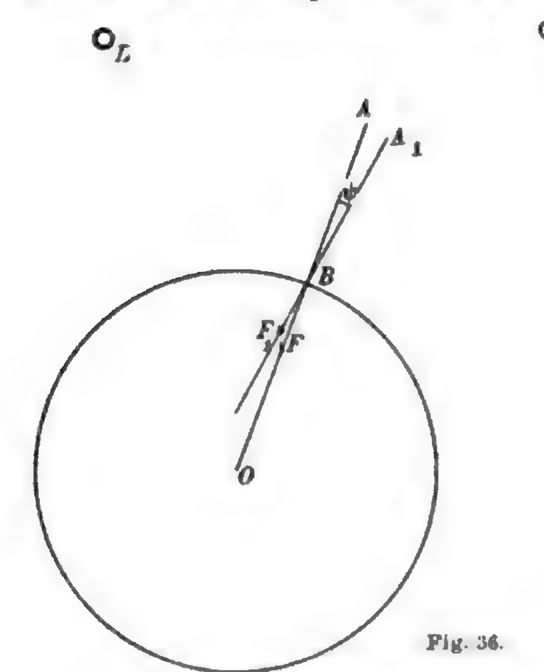


Fig. 36.

Außer der Anziehung der Erde selbst wirken noch auf eine Masse im Punkte B die Attraktion der Sonne und die des Mondes; letzterer besitzt zwar eine bedeutend kleinere Masse, hat aber nur einen Abstand von etwa 60 Erdradien von der Erde.

Infolge der Attraktion der Sonne und des Mondes ändert die Resultierende F aller im Punkte B wirkenden Kräfte etwas ihre Richtung. Dementsprechend wird auch die Lotlinie ihre Richtung von BA nach BA_1 ändern.

Da die Attraktion der Sonne und des Mondes sehr klein im Vergleich zur Anziehung der Erde ist, so ist der Winkel $\psi = \angle ABA_1$ sehr klein; er ist jedoch mit Hilfe genügend empfindlicher Apparate der unmittelbaren Messung zugänglich.

Die Richtung der wahren Lotlinie BA_1 hängt von der relativen Lage der Sonne, des Mondes und des Punktes B ab, es wird also die Gerade BA_1 mit der Zeit eine kegelförmige Fläche beschreiben.

Es wird nun die Richtung der wahren Lotlinie von der Richtung des Lotes, also der Richtung eines Fadens, an dessen Ende eine schwere Masse angehängt ist, gegeben.

Denken wir uns nun, daß an dieser Masse ein Registrierstift befestigt ist, der auf einer horizontalen berußten Glasplatte, die fest mit der Erdoberfläche verbunden ist, schreibt.

Wäre die Erde ein absolut fester Körper, so würde der Schreibstift auf der Platte eine Kurve, die der verschiedenen Lage der wahren Lotlinie entspricht, beschreiben. Mißt man die Amplitude der Verschiebung des Stiftes und seine Entfernung von dem Aufhängepunkt, so kann der entsprechende Winkel ψ ermittelt werden. Diese Messungsmethode würde aber wegen der Kleinheit des Winkels ψ sehr ungenau sein und könnte keinerlei Resultat liefern, wenn man nicht ein sehr langes Lot benutzen würde. Solche

Digitized by Google

Messungen lassen sich viel exakter und einfacher mit Hilfe von Horizontalpendeln ausführen, deren Theorie im folgenden Kapitel behandelt werden soll. Man muß sich dabei zweier Horizontalpendel bedienen, die in zwei zueinander senkrechten Azimuten aufgestellt sind. Aus solchen Beobachtungen ist die wahre Lage der Lotlinie BA_1 in bezug auf ihre normale Lage BA leicht abzuleiten.

Kehren wir zur Betrachtung eines einfachen Vertikalpendels mit einem Schreibstift zurück und fragen wir uns, was geschehen würde, wenn der Erdkörper die Eigenschaften eines flüssigen Körpers besäße.

In diesem Falle wäre die Erdoberfläche nach den bekannten Gesetzen der Hydrostatik senkrecht zu der Resultierenden aller im Punkte B wirkenden Kräfte eingestellt, d. h. senkrecht zu der Richtung BA_1 und unser Apparat, welcher nur die relative Lage der wahren Lotlinie in bezug auf die Erdoberfläche anzeigt, hätte keine Abweichung der Lotlinie verzeichnet, d. h. der Winkel ψ wäre nach dem Versuche gleich Null gewesen.

Es folgt hieraus, daß der Winkel ψ für einen völlig starren Körper ein Maximum und für einen flüssigen gleich Null ist.

Wie erwähnt, kann man die Größe des Winkels ψ aus den Beobachtungen mit zwei Horizontalpendeln bestimmen und man kann ferner, indem man die Abweichungen der beobachteten Werte von der normalen Gleichgewichtslage zu bestimmten Zeitmomenten ermittelt, ψ als eine Funktion der Zeit t darstellen.

Den theoretischen Wert von ψ für eine völlig starre Erde, d. h. den Maximalwert ψ_m kann man direkt rechnerisch ermitteln, da man die Masse der Erde, der Sonne und des Mondes und ihre gegenseitige Lage kennt, ferner kann man auch ψ_m als eine Funktion der Zeit t ausdrücken.

Mit diesen Untersuchungen beschäftigten sich v. Rebeur-Paschwitz[17]) in Straßburg, Kortazzi[18]) in Nikolajev, Ehlert[19]) in Straßburg, Schweydar[20]) in Heidelberg; danach beschäftigten sich mit derselben Frage Hecker[21]) in Potsdam und Orlov[22]) in Jurjev (Dorpat) und in letzter Zeit Haid[23]) in Durlach und Freiburg.

Der Vergleich der beobachteten und der theoretischen Werte der Winkel ψ und ψ_m zeigte zunächst, daß die Abhängigkeit ψ von der Zeit vollständig der Theorie entspricht; es ergab sich aber, daß ψ immer kleiner als ψ_m ist.

Dieser Umstand weist darauf hin, daß die Erde kein absolut fester Körper ist, sondern, daß sie sich unter dem Einfluß der Attraktion der Sonne und des Mondes etwas deformiert.

Es erweist sich, daß die elastischen Eigenschaften angenähert dieselben sind, wie die eines Erdkörpers aus Stahl. Die Erde wird somit durch die Attraktion der Sonne und des Mondes angenähert so deformiert, wie eine Stahlkugel von gleicher Größe.

Die Beobachtungen weisen außerdem noch darauf hin, daß die elastischen Eigenschaften der Erde in der Richtung des Meridians und der Parallele scheinbar verschieden sind; jedoch ist diese Frage nicht hinreichend geklärt und bedarf weiterer Beobachtungen.

Digitized by Google

Es wurden nämlich die durch größere Zuverlässigkeit sich auszeichnenden Beobachtungen Heckers und Orlovs an Orten angestellt, die verhältnismäßig nahe an großen Meeren, in denen Ebbe und Flut auftreten, liegen. Die bei Ebbe und Flut auftretenden periodischen Hebungen und Senkungen großer Wassermassen können jedoch einen gewissen Einfluß auf die Lage der Lotlinie ausüben; dieser fälschende Einfluß der Ebbe und Flut ist sehr schwer zu berücksichtigen und auszuschließen.

Zur endgültigen Lösung der Aufgabe ist die Anstellung von Beobachtungen der Deformationen des Erdkörpers in möglichst großer Entfernung von großen Meeren also im Innern großer Kontinente erforderlich.

Die Theorie der Beobachtungen der Deformation der Erde werden wir eingehend im XI. Kapitel betrachten.

Außer den Bodenschwingungen, die durch Nah- und Fernbeben verursacht werden, beobachtet man noch besondere Schwingungen der Erdrinde, die nicht auf Beben zurückgeführt werden können und die je nach ihrer Art mehr oder weniger regelmäßig sind. Man nennt sie mikroseismische Bodenbewegungen oder Bodenunruhe.

Auf Grund der Beobachtungen in Potsdam teilte O. Hecker[24]) die Bewegungen nach ihrer Periodendauer in vier Klassen ein, nämlich in solche, deren mittlere Periodendauer 1. kleiner als 4 Sekunden, 2. etwa gleich 7 Sekunden, 3. etwa gleich 30 Sekunden, und 4. etwa 1 Minute und darüber beträgt.

Die Bewegungen der ersten Klasse kann man als allgemeine Tagesunruhe bezeichnen, die auf Erschütterungen, hervorgebracht durch industrielle Werke und den Verkehr, zurückzuführen sind. Sie sollen als lokale künstliche Störungen nicht weiter betrachtet werden. Auch Bewegungen, wie sie durch lokale Windböen entstehen, gehören hierhin.

Die zweite Klasse der mikroseismischen Bodenunruhe zeichnet sich dagegen durch eine bemerkenswerte Regelmäßigkeit im Rhythmus aus. In Figur 37 sind solche von dem Vertikalseismographen in Pulkovo aufgezeichnete Schwingungen dargestellt. Sie sind ein Teil des Originalseismogramms vom 18. Sept. 1910.

Wir wollen diese Schwingungen, die sowohl von Horizontal- als auch von den Vertikalseismometern aufgezeichnet werden, mikroseismische Unruhe 1. Art nennen.

Zuweilen dauern diese Bewegungen nur etliche Stunden an, bisweilen aber treten sie während einer Reihe von Tagen auf, indem sie allmählich stärker werden und dann wieder nach und nach abklingen.

Besonders oft werden sie in den Herbst- und Wintermonaten beobachtet; sie fehlen in dieser Zeit fast an keinem Tage ganz. In den Frühjahrsmonaten und besonders in den Sommermonaten ist dagegen die mikroseismische Unruhe 1. Art erheblich schwächer; es kommen in dieser Zeit Tage vor, an denen der Seismograph eine fast völlig gerade Linie ohne jegliche Andeutung einer Bodenbewegung aufzeichnet.

Die mikroseismischen Schwingungen erschweren, wenn sie stärker auf-

Digitized by Google

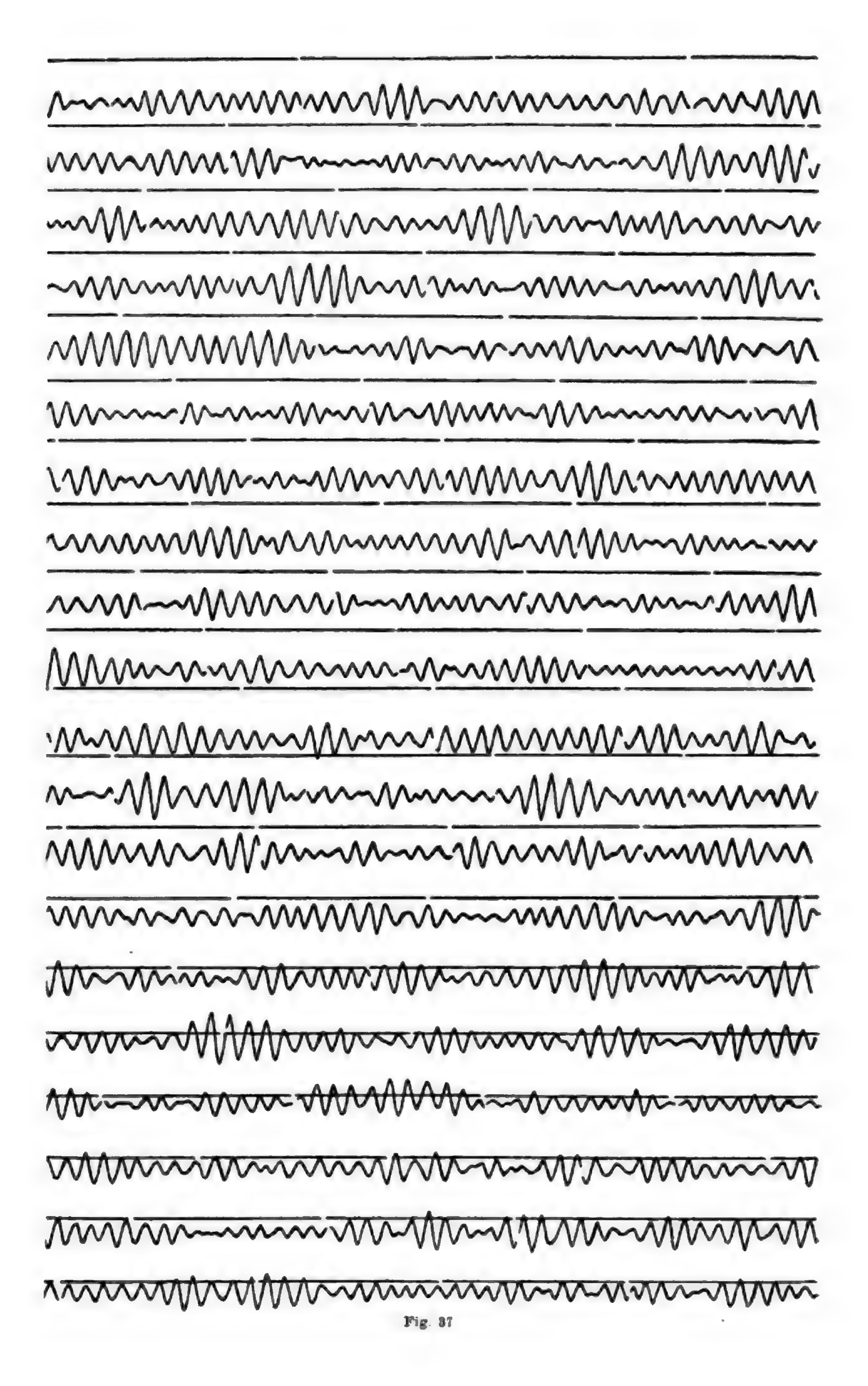


Fig. 37

Digitized by Google

treten, bisweilen sehr die Bearbeitung des Seismogramms der Fernbeben, indem sie den Einsatz der Vorläufer verdecken.

Es unterliegt übrigens keinem Zweifel, daß diese Schwingungen durch tatsächliche Bewegungen der Erdrinde verursacht werden und nicht etwa instrumenteller Herkunft sind.

Leitet man aus den Aufzeichnungen des Seismographen die wahren Bewegungen und ihre Perioden ab, so ergibt sich, daß die ganze Periode T dieser Schwingungen an den verschiedensten Punkten der Erdoberfläche meistenteils innerhalb der Grenzen von 4 bis 8 Sekunden schwankt, obwohl zuweilen auch kleinere oder größere Perioden beobachtet werden.

Meistenteils tritt eine Reihe regelmäßiger Sinuswellen auf; dann überlagert scheinbar irgendeine neue Bewegung diese Wellen, so daß die Aufzeichnung ihren regelmäßigen Charakter verliert, bis sie nach Verlauf einiger Sekunden wiederum regelmäßig wird usf.

Die Schwingungen weisen noch eine andere Merkwürdigkeit auf, nämlich die, daß mit der Zunahme der Schwingungsperiode auch die entsprechende Amplitude zunimmt und umgekehrt, wenn auch nach den Beobachtungen G. W. Walkers[25]) und E. van Everdingens[26]) zuweilen Ausnahmen von dieser Regel vorkommen. Diese Eigentümlichkeit trifft bei den gewöhnlichen harmonischen Schwingungen nicht zu; so hängt bei den Schwingungen eines einfachen Vertikalpendels bei kleinen Ablenkungswinkeln die Schwingungsperiode praktisch von der Amplitude nicht ab.

Die absolute Größe der Bodenverschiebung bei diesen mikroseismischen Schwingungen ist sehr klein, sie hält sich innerhalb der Grenzen einiger Mikronen.

Wodurch diese mikroseismischen Schwingungen 1. Art entstehen, ist noch nicht sicher klargelegt.

Eine systematische Untersuchung ist erst in der letzten Zeit begonnen worden. So haben sich vor allem Hecker[27]) und Wiechert[28]) sowie Gutenberg[29]) mit dieser Frage beschäftigt. Auch auf der seismischen Station in Pulkovo ist zurzeit ein ziemlich umfangreiches Beobachtungsmaterial angesammelt worden.

Dem Anscheine nach steht diese Art Bodenunruhe in keinem direkten Zusammenhang mit der Richtung und Stärke des Windes am Beobachtungsort, denn oft tritt sie an windstillen Tagen sehr stark auf.

Der Umstand, daß die Periode dieser Schwingungen für verschiedene Orte auf der Erde angenähert dieselbe ist, führt unwillkürlich auf den Gedanken, daß sie vielleicht mit irgendwelchen Eigenperioden der Schwingung der Erdrinde, die nach einer von manchen Geologen vertretenen Anschauung auf einer Magmaschicht ruhen soll, in Zusammenhang stehen könne.

Trifft das zu, so stehen wir vor der Frage, was diese Schwingung der Erdrinde veranlassen kann.

Nun können unter anderem die Erdbeben in der Erdrinde Vibrationen veranlassen, die auch nach dem Durchgang der seismischen Wellen einige Zeit anhalten können. Es kann ferner auch starker Wind in ähnlicher

Digitized by Google

Weise wirken, wenn sich die bewegten Luftmassen an der Oberfläche der Erde reiben.

Dieselbe Wirkung kann auch durch die Brandung der Meereswellen an den hohen und felsigen Ufern der Festländer oder auch durch den Einfluß großer Massenverlagerungen, z. B. bei Ebbe und Flut oder auch durch plötzliche Luftdruckschwankungen, wie beim Passieren eines barometrischen Maximums oder Minimums veranlaßt werden. Die letztgenannte Wirkung kann sehr bedeutend sein, wenn man bedenkt, daß eine Änderung des Barometerstandes von nur 10 mm Quecksilberdruck schon einer Druckänderung von

$$\frac{1 \times 13{,}6 \times 10000}{1000} = 136 \text{ kg}$$

auf ein Quadratmeter entspricht.

In der Tat weisen einige von O. Klotz[30]) in Kanada angestellte Beobachtungen darauf hin, daß die Intensität der mikroseismischen Schwingungen 1. Art in einem gewissen Zusammenhange mit der Form und der Lage der Isobaren und mit der Größe des entsprechenden barometrischen Gradienten steht, so daß also hiernach eine Abhängigkeit zwischen diesen Bewegungen und der Bewegung der Zyklonen vorhanden wäre. Es scheint übrigens, als wenn auch in Westeuropa die Verstärkung dieser Art Bodenunruhe einem barometrischen Maximum oder Minimum, dem Erscheinen eines Zyklons, vorangehe. Vielleicht kann es daher mit der Zeit gelingen, hierauf eine besondere Methode der Vorhersagung solcher meteorologischen Erscheinungen zu gründen.

1 4 7 10 13 16 19 22h

Fig. 38

Die mikroseismische Unruhe 1. Art scheint häufig auf großen Gebieten innerhalb kurzer Zeit, in wenigen Stunden anzuwachsen oder abzuklingen. In Figur 38 ist die Stärke der Bewegung an einer Reihe von europäischen Stationen in dreistündigen Intervallen für den 7. Februar 1912 dargestellt. Etwa um 4 Uhr morgens tritt an den

meisten europäischen Stationen ein rapides Steigen der Größe der Unruhe ein; an den weiter abliegenden Stationen Pulkovo und Upsala ist dagegen ein Steigen nicht zu verzeichnen.

Um endgültig die Frage nach der Ursache dieser Art Bewegungen zu lösen, muß man vergleichende Beobachtungen an vielen Stationen zu bestimmten Tagesstunden anstellen und ebenso Beobachtungen an Stationen, die in verschiedener Entfernung von einem Meeresufer liegen, an dem häufig starke Brandung beobachtet wird, mit solchen an weit vom Meere liegenden Stationen vergleichen. Gleichzeitig sind dann systematische Beobachtungen über Periode und Höhe der Meereswellen anzustellen.

Für den zuletztgenannten Zweck konstruierte A. Schuster[31]) für die Internationale Seismologische Assoziation einen Apparat, der die Zahl der innerhalb einer gewissen Zeit anlaufenden Brandungswellen automatisch registriert.

Er besteht aus zwei mit Quecksilber gefüllten vertikalen Rohren, von denen das eine durch ein besonderes Rohr mit dem Meere verbunden ist. Beide Schenkel sind miteinander durch ein enges Rohr verbunden, so daß die Eigenschwingung des Quecksilbers im Apparat fast aperiodisch ist. Der Apparat ist also auf der Übertragung des hydrostatischen Druckes begründet. Durch eine jede Welle wird ein elektrischer Kontakt geschlossen, der bewirkt, daß die Schreibfeder etwas vorwärts rückt, senkrecht zur Richtung der Bewegung des Registrierbandes.

Nach dem Durchgang von 120 Wellen kehrt die Feder automatisch in ihre anfängliche Lage zurück. Wir erhalten so auf dem Registrierbande eine Reihe von Diagonallinien, aus deren Schiefe wir leicht die Durchschnittsdauer einer Welle bestimmen können.

Der Apparat ist außerdem noch mit einer besonderen Vorrichtung für die Ausschaltung des Einflusses der Niveauänderung in den Röhren bei Ebbe und Flut versehen.

Die vorläufigen Beobachtungen mit diesem Apparat an den Ufern Englands ergaben als am häufigsten auftretende Periode etwa 6 Sekunden, was sehr nahe der mittleren Größe der Periode der mikroseismischen Unruhe I. Art entspricht.

Außer den rhythmischen regelmäßigen Schwingungen der Erdrinde weisen die Seismogramme oft auch einen anderen charakteristischen Typus von Schwingungen auf, die bisweilen ebenfalls sehr die Bearbeitung der Seismogramme von Fernbeben stören. Diesen Schwingungen wollen wir zum Unterschied von den ersten die Benennung mikroseismische Schwingungen II. Art geben.

Sie sind weit unregelmäßiger als die früher erwähnten und haben weit größere Perioden, die außerdem noch in viel weiteren Grenzen schwanken als die der mikroseismischen Schwingungen I. Art; im Durchschnitt können wir die Periode zu etwa 30 Sekunden annehmen.

Diese mikroseismischen Schwingungen II. Art sind dem Anscheine nach lokaler Herkunft und werden hauptsächlich durch die Stärke der an dem Orte herrschenden Winde bedingt. Die Zusammenstellung der Inten-

Digitized by Google

sität dieser mikroseismischen Schwingungen mit der Windstärke, die von J. Wilip[32]) für Pulkovo ausgeführt wurde, beweist, daß an windigen Tagen die mikroseismischen Schwingungen II. Art in Pulkovo stärker werden. Das gleiche Resultat hatte sich schon früher aus der Bearbeitung der Beobachtungen in Potsdam durch O. Hecker ergeben.

Bei starkem Winde können durch die unregelmäßigen Luftströmungen und plötzlichen Stöße Luftbewegungen in dem Raume, in dem die Apparate aufgestellt sind, hervorgerufen werden. Es ist dann die Möglichkeit nicht ausgeschlossen, daß diese Luftbewegungen durch die Spalten und Öffnungen der Schutzhüllen, die die Seismographen bedecken, unmittelbar auf die Apparate wirken können, was auch durch die Beobachtungen bestätigt wird. Dieses ist jedoch nicht die alleinige Wirkung, die der Wind ausübt, wie der folgende Versuch zeigte.

Es wurde in Pulkovo ein sehr empfindlicher Seismograph für einige Monate unter einer Stahlglocke, in der die Luft bis zu 45 mm Quecksilberdruck ausgepumpt war, aufgestellt. Die Dichtigkeit der Glocke erwies sich als so gut, daß der Druck in ihr sich im Laufe vieler Monate nicht änderte. Trotzdem verzeichnete der galvanometrisch registrierende Seismograph bisweilen bedeutende mikroseismische Schwingungen der II. Art. Hier kann gewiß keine Rede von irgendeiner unmittelbaren Wirkung der Luftströmungen sein.

Der Grund der Entstehung der mikroseismischen Schwingungen II. Art muß daher in der Wirkung des Windes auf emporragende Gegenstände, wie Gebäude, Bäume u. a. gesucht werden, die in der unmittelbaren Nachbarschaft oder, wie damals in Pulkovo, über der seismischen Station selbst sich befinden; diese war nämlich in dem Erdgeschoß des Hauptgebäudes des astronomischen Observatoriums untergebracht. Das Gebäude gerät unter dem Einfluß des Windes in solche Schwingungen und überträgt diese auf den Erdboden.

Übrigens können Luftbewegungen im Beobachtungsraume einer Station auch einen gewissen Druck auf die Pfeiler, auf welchen die seismischen Apparate stehen, ausüben und eine, wenn auch minimale Neigung derselben hervorrufen, die von den empfindlichsten Seismographen aufgezeichnet wird.

Diese Frage ist von J. Wilip[33]) eingehend untersucht worden.

Es zeigte sich, daß ein einfacher elektrischer Ventilator, der an der Eingangstür der seismischen Station angebracht ist, eine Ablenkung des Lichtpunktes auf dem Registrierapparate des Seismographen hervorrief. Man erhält sogar eine geringe Abweichung des Lichtpunktes auf der Trommel des Registrierapparates, wenn man die oben erwähnte Stahlglocke, die ein Gewicht von 160 kg besitzt, mit dem Munde anbläst. Bei diesen Versuchen wurden die unbedeutenden Änderungen des Druckes im Raume des Seismographen mittels eines sehr empfindlichen Statoskopes (empfindlicher Barograph) gemessen, bei dem 1 mm auf dem Papier ungefähr einem Druck von 0,1 mm des Quecksilberbarometers entspricht.

Aus diesen Versuchen ergibt sich ohne weiteres, daß der Wind durch indirekte Wirkung auf die Gebäude u. dgl. Bewegungen, wie sie in der Ge-

Digitized by Google

stalt der mikroseismischen Schwingungen II. Art auftreten, hervorrufen kann.

Angesichts dessen sollte man alle seismischen Stationen, die mit empfindlichen Seismographen ausgerüstet werden sollen, ganz unter der Erde bauen und die Nachbarschaft hoher Gegenstände vermeiden.

Außer den mikroseismischen Schwingungen II. Art beobachtet man zuweilen besondere Schwankungen mit noch längeren Perioden, die 1—2 Minuten und mehr erreichen. Der Grund ihrer Entstehung ist noch nicht vollständig erklärt worden. Gutenberg[34]) nimmt an, daß diese Bewegungen auf die Einwirkung des Frostes zurückzuführen sind.

Die vorstehenden kurzen Ausführungen zeigen uns schon, wieviel verschiedene Fragen von der modernen Seismometrie noch zu beantworten sind und ein wie weites Feld für neue Untersuchungen sich eröffnet.

Eine Frage, die vielfach der Gegenstand eingehender Untersuchungen gewesen ist, ist die nach der Häufigkeit und etwaigen Gesetzmäßigkeit des Auftretens der Beben.

Was zunächst die Häufigkeit anbelangt, so treten auf der ganzen Erde viel mehr Beben auf, als man gewöhnlich annimmt.

Die hochempfindlichen Seismographen geben uns, wie schon früher bemerkt, die Möglichkeit, an einer Station alle Beben von einiger Bedeutung aufzuzeichnen. Wir sehen dann, daß die Beben eine sehr gewöhnliche Erscheinung sind. Als Beispiel mag erwähnt werden, daß im Jahre 1910 die Pulkovoer Seismographen 272 große und kleinere Beben registriert haben.

Natürlich kommen dabei durchaus nicht alle Beben zur Aufzeichnung, da viele nur rein lokal auftreten. Die Zahl der in jedem Jahr bekannt werdenden Beben ist sehr viel größer. So sind z. B. in dem Generalkatalog der Erdbeben des Jahres 1907, herausgegeben von der Internationalen Seismologischen Assoziation, nicht weniger als 6925 Beben aufgeführt.

Was die Frage nach der zeitlichen Verteilung anbelangt, so scheint es, daß Beben häufiger im Herbst und Winter auftreten als im Frühling und Sommer und öfter in der Nacht als am Tage; diese Frage ist jedoch noch nicht hinreichend geklärt.

Es sind viele Versuche gemacht worden, festzustellen, ob eine Gesetzmäßigkeit in der Häufigkeit der Beben vorhanden sei. So bemühte man sich unter anderem, eine Abhängigkeit von den verschiedenen Phasen des Mondumlaufs abzuleiten. Diese Untersuchungen, denen viel Zeit und Mühe gewidmet wurde, ergaben ein vorläufig noch recht unbestimmtes Resultat; eins steht jedoch fest, daß nämlich eine deutlich ausgeprägte Gesetzmäßigkeit in der Häufigkeit der Beben nicht vorhanden ist.

Durch ein starkes Beben müssen die inneren Erdschichten so bedeutende Verschiebungen erfahren, daß sie noch längere Zeit nicht zu einer sicheren Ruhelage kommen, sondern sich häufiger verlagern und dadurch Schwingungen der oberen Erdschichten oder wiederholte Beben und einzelne Stöße, deren Intensität mit der Zeit allmählich abnimmt, veranlassen. Diese dem Hauptbeben folgenden Beben oder Stöße (after-shocks in der englischen Terminologie) dauern oft Monate, zuweilen sogar Jahre an, wie z. B. nach

Digitized by Google

dem bekannten Wĕrnyj-Beben am 9. Juni 1887; dasselbe beobachtet man auch jetzt nach dem letzten Beben in Semirĕčje vom 3—4. Januar 1911.

Man suchte weiter nach einer Abhängigkeit der Häufigkeit der Beben von verschiedenen meteorologischen Elementen, aber vorläufig erfolglos, obwohl Andeutungen dafür vorhanden sind, daß in einigen Fällen die Entstehung der Beben der Zeit nach mit dem Durchgang eines tiefen Minimums zusammenfällt.

Es ist nicht unwahrscheinlich, daß eine ähnliche Abhängigkeit vom Barometerstande existieren kann, wenn man berücksichtigt, daß beim Passieren einer starken Depression der Druck der Atmosphäre, der sich auf die inneren Erdschichten überträgt, im Laufe eines kurzen Zeitraumes innerhalb ziemlich weiter Grenzen schwanken kann, so daß es sehr wohl möglich ist, daß eine solche schnelle Änderung der Größe der äußeren Kraft den letzten Anstoß zur Störung der Lagerung von Erdschichten mit wenig stabilem Gleichgewicht geben und damit ein tektonisches Beben veranlassen kann. Aber vorläufig ist dies nur noch eine Annahme.

Zweifellos erfolgt bei einem jeden großen Beben eine bedeutende Massenverlagerung im Innern der Erde. Obwohl diese in der Tiefe liegenden Massen uns vollständig unzugänglich sind, können wir vielleicht doch demnächst aus Beobachtungen an der Erdoberfläche einige Schlüsse auf die relative Verlagerung der inneren Massen ableiten. Es wurde nämlich vor kurzer Zeit von dem ungarischen Gelehrten Baron Eötvös[35]) ein hoch empfindlicher Apparat, das Variationsgravimeter, konstruiert, das schon die kleinsten relativen Änderungen der Beschleunigung der Schwerkraft sowohl der Größe als der Richtung nach festzustellen erlaubt.

Dieser Apparat hat seiner Grundidee nach viel Gemeinsames mit dem bekannten Apparat von Cavendish, mit dessen Hilfe dieser die Anziehung der Massen und auf Grund der bekannten Anziehung der Erde ihre Masse und mittlere Dichte abgeleitet hat.

Nach dem Newtonschen Gesetz ziehen sich zwei Massen M und m, z. B. zwei Kugeln, deren Zentren in einer Entfernung r voneinander sich befinden, mit der Kraft F an.

$$F = k\frac{Mm}{r^2}.$$

Drücken wir die Massen in Grammen, r in Zentimetern und F im absoluten Maßsystem, d. h. Dynen, aus, so erhalten wir für die sogenannte Konstante der Schwerkraft k folgenden Wert:

$$k = 6{,}65 \cdot 18^{-8}\,\mathrm{CGS}.$$

Bezeichnet R den mittleren Radius der Erde, g die mittlere Größe der Beschleunigung der Schwerkraft und ϱ die mittlere Dichte der Erde, so ergibt sich

$$g = k\frac{M}{R^2} = \frac{4}{3}\pi k R \varrho$$

oder

$$\varrho = \frac{3}{4\pi}\cdot\frac{g}{kR}.$$

Digitized by Google

Setzt man $R = 6371$ km und $g = 981$ cm, so ist

$$\varrho = 5{,}53.$$

Obwohl der Koeffizient k sehr klein ist, so hat doch die Technik in der Konstruktion von empfindlichen Drehwagen solche Fortschritte gemacht, daß schon jetzt möglich ist, die Drehwage, bei der die Wirkung der äußeren Anziehungskräfte dem Direktionsmoment der Fadendrehung das Gleichgewicht hält, für die Untersuchung selbst der unbedeutendsten Änderungen der Größe und Richtung der Schwerkraft anzuwenden.

Der Apparat von Eötvös besitzt eine so große Empfindlichkeit, daß er verschiedene Werte für die Beschleunigung der Schwerkraft in der Mitte eines Zimmers und an einer Wand gibt, so daß sich also die Anziehung der Zimmerwand bereits bemerklich macht. Deshalb vermeidet man auch jetzt, den Apparat auf einem Dreifuß aufzustellen, denn die unsymmetrische Lage der Füße kann eine Anomalie in der Verteilung der Schwerkraft um den Apparat selbst herum veranlassen.

Mit einem Apparat von so großer Empfindlichkeit wird man daher erwarten können, Aufschlüsse über die Umlagerungen der inneren Erdmassen nach einem großen Erdbeben zu erhalten.

Die Russische Permanente Seismologische Zentral-Kommission wird in Kürze damit beginnen, mit einem solchen Apparate Beobachtungen über die relative Verteilung der Schwerkraft in irgendeinem seismischen Gebiet, z. B. in Turkestan oder Semirěčje anzustellen, und dann dieselben Beobachtungen nach einem neuen starken Beben wiederholen.

Eine jede Verlagerung der Massen im Innern oder an der Oberfläche der Erde ist mit einer relativen Änderung der Richtung der Drehungsachse der Erde verbunden, die wiederum eine Änderung der geographischen Breite eines Ortes zur Folge hat.

Solche Breitenänderungen sind natürlich nur sehr klein, aber sie sind mit großer Genauigkeit zu bestimmen, wenn sie auch nur wenige Hundertstel der Bogensekunde betragen. Es zeigten nun genaue astronomische Beobachtungen, die an verschiedenen Orten angestellt waren, daß die Breite eines Ortes geringen periodischen Änderungen unterliegt. Wenn wir uns die Drehungsachse der Erde auf die Himmelskugel projiziert denken, so beschreibt das Ende der Achse auf der Sphäre eine Kurve und die Achse selbst eine entsprechende konische Fläche.

Es sind verschiedene Versuche gemacht worden, zu ermitteln, ob eine Abhängigkeit zwischen dem Auftreten der Beben und den Schwankungen der Breite vorhanden ist; selbstverständlich kann die zweite Erscheinung nicht die Ursache, sondern nur eine Folgerung der ersten sein. Eine direkte Abhängigkeit ist noch nicht festgestellt worden, aber es ist wiederum eine Andeutung vorhanden, daß die Häufigkeit der Beben eine gewisse Abhängigkeit nicht von der absoluten Größe der Abweichung der Erdachse von ihrer mittleren Lage, sondern von der Geschwindigkeit der Änderung dieser Größe, oder anders ausgedrückt, von der Krümmung der entsprechenden Kurve der Polbewegung auf dem Himmelsgewölbe besitzt.

Digitized by Google

Von besonderer Wichtigkeit sind ohne Frage sorgfältige Untersuchungen der verschiedenen Erscheinungen, die einem Beben vorausgehen, damit der Zukunft eine Möglichkeit gegeben werde, das Auftreten eines Bebens mit größerer oder geringerer Wahrscheinlichkeit vorherzusagen.

Für die Lösung dieser Aufgabe, die von größter praktischer Bedeutung für die Sicherung von Menschenleben und wirtschaftlichen Werten ist, sind verschiedene Wege angedeutet.

Zunächst sind möglichst sorgfältige und systematische Untersuchungen der Aufzeichnungen, die von den empfindlichen Seismographen in der dem Beben vorhergehenden Zeit geliefert werden, so auch für die Zeit des Bebens selbst und nach demselben anzustellen. So kann es vielleicht gelingen, einige Gesetzmäßigkeiten zu ermitteln und Erscheinungen, die dem Beben unmittelbar voranzugehen pflegen, festzustellen. Detailliertes Erforschen aller Eigentümlichkeiten der Bodenbewegungen, die in den von verschiedenen seismischen Stationen erhaltenen Seismogrammen sich zeigen, kann überhaupt viel Licht auf die komplizierten physikalischen Prozesse werfen, die im Schoße der Erde fortlaufend vor sich gehen. Wir haben ja schon im vorhergehenden Kapitel gesehen, wieviel Interessantes sich allein aus dem Studium des Hodographen ergibt.

Der zweite Weg ist die systematische Untersuchung der langsamen Verschiebungen von Gebirgsmassen gegeneinander, die durch die bradyseismischen Erscheinungen an der Oberfläche entdeckt werden.

Der dritte Weg ist besonders interessant und wichtig.

Auf Grund der Untersuchungen von v. Kövesligethy[36]) und Omori[37]) scheint es, als ob eine besondere Gesetzmäßigkeit im Auftreten der Beben in demselben Gebiet existiere. Kövesligethy schreibt dieses den langsamen Änderungen der elastischen Eigenschaften der oberen Erdschichten zu, eine Erscheinung, die an die elastische Nachwirkung erinnert; er nannte sie seismische Hysteresis.

Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen und transversalen Wellen scheint nämlich für einen und denselben Ort keine konstante Größe zu sein, da sie von dem Spannungszustande der inneren Erdschichten abhängig ist, sondern sie ändert sich mit der Zeit. Mit der Vergrößerung der Spannung nehmen die Geschwindigkeiten ab.

Nach einem großen Beben scheint nun diese Geschwindigkeit allmählich mit der Zeit zu wachsen, geht dann durch ein Maximum und fängt darnach an abzunehmen. Wenn diese Geschwindigkeit auf dem absteigenden Teile der Kurve einen Grenzwert erreicht, der einem bedeutenden Spannungszustand der inneren Erdschichten entspricht, so kann man eine neue Katastrophe erwarten. Die Änderung der Geschwindigkeit mit der Zeit kann man nach den Beobachtungen schwacher, in demselben seismischen Gebiet auftretender Wiederholungsbeben beurteilen. Kövesligethy kontrollierte seine Theorie durch verschiedene japanische Beben und bestimmte den Wert der verschiedenen Konstanten, die seine Formeln enthalten.

Digitized by Google

Gewiß kann nach der Theorie Kövesligethys kein Beben mit der Genauigkeit bis auf einen Tag vorhergesagt werden, denn vieles kann von den verschiedenen meteorologischen Faktoren abhängen, wie im vorhergehenden auseinandergesetzt wurde. Durch diese kann der letzte Impuls zur Verschiebung der Schichten, die in einem wenig stabilen Gleichgewichtszustand sich befinden, gegeben werden, so daß ein Beben eintritt; man kann aber wenigstens die Zeitgrenzen, zwischen denen man das Auftreten eines neuen Bebens erwarten kann, bestimmen.

Die Theorie Kövesligethys ist natürlich noch nicht abgeschlossen und vollständig, doch hat sie schon dadurch eine unbestreitbare Bedeutung, daß sie den ersten Versuch darstellt, der Frage nach der Voraussagung der Beben, die ja von ungeheurer praktischer Wichtigkeit ist, eine streng wissenschaftliche Grundlage zu geben.

Viertens besteht aller Wahrscheinlichkeit nach ein enger Zusammenhang zwischen den Erdbeben und den Störungen der regelmäßigen Periode einiger intermittierender Mineralquellen, die in tiefen Erdschichten entstehen.

Als Beispiel solcher intermittierender Quellen kann man die Katharinen-Quelle in Boržom nennen, die regelmäßig nach bestimmten Zeitintervallen (8 Minuten) aufwallt, wobei auch ihre chemischen Bestandteile sich ändern. Zuweilen ändert sich das Intervall des Aufwallens plötzlich, was nach den Untersuchungen Moldenhauers oft in Zusammenhang mit Beben steht, da in vielen Fällen diese Änderungen den Beben vorausgehen.

Systematische Untersuchungen dieser Erscheinung im Zusammenhang mit den Aufzeichnungen der Seismographen sind von hervorragendem Interesse, denn auf diesem Wege kann es vielleicht gelingen, den Schlüssel zur Aufklärung uns noch unbekannter Erscheinungen zu gewinnen, die in der Tiefe den Erdbeben vorhergehen. Die Russische Seismologische Zentral-Kommission führte aus diesem Grunde regelmäßige parallele Beobachtungen über Temperatur, die Tätigkeit sowie den Gehalt der Katharinen-Quelle in Boržom wie auch einer der Essentukischen Quellen in Piatigorsk ein; gleichzeitig werden dort seismometrische Beobachtungen ausgeführt.

Es ist leicht möglich, daß sich mit der Zeit herausstellen wird, daß auch andere Erscheinungen, wie das Ausströmen von Gasen aus den tieferen Erdschichten, mit dem Auftreten von Erdbeben verknüpft sind.

Von der exakten Seismometrie darf man nach den Resultaten, die sie bisher geliefert, erwarten, daß sie auch in ihrer weiteren Entwickelung eine Reihe neuer Beziehungen und Gesetze ermitteln wird, die uns gestatten, jene komplizierten Prozesse, welche beständig in den tiefen, uns ganz unzugänglichen inneren Erdschichten vorgehen, klarzulegen. Wenn in manchen Fragen, wie in der Vorhersage von Erdbeben, noch keine sicheren Ergebnisse vorliegen, so ist das nicht verwunderlich. Hat doch z. B. die Meteorologie, die als Wissenschaft schon etwa 100 Jahre existiert und die mit einem völlig zugänglichen Untersuchungsobjekt, der Atmosphäre, zu tun hat, erst sehr unvollkommene Methoden für die Wetterprophezeiung insbesondere auf einige Tage im voraus entwickeln können.

Digitized by Google

Gewiß würden noch andere Erscheinungen seismischen Charakters verdienen, hier aufgeführt zu werden, da ihnen in späterer Zeit ebenfalls eine eingehende Untersuchung zu widmen sein wird; die angeführten Punkte mögen jedoch genügen, um zu zeigen, wie interessante und wichtige Themata die moderne Seismometrie in ihr Arbeitsgebiet zieht und wie weite Ausblicke sie uns eröffnet.

§ 2. Die Hauptaufgabe der Seismometrie.

Aus den vorhergehenden Ausführungen geht klar hervor, daß die Entwickelung der Seismometrie sehr eng mit der Frage nach der Bestimmung der wahren Elemente der Bewegung der Bodenteilchen während der Beben oder anderer seismischer Erscheinungen verbunden ist. Diese Seite der Frage wurde in früherer Zeit sehr wenig beachtet, denn man begnügte sich meistenteils mit der Betrachtung der relativen Bewegung dieses oder jenes Seismographen in bezug auf die Erdoberfläche und zog auf Grund eines solchen Beobachtungsmaterials die entsprechenden Schlüsse. Ein solches Vorgehen ist jedoch offenbar unzulässig und kann, wie wir späterhin sehen werden, zu ganz falschen Folgerungen führen. Zur rationellen Erforschung der verschiedenen seismischen Erscheinungen muß man von den Angaben der Apparate stets zu den wahren Bodenbewegungen übergehen, denn nur so können weitere Fortschritte in der Seismometrie erzielt werden. Da jetzt die Theorie der verschiedenen Seismometer hinreichend entwickelt ist, ist ein solcher Übergang möglich.

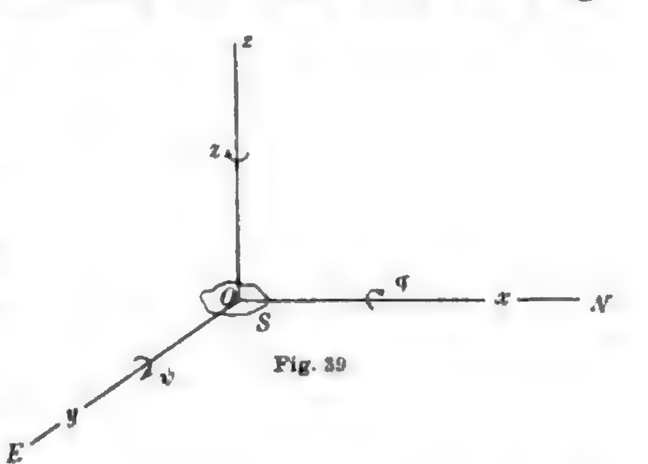


Fig. 39

Wir wollen uns nun die Grundlage dieser Frage klar machen.

Wir betrachten an der Erdoberfläche eine elementare Fläche S (Fig. 39) und auf ihr den Anfangspunkt eines festen rechtwinkligen Koordinatensystems.

Die z-Achse richten wir vertikal nach oben, die x-Achse nach Norden und die y-Achse nach Osten.

Bei den Bodenbewegungen kann diese Fläche sechs verschiedene Bewegungen haben: erstens drei Verschiebungen parallel zu den Koordinatenachsen, deren Größen wir mit x, y, z bezeichnen und zweitens drei Drehungen um dieselben Achsen Ox, Oy, Oz. Die Größen der Drehungswinkel bezeichnen wir mit φ, ψ und χ, wobei wir sie als positiv bezeichnen, wenn die Drehung in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers vor sich geht, wenn man die Achse entlang zum Koordinatenanfang O blickt.

Alle sechs Elemente der Bodenbewegung sind Funktionen der Zeit

$$x = f(t). \tag{1}$$

Digitized by Google

Wir müßten deshalb sechs verschiedene Seismographen haben, drei für die Aufzeichnungen der drei Verschiebungen und drei für die Aufzeichnungen der Drehungen, wenn wir genau die Bodenbewegung darstellen wollen.

Ein jeder Apparat gibt eine bestimmte Aufzeichnung, in der die Abszissenachse die Zeit t bildet und in der die zugehörige Ordinate z. B. ξ die Ablenkung des Apparates von seiner normalen Ruhelage bei ruhendem Boden charakterisiert.

ξ gibt uns also die relative Versetzung des Apparates in bezug auf die Erdoberfläche; diese Größe ist eine Funktion der Zeit t

$$\xi = F(t). \tag{2}$$

Der Wert dieser Funktion ist für einen beliebigen Moment t aus der entsprechenden Aufzeichnung des Apparates, dem Seismogramm, bekannt.

Die Grundaufgabe der Seismometrie besteht nun darin, nach der bekannten Funktion $\xi = F(t)$ die unbekannte Funktion $x = f(t)$ für die ganze Dauer der Bodenschwingungen, und zwar für jedes der sechs Elemente der Bewegung gesondert, zu finden.

Die in dieser allgemeinen Form dargestellte Aufgabe der Seismometrie begegnet großen, vielleicht überwindlichen Schwierigkeiten. In dem gegenwärtigen Stadium der Entwickelung der Seismometrie wird aber die Aufgabe fast niemals in dieser Strenge behandelt. Man beschränkt sich gewöhnlich nur auf die Betrachtung der Verschiebungen, da die Drehungen bei Fernbeben sehr gering sind; außerdem beschränkt man sich auf die Erforschung derjenigen Bodenbewegungen, welche einen deutlich ausgeprägten sinusartigen Charakter haben, der den Gesetzen der harmonischen Schwingungen entspricht.

Nur wenige Seismologen, wie z. B. J. Pomerancev[38]) und Arnold[39]) haben sich mit der Frage nach der Darstellung der Funktion $f(t)$ nach der gegebenen Funktion $F(t)$ für einen bestimmten Zeitraum beschäftigt, aber ihre Untersuchungen zeigen klar, daß diese Aufgabe mit großen Schwierigkeiten verknüpft ist.

Wenn es aber gelungen wäre, z. B. x als eine Funktion von t zu erhalten, so wäre damit die Aufgabe noch nicht erschöpft. Es wäre noch notwendig, die Kurve $x = f(t)$ zu analysieren, ihre Elemente zu bestimmen, dann dasselbe System der Wellen, welches diese Elemente charakterisieren, zu finden und hieraus die zugehörigen Perioden, Amplituden, Anfangsphasen und Dämpfungskoeffizienten abzuleiten. Von einer so erschöpfenden Lösung der Aufgabe ist die moderne Seismometrie noch weit entfernt; sie beschränkt sich nur auf die Betrachtung der einfachsten Fälle. Aber auch in diesem engeren Untersuchungsgebiet steht noch viel Arbeit bevor, von der man jedoch eine Reihe wichtiger theoretischer und praktischer Resultate erwarten kann.

Diese sechs Bodenbewegungen, die wir soeben erwähnt haben, können nicht nur bei den mikroseismischen Bewegungen, die von Fernbeben herrühren, sondern auch bei den makroseismischen Erscheinungen, welche in

Digitized by Google

Epizentralgebieten beobachtet werden, vorkommen. Die Untersuchung der letzteren kann man prinzipiell genommen mit derselben Art von Apparaten, wie man sie für die Untersuchung der mikroseismischen Bewegungen benutzt, durchführen, wenn sie eine entsprechend geringere Empfindlichkeit und eine genügend feste Konstruktion besitzen, Bedingungen, die praktisch jedenfalls nicht schwer zu erfüllen sein dürften.

Die Existenz der sechs Arten von Bodenbewegungen beweist die direkte Beobachtung der durch Beben hervorgerufenen Wirkungen.

So zeigt uns das bekannte Bild des Tales des Neo-Flusses in Zentral-Japan (Fig. 40) nach dem Beben vom 28. Oktober 1891 in Mino-Owari klar

Fig. 40.

die vertikale und horizontale Bodenverschiebung, die wir leicht in zwei zueinander senkrechte Richtungen zerlegen können. In diesem und anderen analogen Fällen haben wir es mit bleibenden Verschiebungen des Bodens zu tun; bei den mikroseismischen Erscheinungen aber finden wir schwingende Bodenbewegungen um eine bestimmte Gleichgewichtslage.

Die Drehung des Flächenelementes S um die Achsen Ox und Oy entspricht einer Neigung der Erdoberfläche um eine bestimmte horizontale Drehungsachse, und deshalb ist diesen Drehungstypen die Benennung „Neigungswellen" gegeben worden.

Die Existenz sehr bemerkbarer Neigungswellen wenigstens im Epizentralgebiet wird deutlich ersichtlich aus Fig. 41, die die Wirkung einer seismischen Welle auf dem Alluvialboden in der Mission Street in St. Franzisko während des bekannten Bebens am 18. April 1906 darstellt.

Digitized by Google

Daß es Drehungen um eine vertikale Achse auch bei Fernbeben gibt, ist noch nicht beobachtet worden; aller Wahrscheinlichkeit nach kommen solche Drehungen nicht vor. Im Epizentralgebiet können sie jedoch zweifellos stattfinden.

Fig. 41.

So beweist wahrscheinlich die starke Drehung des oberen Teiles eines Grabdenkmals in Chhatak (Fig. 42) während des Assam-Bebens am 12. Juni 1897, daß eine starke Drehung auf die Basis des Denkmals eingewirkt haben muß.

Wenn man gegen dieses Beispiel einwenden kann, daß eine solche Drehung von einer horizontalen Bodenverschiebung veranlaßt werden kann, wenn der seismische Stoß nicht die Projektion des Schwerpunktes des Denkmals auf die Horizontalebene traf, so läßt die folgende Fig. 43, die die trichterförmigen Bodensenkungen in Rowmari während desselben Assam-Bebens darstellt, keinen Zweifel übrig, daß Bodendrehungen um eine vertikale Achse bei starken Beben in der Tat stattfinden.

Fig. 42.

Nachdem wir das reelle Vorhandensein aller sechs Elemente der Bodenbewegung bei Beben haben zeigen können, wollen wir sehen, auf welche Weise die absolute Größe dieser Bewegungen aus den Beobachtungen bestimmt werden kann.

Wir nehmen dazu einen konkreten Fall der horizontalen Bodenverschiebungen.

Denken wir uns eine horizontale berußte Glas-

Digitized by Google

Fig. 43

platte, welche unmittelbar mit der Erdoberfläche verbunden ist und einen unbeweglichen Stift, der auf der betreffenden Platte zeichnen kann, der aber nicht mit der Erde, sondern beständig mit einem unbeweglichen Koordinatensystem in Verbindung steht. Bei den horizontalen Bodenverschiebungen wird dieser Stift auf der Glasplatte eine Kurve beschreiben, welche genau den wahren horizontalen Bodenverschiebungen entspricht, die wir zu bestimmen haben, nur mit dem Unterschied, daß, wenn z. B. die Erdoberfläche nach rechts sich verschiebt, der Stift sich um dieselbe Größe nach links bewegt und umgekehrt.

Aber ein solcher unbeweglicher Stift an der Erdoberfläche, der mit ihr durch nichts verbunden ist, kann praktisch nicht verwirklicht werden. Es fragt sich nun, ob und wie es möglich ist, durch Apparate, die auf der Erdoberfläche aufgestellt und beständig mit ihr verbunden sind, die wahren Bodenverschiebungen bezogen auf das unbewegliche Koordinatensystem zu ermitteln?

Auf den ersten Blick scheint diese Aufgabe unlösbar zu sein, da wir doch nur die relativen Versetzungen des Apparates in bezug auf die Erdoberfläche ausmessen können; jedoch gibt, wie wir weiter sehen werden, die analytische Mechanik uns die Möglichkeit einer vollständig bestimmten und strengen Lösung der Aufgabe.

Denken wir uns eine schwere Metallkugel A (Fig. 44), die an einem Faden im Punkte O aufgehängt und unten mit einem Stift versehen ist, dessen unteres Ende B auf einer berußten Glasplatte schreiben kann.

Fig. 44.

Digitized by Google

Ein solcher Apparat erscheint als Prototyp aller Seismographen, die für die Registrierung der horizontalen Bodenverschiebungen bestimmt sind.

Auf der beigefügten Figur ist statt der Glasplatte die rotierende Walze eines besonderen Registrierapparates dargestellt. Die Walze ist mit berußtem Papier bespannt. Für die Berußung benutzt man eine rußende Gasflamme, eine Petroleum- oder eine Terpentinlampe mit breitem Dochte.

Ein solches physikalisches Pendel ist in betreff seiner Eigenperiode der Schwingungen T einem mathematischen Pendel von bestimmter Länge äquivalent, dessen Pendelmasse in einem Punkte, dem Schwingungspunkte, konzentriert zu denken ist. Die entsprechende Entfernung l eines Punktes von der Drehungsachse O nennt man die reduzierte Pendellänge.

Stellen wir uns nun vor, daß die Erdoberfläche samt dem aufgestellten Apparat eine plötzliche Verschiebung von der Größe x nach rechts erfahren habe. Um dieselbe Größe verschiebt sich dann auch die Glasplatte oder der Registrierapparat nach rechts, ebenso auch der obere Aufhängepunkt O dieses einfachen Vertikalpendels.

Fig. 45.

Das Schwingungszentrum aber, in dem wir uns die Masse des Pendels konzentriert zu denken haben, bleibt nach dem Trägheitsgesetze an demselben Orte; infolgedessen verlegt sich das Ende B des Schreibstiftes in bezug auf die Glasplatte nach links. Wenn wir den Abstand B von der Drehungsachse mit L bezeichnen, so wird die Größe der relativen Versetzung ξ des Stiftes auf der Platte folgendermaßen ausgedrückt sein:

$$\xi = \frac{L}{l}x. \tag{3}$$

Hieraus finden wir

$$x = \frac{l}{L}\xi. \tag{4}$$

Es ergibt sich aus Fig. 45, daß, wenn der Befestigungspunkt des Pendels O und der Punkt B auf der Platte, der der Ruhelage des Pendels entspricht, sich um die Größe x nach rechts, nach O' und B' verschieben, die Lage des Schwingungszentrums C unverändert bleibt, und daß sich das Ende der Schreibfeder dann nach links, nach B_1 verschiebt, so daß die relative Verschiebung des Stiftes auf der Platte $B_1B' = \xi$ ist.

Bezeichnet man den Winkel $OCO' = B_1O'B'$ mit α, wo α immer eine kleine Größe ist, so ergibt sich:

$$\xi = L\alpha$$

und

$$x = l\alpha$$

oder

$$\xi = \frac{L}{l}x.$$

Digitized by Google

Also sehen wir, daß man die wahre Größe einer plötzlichen Bodenverschiebung x ermitteln kann, wenn man l und L kennt und die relative Versetzung ξ des Apparates mißt.

In diesem Falle benutzen wir das Trägheitsprinzip, um den unbeweglichen Punkt zu erhalten, der mit der Erde nicht verbunden sein sollte und der notwendig war, um die wahre Bodenbewegung feststellen zu können. In der englischen Terminologie heißt dieser Punkt the steady point.

Doch kann der Punkt C nur für eine sehr kurze Zeit als unbeweglich aufgefaßt werden.

Wenn x fortfährt, sich mit der Zeit zu ändern, z. B. aus positiven Werten in negative übergeht und umgekehrt, so bleibt der Punkt C nicht unbeweglich, sondern das Pendel kommt allmählich in schwingende Bewegung.

Es stellt dann die Bewegung der Schreibspitze B schon das Resultat der Summe zweier Bewegungen dar, nämlich der wahren Bodenbewegung, welche zu bestimmen ist, und der Eigenbewegung des Apparates.

Um ξ als Funktion der Zeit t zu erhalten, kann man naturgemäß keine unbewegliche Platte benutzen, sondern man muß ihr eine gleichförmig fortschreitende Bewegung in einer zu der Schwingungsebene des Pendels senkrechten Richtung geben.

Das erreicht man am einfachsten mittels einer mit berußtem Papier bezogenen zylindrischen Trommel, die durch ein besonderes Uhrwerk gleichmäßig um ihre Achse gedreht wird. Zur Markierung der Zeit und der Nullage des Apparates kann man eine besondere Nullinie benutzen, die ein anderer Stift erzeugt, der durch eine besondere Kontaktuhr etwa jede Minute auf zwei bis drei Sekunden elektromagnetisch zur Seite gezogen wird und so zugleich eine Zeitmarkierung bewirkt.

So kann also die Kurve $\xi = F(t)$ aus den Beobachtungen bestimmt werden.

Vom mathematischen Gesichtspunkte aus besteht nun die Aufgabe darin, in der Funktion $F(t)$ diejenigen Glieder, welche von der Eigenbewegung des Apparates abhängen, abzusondern, so daß man diejenigen, welche durch die wahre Bodenbewegung bedingt sind, rein erhält.

Wie dieses in der Praxis zu verwirklichen ist, werden wir im folgenden Kapitel sehen.

Besonders interessant ist der Fall, wenn die Bodenbewegung einen regelmäßigen sinusartigen Charakter hat, z. B.

$$x = x_m \sin(pt + \delta), \tag{5}$$

wo x_m die wahre Amplitude der Bodenverschiebung und δ die Anfangsphase ist, und die volle Periode der Bodenschwingung T_p mit der Größe p durch folgende Beziehung verbunden ist

$$T_p = \frac{2\pi}{p}. \tag{6}$$

Die Eigenbewegung des Pendels hat bei kleinen Ablenkungswinkeln ebenfalls einen sinusartigen Charakter, wobei die volle Periode seiner

Digitized by Google

Schwingungen T, wie aus der Mechanik bekannt ist, durch folgende Formel ausgedrückt wird:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (7)$$

Bei harmonischer Bodenbewegung, wie sie durch die Gleichung (5) definiert wird, wird das betreffende Pendel infolge des Einflusses der Eigenbewegung auf der Registriertrommel keine einfache Sinusoide beschreiben, sondern eine kompliziertere Kurve, deren Ausschläge nicht nur von den konstruktiven Eigentümlichkeiten des Apparates (den Größen l und L), sondern auch von den Größen x_m und T_p oder, genauer ausgedrückt, von dem Verhältnis $\frac{T_p}{T} = u$ abhängen.

Es wäre nun ganz falsch, von den Größen der Amplitude der wahren Bodenverschiebung x_m direkt auf die Größen der Ausschläge des Vertikalpendels auf der Registriertrommel zu schließen, denn es können Fälle vorkommen, wo bei sehr kleinen Größen x_m, die Ausschläge des Apparates sehr groß werden und umgekehrt, wo bei bedeutenden Größen x_m die Ausschläge sehr klein sind. Die Größe des Ausschlages eines Apparates wird außer von x_m noch durch die Größe des Verhältnisses $\frac{T_p}{T} = u$ in sehr hohem Maße beeinflußt.

Ist u nahe der Einheit, ist also nahezu Resonanz vorhanden zwischen der Periode der Bodenbewegung und der Periode der Eigenbewegung des Apparates, hat also das Pendel keine Dämpfung, so können für kleine Werte von x_m sehr große Ausschläge eintreten; umgekehrt können für große Werte von x_m und u, d. h. bei Bodenbewegungen, deren Periode groß ist im Vergleich zur Periode des Apparates, die Ausschläge des letzteren sehr klein sein.

Es läßt sich dieses leicht mittels einer kleinen beweglichen Plattform, auf der ein einfaches kleines Vertikalpendel aufgestellt ist, zeigen.

Gibt man der Plattform mit der Hand eine Bewegung im Tempo der Eigenperiode des Pendels, was mit Hilfe eines Metronoms, das auf diese Eigenperiode eingestellt ist, leicht gelingt, so kann man selbst bei sehr geringen Amplituden der Plattformbewegung das Pendel zu großen Ausschlägen bringen; bewegt man umgekehrt die Plattform um größere Beträge, aber sehr langsam hin und her, so wird man finden, daß das Pendel fast in Ruhe bleibt.

Diese sogenannten Resonanzerscheinungen wurden in früherer Zeit fast stets, werden aber teilweise auch heute noch zu wenig beachtet, trotzdem sie der wichtigste Faktor für die richtige Abschätzung der wahren Amplituden der Bodenbewegung sind.

Das Vertikalpendel der oben beschriebenen einfachen Konstruktion stellt freilich noch einen sehr unvollkommenen seismischen Apparat dar. Zunächst ist es wegen seiner verhältnismäßig kurzen Schwingungsperiode wenig empfindlich für die Registrierung der langperiodischen Wellen in der Hauptphase des Bebens; sein Hauptmangel besteht aber darin, daß es in allen möglichen

Digitized by Google

Azimuten schwingen kann und deshalb nicht imstande ist, eine bestimmte Komponente der horizontalen Bodenverschiebung zu registrieren.

Wie kompliziert die Aufzeichnung dieses einfachen Vertikalpendels bei einem Beben sein kann, zeigen die Figuren 46 und 47, welche die Aufzeichnung eines solchen Apparates auf einer ruhenden Platte bei zwei Erdbeben auf den Philippinen darstellen.

Aus diesen Figuren ist sehr schwer irgend etwas herauszulesen.

Im ersten Falle sieht man, daß die Bewegung des Pendels vorzugsweise in zwei bestimmten Richtungen geschah, im zweiten Falle haben wir

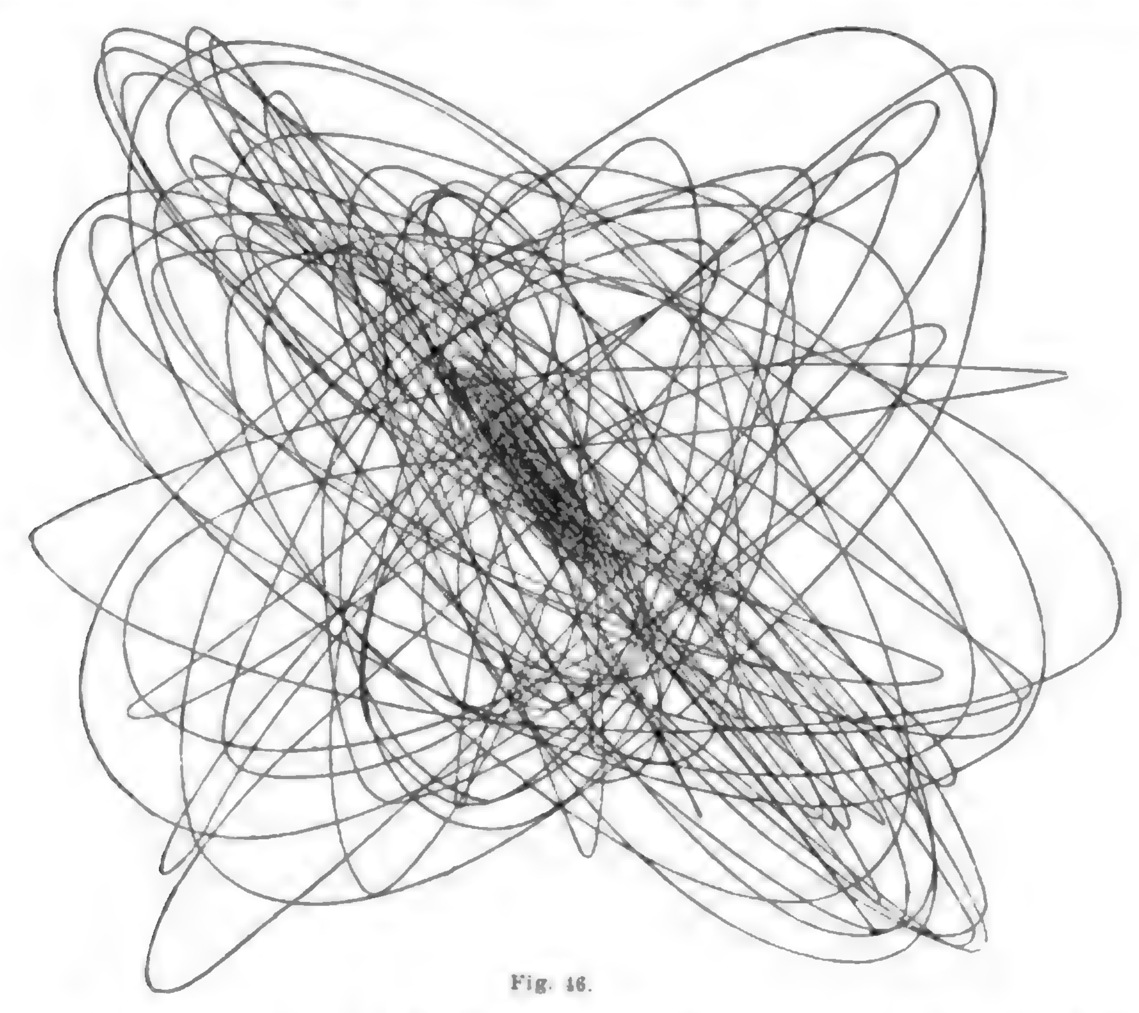


Fig. 46.

eine sehr originelle und hübsche Figur, die zeigt, daß das Ende des Schreibstiftes eine Reihe ellipsenartiger Kurven beschrieben hat, aus denen aber sehr schwer irgendein bestimmter Schluß über den wahren Charakter der entsprechenden Bodenbewegung zu ziehen ist.

Wenn die moderne Seismometrie genötigt sein würde, ihre Folgerungen und Schlüsse auf ein solches Beobachtungsmaterial zu begründen, so wäre natürlich ein erheblicher Fortschritt in der Erkenntnis der bei Beben auftretenden Bodenbewegungen nicht zu erwarten.

Heutigentages sind solche einfache Pendel, zuweilen auch Tromometer genannt, fast ganz außer Gebrauch.

Nun kann man das gewöhnliche Vertikalpendel in sehr einfacher Weise so umgestalten, daß es nur in einer bestimmten Ebene schwingen kann,

Digitized by Google

wenn man die Masse M des Pendels an einem besonderen, festen Rahmen RR (vgl. Fig. 48) und nicht an einem einfachen Vertikalfaden aufhängt. Dieser

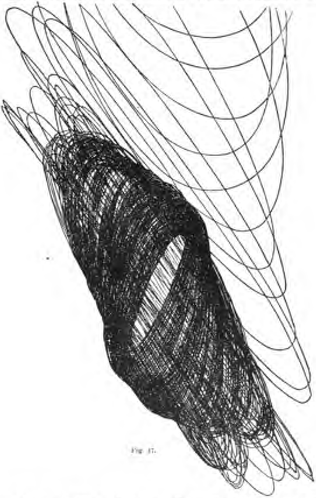


Fig. 47.

Rahmen wird zweckmäßig nach oben erweitert, und es wird dann sein oberer Teil mittels zweier dünner Stahllamellen AB an dem Pendelgestell befestigt.

Bei dieser Art der Aufhängung kann ein Pendel nur eine bestimmte Schwingungsebene haben. Sind zwei solcher Apparate, und zwar einer

Digitized by Google

im Meridian und der andere im ersten Vertikal aufgestellt, so kann man eine jede der beiden Komponenten der horizontalen Bodenverschiebung gesondert registrieren.

Wenn wir imstande sein würden, die wahren maximalen Bodenverschiebungen im Meridian und im ersten Vertikal, welche wir entsprechend mit x_N und x_E bezeichnen, beim ersten Eintreffen der longitudinalen seismischen Wellen der ersten Vorphase (P) zu bestimmen, so könnten wir sehr leicht das wahre Azimut des Epizentrums α berechnen. Wenn wir den Verschiebungen nach Norden und Osten das Zeichen +, und nach Süden und Westen das Zeichen — geben und Größe und Vorzeichen der Ablenkungen der Apparate den Seismogrammen entnehmen, so geht ohne weiteres daraus hervor, in welcher Richtung die erste horizontale Bodenverschiebung vor sich gegangen ist.

Ist z. B. die Verschiebung x_N nach N und x_E nach E erfolgt, so war die Bodenverschiebung beim ersten Stoß nach NE gerichtet, wobei der Winkel α zwischen der Richtung der Verschiebung und dem Meridian nach Fig. 49 aus der Formel zu bestimmen ist

Fig. 48

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N}. \tag{8}$$

Wenn die erste Welle eine Kondensationswelle ist, was aus der Richtung des ersten Ausschlages des Vertikalseismographen hervorgeht, die erste Boden-

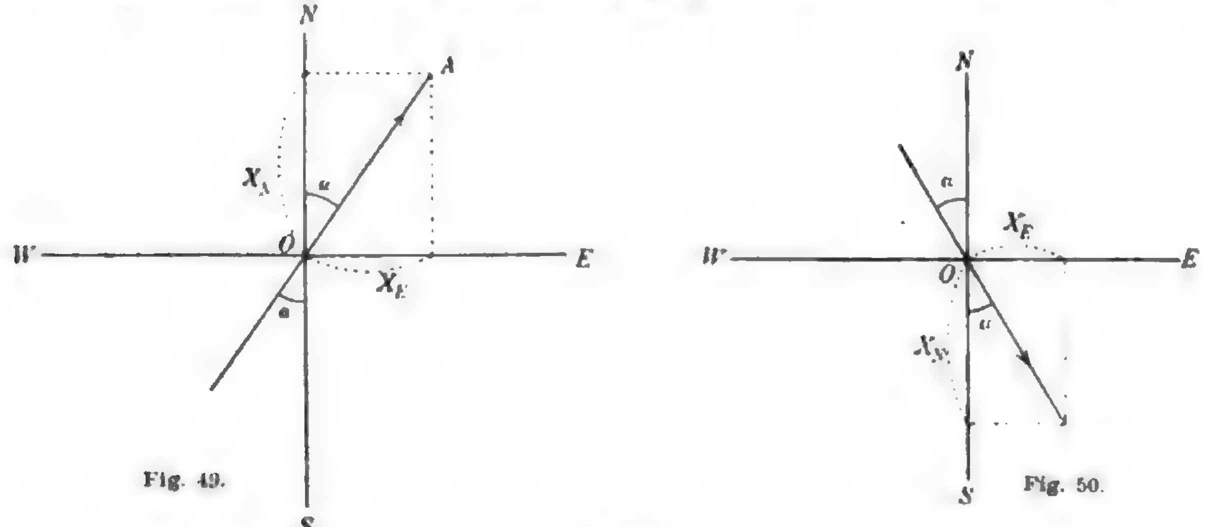


Fig. 49. Fig. 50.

bewegung also nach oben gerichtet ist, so liegt das Azimut α des Epizentrums im SW-Quadranten; im Falle einer Dilatationswelle liegt es im NE-Quadranten.

Ist aber z. B. x_N negativ und x_E positiv, so fällt (Fig. 50) nach

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_E}{x_N}$$

die Richtung der Bodenbewegung in den SE-Quadranten.

Digitized by Google

Das Azimut des Epizentrums liegt dann einer Kondensations- oder Dilatationswelle entsprechend entweder im NW- oder SE-Quadranten.

Die absolute Größe der maximalen horizontalen Bodenverschiebung h_m ergibt sich einfach aus der Formel

$$h_m = \sqrt{x_E^2 + x_N^2}. \tag{9}$$

Wenn wir bei dem ersten Stoß (P) auch die absolute Größe der maximalen Vertikalkomponente z_m der Bodenverschiebung messen konnten, so können wir sehr einfach den scheinbaren Emergenzwinkel $\bar{e}$ nach der Formel (10) bestimmen (vgl. Fig. 51).

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{z_m}{h_m}. \tag{10}$$

Der Winkel $\bar{e}$ kann also unmittelbar aus den Beobachtungen ermittelt werden. Wir bezeichnen diesen Winkel mit einem Strich über dem Buchstaben e, und nennen ihn den scheinbaren Emergenzwinkel, zum Unterschied von dem wahren Emergenzwinkel $CBD = e$, unter dem der seismische Strahl aus E die Erdoberfläche im Beobachtungsort B trifft.

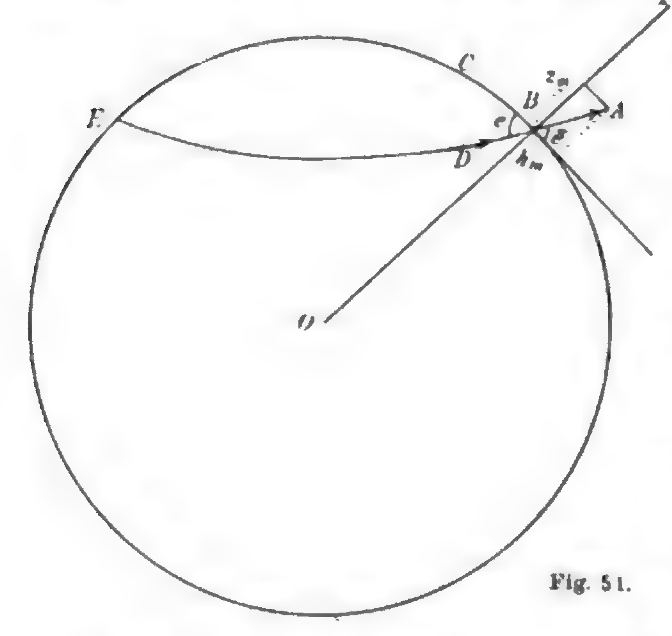


Fig. 51.

Die Winkel e und $\bar{e}$ unterscheiden sich voneinander nur wenig, da ein Teil der einfallenden seismischen Energie des Strahles EDB in B ins Innere der Erde reflektiert wird. Trotzdem muß zwischen diesen zwei Winkeln eine vollständig bestimmte Abhängigkeit vorhanden sein, die aber vorläufig noch nicht hat festgestellt werden können.

Auf die beiden berührten Fragen, die Bestimmung des Azimuts des Epizentrums und des Emergenzwinkels, werden wir noch in der Folge zurückkommen (im Kap. X).

Ist die Größe einer jeden der drei Verschiebungen, der beiden horizontalen und der vertikalen, als Funktion der Zeit t bekannt, so finden wir leicht die entsprechenden zweiten Derivierten nach t oder die Beschleunigungen, die die Größen derjenigen Kräfte, die in den gegebenen Richtungen wirken, charakterisieren. Kennt man die drei Komponenten, so ergibt sich daraus auch die Resultierende.

Statt die Beschleunigungen zu bestimmen, könnte man auch die Projektionen der Geschwindigkeit der Bewegung bestimmen und nach diesen Projektionen die absolute Größe der ganzen Geschwindigkeit v aufsuchen.

Sehen wir von dem Einflusse der Drehungen, die meistenteils im Vergleich zu den Verschiebungen klein sind, ab, so können wir die Intensität

Digitized by Google

der seismischen Energie, die im Beobachtungsort B auftritt, proportional dem Quadrat der Geschwindigkeit v annehmen.

Im Falle eines sinusartigen Charakters der Bodenbewegung bieten die Berechnungen der Geschwindigkeiten und Beschleunigungen keine Schwierigkeiten.

Wenn

$$x = x_m \sin(pt + \delta),$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p}$$

ist, so sind die entsprechenden Projektionen der Geschwindigkeit

$$\frac{dx}{dt} = \frac{2\pi}{T_p} x_m \cdot \cos(pt + \delta),$$

und die Projektion der Beschleunigung

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_p^2} x_m \sin(pt + \delta).$$

Die absoluten maximalen Größen der Geschwindigkeit und Beschleunigung sind

$$\frac{2\pi}{T_p} x_m$$

und

$$\frac{4\pi^2}{T_p^2} x_m.$$

Denken wir uns nun, daß wir in irgendeiner Weise die Größe der seismischen Energie an verschiedenen Punkten, die nahe oder direkt am Epizentrum irgendeines Bebens liegen, bestimmt haben.

Wir bezeichnen diese Energie mit I. Je größer die Entfernung Δ des gegebenen Punktes vom Epizentrum ist, desto kleiner ist im allgemeinen I.

Verfügt man über eine Reihe entsprechender Werte von I und Δ, so kann man die angenäherte Herdtiefe h des Bebens nach einer einfachen und eleganten Methode, auf welche zuerst Dutton[40]) hingewiesen hat, ermitteln.

Da wir uns auf Punkte, die nicht weit vom Epizentrum liegen, beschränken, so können wir in erster Annäherung die Oberfläche der Erde als eine Ebene betrachten.

Da der Herd niemals sehr tief liegt, so vernachlässigen wir auch die Absorption der seismischen Energie in den oberen Erdschichten; bei einer strengen Ableitung würden übrigens beide Korrektionen sowohl wegen Krümmung als auch wegen Absorption leicht zu berücksichtigen sein.

Wir nehmen also an, daß die Größe der seismischen Energie umgekehrt proportional ist dem Quadrat der Entfernung r des Beobachtungsorts von dem Herde E.

Es sei in Fig. 52 MN die Erdoberfläche, H der Herd des Bebens, und B irgendein Beobachtungsort, der in der Entfernung Δ von E liegt.

Dann ist

$$r^2 = \Delta^2 + h^2$$

und

$$I = \frac{A}{\Delta^2 + h^2}, \tag{11}$$

wo A eine Konstante ist.

Die Abhängigkeit I von der Epizentralentfernung Δ kann man graphisch darstellen, indem man I als Ordinate und Δ als Abszisse in einem rechtwinkligen Koordinatensystem aufträgt. Es ergibt sich dann die Kurve APC, welche also die Abhängigkeit I von Δ darstellt.

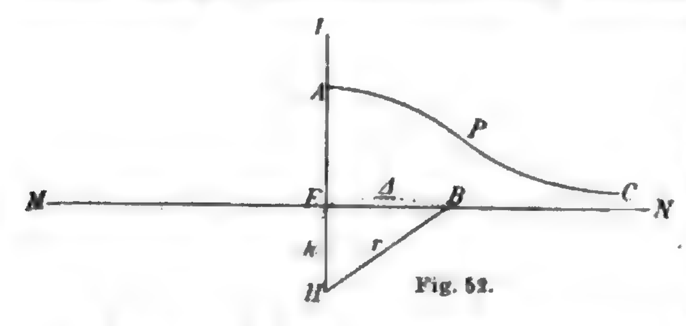


Fig. 52.

Verfügt man über Beobachtungen an mehreren Stationen, die in verschiedenen Entfernungen vom Epizentrum liegen, so kann man mit einer gewissen Annäherung die Kurve $I = f(\Delta)$ zeichnen.

Sind zwei Paar der entsprechenden Größen I und Δ bekannt, so kann man leicht die zwei Unbekannten A und h ermitteln, also die gesuchte Herdtiefe H bestimmen.

Die Methode Duttons ist hiermit nicht völlig identisch.

Wir wollen die Eigenschaften der Kurve $I = f(\Delta)$, die durch die Gleichung (11) definiert wird, untersuchen.

Dazu bestimmen wir zuerst die Größen $\frac{dI}{d\Delta}$ und $\frac{d^2 I}{d\Delta^2}$.

$$\frac{dI}{d\Delta} = -2A \cdot \frac{\Delta}{(\Delta^2 + h^2)^2}$$

und

$$\frac{d^2 I}{d\Delta^2} = -2A \cdot \frac{(\Delta^2 + h^2)^2 - \Delta \cdot 2(\Delta^2 + h^2) \cdot 2\Delta}{(\Delta^2 + h^2)^4} = 2A \frac{3\Delta^2 - h^2}{(\Delta^2 + h^2)^3}.$$

Die erste Formel zeigt, daß $\frac{dI}{d\Delta}$ immer negativ ist, und die zweite, daß für

$$\Delta < \frac{h}{\sqrt{3}} \quad \text{ist} \quad \frac{d^2 I}{d\Delta^2} < 0;$$

die Kurve ist also konkav zur Abszissenachse, für $\Delta > \frac{h}{\sqrt{3}}$ ist sie dagegen konvex.

Im Punkte P, wo

$$\Delta = \frac{h}{\sqrt{3}} \tag{12}$$

ist, ändert sich die Intensität der seismischen Energie am schnellsten mit der Entfernung Δ, d. h. die Isoseisten nähern sich einander am meisten.

Digitized by Google

Die Lage dieses Inversionspunktes hängt nicht von der absoluten Größe der seismischen Energie ab, d. h. sie ist von der Größe A unabhängig; wenn wir deshalb über ein hinreichendes Beobachtungsmaterial verfügen, die Kurve $I = f(\Delta)$ konstruieren und den Inflexionspunkt finden können, so erhalten wir sogleich die gesuchte Herdtiefe nach der Formel (12), wenn wir die entsprechende Größe Δ kennen.

§ 3. Die wichtigsten Typen von Seismographen.

Die Zahl der seismischen Apparate ist sehr groß, sie können jedoch fast alle auf einige bestimmte Typen zurückgeführt werden, die wir hier kurz betrachten wollen. Dabei werden wir im allgemeinen auf die Konstruktionsdetails der Apparate nicht eingehen, sondern uns im wesentlichen darauf beschränken, die Prinzipien, die ihrer Konstruktion zugrunde liegen, zu erläutern.

Wenden wir uns zunächst zu denjenigen Seismographen, die für die Registrierung der horizontalen Bodenbewegungen bestimmt sind.

Das einfache Vertikalpendel.

Diesen Typus der Apparate in seiner einfachsten Form haben wir schon im vorhergehenden Paragraphen kurz betrachtet.

Um die Schwingungen des Apparates auf eine bestimmte Schwingungsebene zu beschränken, kann man, wie wir gesehen haben, die Pendelmasse an einem festen Rahmen, der mittelst zweier Stahllamellen aufgehängt ist, anbringen (vgl. Fig. 48).

Eine Abbildung der Registrierung eines solchen Apparates ist in Fig. 53 dargestellt.

Hierbei wird das berußte, zusammengeklebte Papierband über eine Walze gehängt, während eine zweite leichte Walze unten in das Band hineingelegt wird und dieses straff zieht, so daß das Papier sich glatt an die obere Walze anlegt. Letztere ist mit einem Uhrwerke verbunden, welches das Papierband unter dem Schreibstift des Seismographen weiterführt. Durch eine einfache Einrichtung ist die untere Walze gegen die obere etwas versetzt, so daß das Papierband sich spiralig fortbewegt. Eine solche Registriereinrichtung ist bei verschiedenen Seismometern gebräuchlich.

A
B

Fig. 53.

Da die Drehungsachse AB eines solchen Vertikalpendels horizontal ist und es nur in einer bestimmten Ebene schwingen kann, so muß man für die Registrierung der zwei Horizontalkomponenten der Bodenbewegungen zwei solche Apparate haben.

Digitized by Google

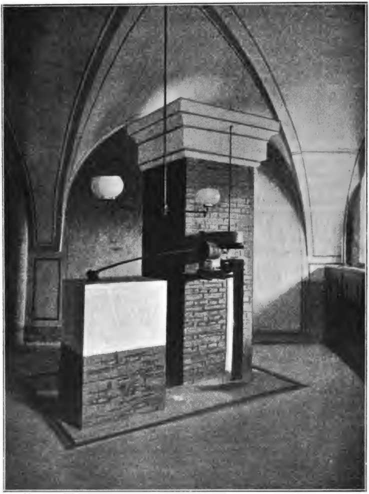


Fig. 54.

Bei einigen Typen von Vertikalpendeln, z. B. beim Vertikalpendel Vicentinis, das Fig. 54 und 55 zeigen, ist das Pendel so aufgehängt, daß es in allen Azimuten schwingen kann; die Zergliederung der Bewegung in zwei Komponenten, für die man gewöhnlich die Richtung des Meridians und des ersten Vertikals wählt, erreicht man in der folgenden einfachen Weise.

Digitized by Google

Der Registrierstift l in Fig. 55b spielt bei c in Gabeln, die an den beiden senkrecht zueinander gelagerten, leicht beweglichen Schreibhebeln N befestigt sind; einer von diesen ist ein Kniehebel. Die Bewegung des Stiftes wird durch diese Einrichtung in zwei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt.

Das Detail der Einrichtung ist ohne weiteres aus Fig. 55 zu erkennen; wir brauchen daher nicht weiter darauf einzugehen.

Dasselbe Prinzip der mechanischen Zerlegung der Bewegung in zwei Komponenten wird auch bei dem schweren Wiechertschen Vertikalpendel, das auf der seismischen Station zu Göttingen aufgestellt ist, angewandt.

Dieses Vertikalpendel zeichnet sich durch eine sehr große Masse aus, es wiegt nämlich 17000 kg. Als Masse dient ein großer eiserner Hohlzylinder, der mit Schwerspat, einem Material, das das spez. Gewicht 4 hat, gefüllt ist.

Dieser Zylinder ist an drei kurzen Eisenstangen aufgehängt. Die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels ist daher nicht groß, nämlich nur $1^1/_2$ Sekunden, so daß das Pendel vorzugsweise für die Registrierung seismischer Wellen kurzer Periode sich eignet.

Fig. 55.

Die normale Vergrößerung dieses Apparates beträgt nicht weniger als 2000, was durch ein System aufeinanderfolgender Vergrößerungshebel erreicht wird.

Nun erfährt aber der Schreibstift eines jeden seismischen Apparates bei seiner Bewegung auf der berußten Papierfläche eine gewisse Hemmung infolge der Reibung, die im allgemeinen nicht konstant, sondern veränderlich ist. Auch wenn sie ihrer absoluten Größe nach nicht groß ist, so wirkt sie doch auf die Bewegung des Pendels ein und ändert den Charakter seiner Schwingung etwas. Damit wird aber die exakte Ausmessung des Seismogramms erschwert.

Zur Verminderung dieser verfälschenden Einwirkung der Reibung auf die Aufzeichnung der Apparate gibt man diesen daher eine große Masse; es muß die Masse um so größer sein, je stärker die Vergrößerung ist, so daß also Apparate mit starker Vergrößerung sehr große Massen er-

Digitized by Google

fordern. Dieses ist bei der mechanischen Registrierungsart nicht zu umgehen.

Die Konstruktion komplizierter Vergrößerungshebel, besonders bei der Vereinigung der Hebelarme durch Gabeln, wie Fig. 56 darstellt, ist mechanisch nicht leicht auszuführen, da es sehr schwer ist, den toten Gang besonders zwischen Gabel und Stift zu vermeiden. Macht man die Gabel sehr eng, so tritt leicht starke Reibung ein, die bisweilen ein Steckenbleiben des Stiftes zur Folge hat.

Die Zergliederung der Bewegung eines einfachen Vertikalpendels, das in allen möglichen Azimuten schwingen kann, durch mechanische Vorrichtungen bietet noch eine andere Schwierigkeit, daß man nämlich niemals völlig überzeugt sein kann, daß die Aufzeichnung jeder einzelnen Komponente durchaus unabhängig von der anderen ist. Infolge der unvermeidlichen Reibung in den verschiedenen Gelenkverbindungen aller mechanischen Teile ist es immer möglich, daß die eine Komponente etwas auf die Bewegung der anderen reagiert, was eine Beeinflussung der Aufzeichnung des Apparates selbst mit sich bringt.

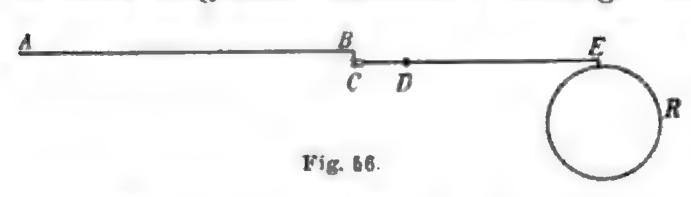


Fig. 56.

Die Theorie der Seismographen, die später noch eingehend behandelt werden wird, zeigt uns, daß ein Seismograph mit Dämpfung abgesehen von der Resonanz um so empfindlicher auf die rhythmischen Bodenbewegungen reagiert, je größer seine Eigenperiode ist.

Um die Eigenperiode T zu vergrößern, hat man die Länge des Pendels groß zu machen. Solche einfache sehr lange Pendel wurden von Cancani und Vicentini konstruiert; sie finden sich noch an einzelnen seismischen Stationen. Diese Instrumente sind aber sehr unbequem.

Viel einfacher kann die Vergrößerung der Eigenperiode der Schwingungen des Apparates erreicht werden, indem man die Drehungsachse des Instrumentes von der horizontalen in eine fast vertikale Lage bringt, so daß jetzt die Pendelmasse statt in einer Vertikalebene in einer Ebene, welche mit dem Horizont einen sehr kleinen Winkel bildet, schwingt.

Wir haben damit ein sogenanntes Horizontalpendel erlangt, zu dessen Betrachtung wir jetzt übergehen. Infolge ihrer großen Schwingungsdauer sind die Horizontalpendel sehr empfindliche seismische Apparate, die daher sehr viel im Gebrauch sind.

Man kann wohl sagen, daß für Stationen, die in bedeutender Entfernung von seismisch erregten Gebieten liegen, die einfachen Vertikalpendel keine genügende Empfindlichkeit besitzen; in diesen Gebieten selbst können sie jedoch wertvolle Dienste leisten.

Digitized by Google

Das Horizontalpendel.

Die Konstruktion eines solchen Pendels ist in Fig. 57 schematisch dargestellt.

Ein Metallstab mit zwei spitzen Enden A und B, die in festgelagerten Vertiefungen spielen, trägt mittels eines festen Rahmens RR die schwere Masse M.

Die Drehungsachse des Apparates AB ist unter einem kleinen Winkel i gegen die Vertikale AZ geneigt. Die Gleichgewichtslage des Apparates entspricht der niedrigsten Lage des Schwerpunktes des beweglichen Teiles des Instrumentes.

Lenkt man die Masse M zur Seite ab und überläßt sie dann sich selbst, so wird sie harmonische Schwingungen um die Achse AB und zwar fast in der Horizontalebene ausführen, wobei die Eigenperiode des Pendels um so größer sein wird, je kleiner der Neigungswinkel i der Achse des Apparates ist. Nimmt man den Winkel i sehr klein, so kann man eine sehr lange Schwingungsdauer erzielen. Ist $i = 90^0$, so verwandelt sich das Horizontalpendel in ein gewöhnliches vertikales Pendel, das man also gewissermaßen als einen besonderen Fall eines Horizontalpendels betrachten könnte.

Fig. 57.

Die Bodenverschiebungen senkrecht zur Ebene der Figur werden auf ein solches Horizontalpendel ebenso wie auf das entsprechende Vertikalpendel einwirken, nur mit dem Unterschiede, daß das Horizontalpendel bei großer Schwingungsdauer für die langen seismischen Wellen bedeutend empfindlicher ist.

Wenn man an der Masse M einen Schreibstift anbringt, so kann man die Bewegung des Apparates auf einer rotierenden Trommel, welche mit berußtem Papier bespannt ist, registrieren (mechanische Registrierung). Man kann aber auch die Bewegung des Apparates optisch registrieren, indem man in der Nähe der Drehungsachse des Instrumentes einen kleinen Spiegel befestigt, auf den man von einer unbeweglichen Lichtquelle aus Lichtstrahlen wirft, die dann durch besondere Linsen auf der Fläche der Registriertrommel in einen Punkt zusammengezogen werden. Die Trommel wird in diesem Falle mit lichtempfindlichem Papier bezogen (optische Registrierung).

Bei der Bewegung des Pendels wird sich der Lichtpunkt in angenähert horizontaler Richtung auf der Oberfläche der Registriertrommel, deren Achse horizontal gelagert ist, hin und her bewegen, so daß man bei der Rotation der Trommel auf dem Papier eine Kurve erhält, die die Bewegung des Horizontalpendels charakterisiert.

Ein solches Horizontalpendel mit starrem auf zwei Spitzen aufgehängtem Gerüst wurde wohl zuerst von W. C. Chaplin (1878) hergestellt, im Jahre 1880 wurde es dann von J. A. Ewing etwas verfeinert. Ein wirkliches

Digitized by Google

Präzisionsinstrument machte erst von Rebeur-Paschwitz aus demselben; einige Änderungen wurden später von O. Hecker angebracht.

Diese Pendel haben gewöhnlich ein sehr geringes Gewicht; das Gesamtgewicht des beweglichen Teiles beträgt im ganzen nur gegen 70 gr., so daß nicht mehr die mechanische, sondern nur die optische Registrierung angewandt werden kann.

Der Mangel dieser Pendel mit Spitzenaufhängung besteht darin, daß die Spitzen sich mit der Zeit abstumpfen und das Pendel dadurch weniger empfindlich wird, es reagiert also nicht so fein auf kleine Bodenverschiebungen; außerdem ändert das Pendel mit abgestumpften Spitzen leichter seine normale Gleichgewichtslage.

Ein anderer wesentlicher Mangel solcher Pendel besteht darin, daß die Eigenperiode T ihrer Schwingungen von der Amplitude ihrer Ausschläge abhängt. Wenn wir den Ablenkungswinkel des Pendels von der Gleichgewichtslage mit θ bezeichnen, so erhält man auf Grund der Beobachtungen mit einem solchen Pendel der Russischen Seismologischen Kommission die folgende Abhängigkeit der Schwingungsdauer T von dem Ausschlag θ.

θ	T
0° 8′	15ˢ,6
1 50	16,8
5 9	20,5
6 15	21,6.

Eine eingehende Bestimmung, die mit einem Instrumente der gleichen Art am Geodätischen Institut in Potsdam ausgeführt wurde und bei der die Winkelausschläge bis zu 16° gingen, ergab folgendes Resultat.

Bezeichnet S die beobachtete Schwingungsdauer, T die auf unendlich kleinen Ausschlag reduzierte Schwingungsdauer, ist ferner a die Amplitude in cm bei einer Entfernung der Spiegelskala von 2,36 m, so werden die Beobachtungen bei den verschiedenen Schwingungsdauern durch die folgenden Ausdrücke, in denen das erste Glied gleich T ist, dargestellt:

$$6^s,80 + 0^s,028a - 0,00056a^2 = S$$
$$8,80 + 0,072a - 0,00156a^2 =$$
$$11,52 + 0,158a - 0,00297a^2 =$$
$$13,01 + 0,262a - 0,00517a^2 =$$
$$13,75 + 0,305a - 0,00580a^2 =$$
$$15,68 + 0,522a - 0,00880a^2 =$$
$$17,38 + 0,658a - 0,00864a^2 = \quad .$$

Jeder dieser Ausdrücke gründet sich auf mehrere Beobachtungsreihen.

Digitized by Google

Eine solche Abhängigkeit der Schwingungsdauer muß fraglos als ein Mangel dieses Pendels bezeichnet werden, der die Beobachtung der Seismogramme erschwert.

Einen zweiten Typus des Horizontalpendels bilden die Pendel, deren obere Spitze durch einen dünnen Draht ersetzt ist und die sich unten gegen eine Spitze stützen.

Die bekanntesten Konstruktionen dieser Art sind die Pendel von Omori und von Milne.

Eine schematische Abbildung dieser Pendel gibt Fig. 58. Auf eine horizontale Stange AF ist die schwere Masse M aufgesetzt. Das linke Ende der Stange ist mit einer Stahlspitze versehen, die sich auf ein festes Lager mit sphärischer Aushöhlung stützt.

Von dem Pendelgewicht gehen von beiden Seiten Drähte CB und DB nach oben, die in B befestigt werden und die Masse M tragen. Die Punkte A und B sind unbeweglich und starr mit dem Stativ des Apparates verbunden.

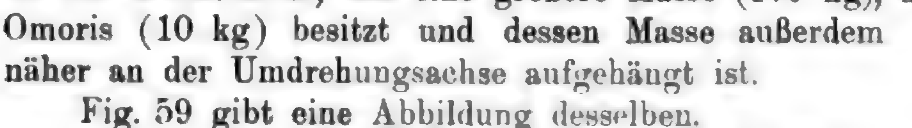


Fig. 58.

Die Drehungsachse des Apparates ist die Linie AB und der Neigungswinkel der Achse ist i.

Das Pendel von Omori wird mit einigen Abänderungen auch von dem Mechaniker Bosch in Straßburg hergestellt.

Ein Pendel ähnlicher Art, das von demselben Mechaniker gebaut wird, ist das Tromometer, das eine größere Masse (100 kg), als das Instrument Omoris (10 kg) besitzt und dessen Masse außerdem näher an der Umdrehungsachse aufgehängt ist.

Fig. 59 gibt eine Abbildung desselben.

Eine gußeiserne Säule ist oben mit Schlittenführungen m_1, m_2 und m_3 versehen, mittels deren sich der Aufhängepunkt L_1 der Masse A in der Richtung der Schraube L_1, sowie vor- und rückwärts und seitlich verstellen läßt. Hierdurch kann die Neigung i der Drehungsachse, sowie die Gleichgewichtslage der Masse innerhalb gewisser Grenzen beliebig geändert werden. Die Masse stützt sich in L mit einer Stahlspitze gegen ein sphärisches Stahllager. Ein an der Masse befestigter, aus Aluminiumrohren hergestellter versteifter Rahmen C greift an dem kurzen Hebelarm des Schreibhebels a an (Fig. 60).

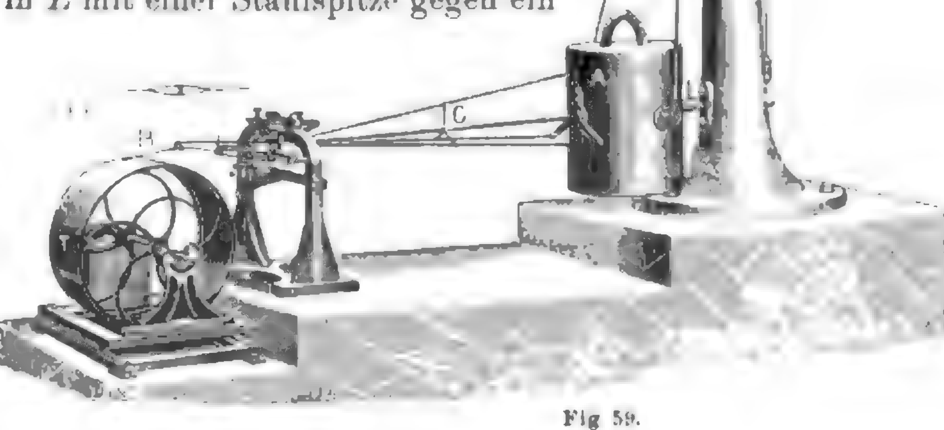


Fig. 59.

Digitized by Google

Der Schreibhebel, der an einer senkrechten Achse befestigt ist, trägt an diesem kurzen Hebelarm ein vertikal stehendes Glasplättchen *g*, dessen Gewicht den Schreibhebel ausbalanziert und auf dessen Fläche sich ein an dem Pendelarm *c* angebrachtes leicht bewegliches Rädchen *d* lehnt. Das Glasplättchen wird an das Rädchen angedrückt durch ein kleines Gewichtchen *b*, das von einem auf dem Pendelarm *c* angebrachten Galgen an einem Kokonfaden herabhängt; das Glasplättchen befindet sich also zwischen diesem Gewichtchen und dem Rädchen. Der Druck des Gewichtchens kann durch Verstellen des Galgens verändert werden.

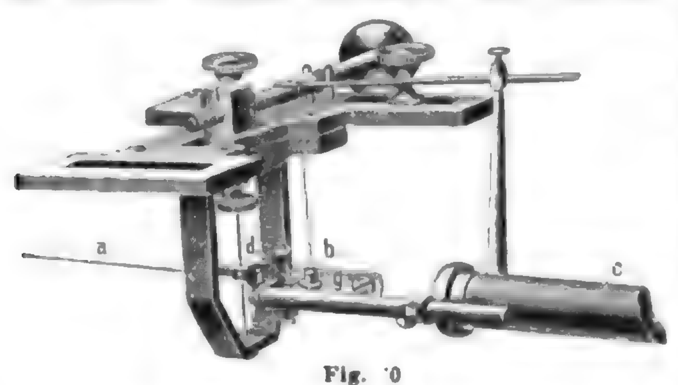


Fig. 0

Bei neueren Apparaten dieser Art ist eine Luftdämpfung angebracht, die aus einer dünnen Metallplatte besteht, welche in einem geschlossenen viereckigen Kästchen schwingt. Die Metallplatte ist mit der Pendelstange *c* verkuppelt.

Die Eigenperiode hängt bei diesen Pendeln wenig von der Amplitude der Schwingungen ab.

Die Pendel Milnes, die an den meisten englischen seismischen Stationen in Gebrauch sind, unterscheiden sich prinzipiell wenig von dem eben beschriebenen Typus mit einer Stützspitze. Sie werden aber viel leichter konstruiert und es wird deshalb bei ihnen nicht die mechanische, sondern die optische Registrierung angewandt, jedoch in einer anderen Weise, wie früher angegeben. Es wird nämlich an das Ende des Pendelarmes ein schmaler horizontaler Spalt angebracht, über dem im rechten Winkel ein zweiter am Gehäuse des Pendels angebrachter Spalt liegt. An der Kreuzung der beiden Spalte kann dann ein von einer Lampe ausgehender Lichtstrahl auf ein Band von photographischem Papier fallen, das durch ein Triebwerk weiter bewegt wird. Bei Bewegungen des Pendels muß sich der durch die beiden Spalte erzeugte Lichtpunkt auf dem Papier hin- und herbewegen und also eine Kurve aufzeichnen.

Diese Art der Registrierung kann nicht als zweckmäßig bezeichnet werden.

Es würde sich jedenfalls mehr empfehlen, die früher besprochene Art der Registrierung anzuwenden, nämlich einen kleinen Spiegel in der Nähe der Drehungsachse des Pendels anzubringen und mittels dieses die Bewegungen des Pendels zu registrieren. Man kann dann die Registriertrommel in einer größeren Entfernung vom Spiegel (üblich ist etwa 4 m) aufstellen, wodurch die Länge des optischen Hebels wesentlich größer und somit die Empfindlichkeit des Pendels stark erhöht wird.

Die normale Vergrößerung des Instrumentes von Milne ist nur etwa eine 7-fache.

Für die Registrierung von Fernbeben hat sich eine stärkere Vergrößerung als zweckmäßig erwiesen. Bei der mechanischen Registrierung erfor-

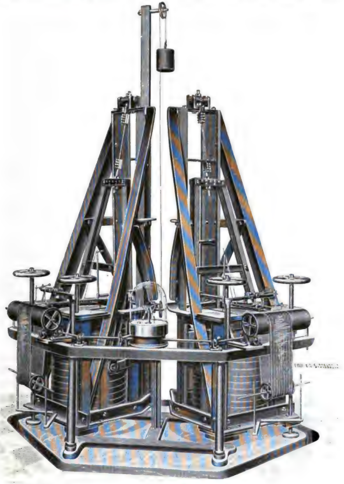


Fig. 61

dert aber, wie schon früher bemerkt, eine starke Vergrößerung der Bewegung der Masse auch eine sehr bedeutende Vergrößerung der Masse selbst, wenn man den schädlichen Einfluß der Reibung der Schreibfeder an dem

Digitized by Google

berußten Papier hinreichend herabmindern will. Diese Vergrößerung der Masse hat nicht nur proportional mit der gewünschten Vergrößerung der Aufzeichnungen zu geschehen, sondern sie hat sehr viel rascher zuzunehmen. Es kommt hierbei auch noch der Einfluß des Gewichtes des Schreibarms in Betracht, wie Wiechert gezeigt hat.

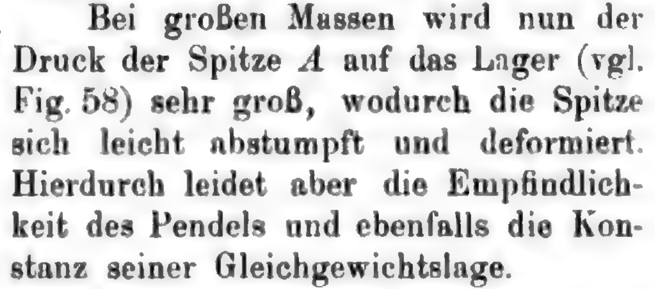


Fig. 62.

Bei großen Massen wird nun der Druck der Spitze A auf das Lager (vgl. Fig. 58) sehr groß, wodurch die Spitze sich leicht abstumpft und deformiert. Hierdurch leidet aber die Empfindlichkeit des Pendels und ebenfalls die Konstanz seiner Gleichgewichtslage.

Bei den neueren Instrumenten ersetzt man daher die untere Spitze durch eine Lamelle, die, in geeigneter Weise angebracht, nur auf Zug beansprucht wird.

Dies ist z. B. der Fall bei dem von Bosch in Straßburg gebauten Pendel von Mainka, von dem wir das Modell mit einer Masse von etwa 400 kg kurz beschreiben wollen.

Fig. 61 zeigt zwei unter 90° zueinander aufgestellte Seismometer dieser Art, von denen jedes ein besonderes, von dem anderen unabhängiges Stativ hat. Die Form des letzteren ist aus der Figur ersichtlich.

Die Masse besteht aus einzelnen, mit einem radialen Schlitz versehenen gußeisernen Platten, die auf ein Tragegestell geschoben werden können. Letzteres wird mit Hilfe eines durch den Schwerpunkt der Masse hindurchgehenden Stahlrohres rechts und links von einem Eisenrahmen in Scherenform getragen. Dieser ist wieder oben am Stativknopf an einem etwa 30 cm langen, dünnen Stahldraht aufgehängt.

Die Lamelle am Stützpunkt unten ist einerseits am Stativ und andererseits an einem Bügel befestigt, der an den Aufhängestellen der Masse an der Schere drehbar gelagert ist. Eine Arretierungseinrichtung erlaubt, die Lamelle zu entlasten. Die Schwingungsdauer und die Gleichgewichtslage kann durch die beiden Handräder, die auf den verlängerten Fußschrauben des Stativs aufsitzen, geändert werden.

In der Mitte des die Masse tragenden Stahlrohres ist ein kurzer, dünner Stahldraht in geeigneter Weise befestigt, der in die zum Hebelsystem führende Schubstange übergeht. Die erste Hebelvergrößerung findet durch die Dämpfungseinrichtung selbst statt.

Die Dämpfung geschieht durch eine viereckige versteifte Aluminiumplatte, die in einem allseitig geschlossenen Metallgehäuse mit sehr geringem Luftzwischenraum schwingt. Die Ausschaltung der Dämpfung geschieht durch Öffnen des Gehäuses. An die Dämpfungsplatte, die an Federgelenken hängt, greifen sowohl die von der Masse kommende Schubstange als auch die zum Schreibhebelarm gehende Schubstange an, und zwar die letztere

Digitized by Google

in einer je nach Wahl sechs- bis achtfachen größeren Entfernung von dem Drehpunkt der Dämpferplatte. Es wird hierdurch somit eine gleiche Vergrößerung der Bewegung der Masse bewirkt.

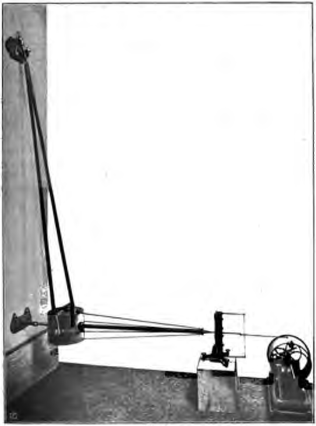


Fig. 61.

Der Schreibhebelarm ist bei diesem Instrument in der folgenden Weise gelagert (vgl. Fig. 62). Ein kräftiges Aluminiumstäbchen A von 10 cm Länge ist an beiden Enden mit dünnen Stahlzapfen versehen, die in den genau passenden Steinlochlagern bei L spielen. Diese Lager sind an einer am Pendelstativ S verschiebbar befestigten Gabel G eingelassen. Der geringe etwa noch vorhandene Spielraum zwischen Lager und Zapfen wird durch die dünne Feder F, die die Achse sehr leicht mittels eines Fadens

Digitized by Google

an das Lager andrückt, möglichst unschädlich gemacht. Oben an der Gabel ist eine kleine Rolle *R* angebracht, über die ein feiner Seidenfaden läuft, der die Achse mit Schreibarm trägt.

Das unten an der Achse angebrachte geschlitzte Stück *s* ist mittels Spitze und Pfanne mit dem zur Masse führenden Verbindungsarm verbunden. Die Vergrößerung läßt sich dadurch innerhalb gewisser Grenzen ändern, daß man die Spitze näher oder weiter von der Achse festschraubt.

Ebenfalls eine Lamelle statt einer Stahlspitze unten haben die Seismometer für mechanische Registrierung, die auf den russischen Stationen zweiter Ordnung benutzt werden.

Ein Bild eines solchen Pendels, das kein Stativ besitzt, sondern direkt an der Wand befestigt wird, gibt Fig. 63.

Auf eine horizontale Stange ist eine Masse von etwa 110 kg aufgesetzt. Von dieser Masse aus laufen links und rechts Stahlbänder nach oben, die sich dort vereinigen und unter Zwischenschaltung einer feinen Stahllamelle mit einer Stange verbunden sind. Diese ist unten vierkantig und wird hier in einem besonderen 4-Schraubenfutter geführt; sie ist dann weiter oben mit einem Gewinde versehen, so daß sie mit Hilfe einer auf einem

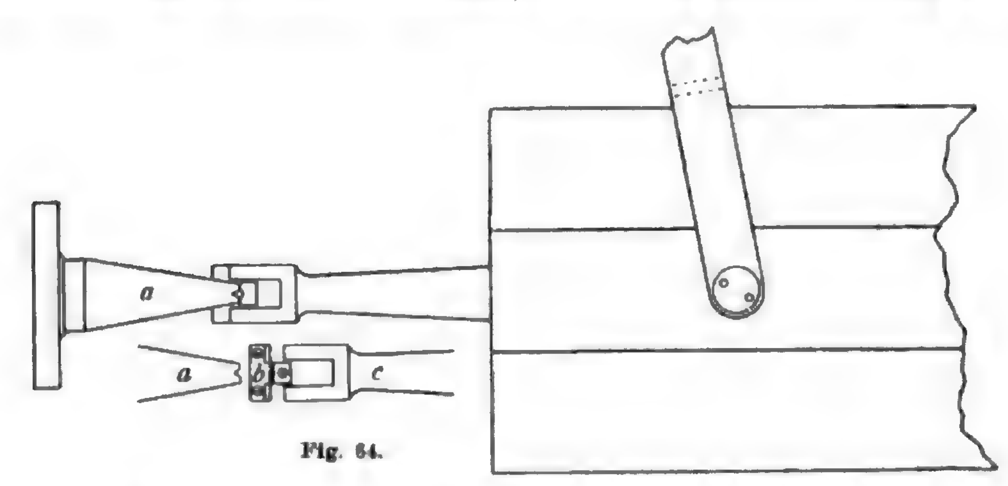


Fig. 64.

Widerlager sich stützenden Schraubenmutter gehoben und gesenkt werden kann. Mit Hilfe des 4-Schraubenfutters läßt sich leicht die Eigenperiode und die Gleichgewichtslage des Pendels verändern.

Die Art, wie die Lamelle am unteren Stützpunkt angebracht ist, zeigt Fig. 64.

Das Stück *a* ist fest an die Wand geschraubt. Es ist vorn gabelförmig und besitzt eine horizontale Nute, in die sich das Stück *b* mit den hervortretenden runden Stiften (rechts von *b*) hineinlegt. Der Teil *b* enthält eine kleine Stahllamelle, die mittels Schrauben so zwischen zwei Klammern gelagert ist, daß sie nur ein freies Feld von etwa 0,5 mm besitzt. An der Stange, auf die die Masse aufgeschoben ist, ist nun das eine Ende ebenfalls zu einer Gabel ausgebildet, deren Öffnung um 90° gegen die des an der Wand befestigten Stückes versetzt ist. Diese Gabel stützt sich dann auf die zu einer Schneide geschliffenen Klammern des Stückes *b* ebenfalls mit einer Nute auf.

Digitized by Google

Die Versuche mit diesem Pendel haben gezeigt, daß die beschriebene Art der Aufhängung der Masse sehr zweckmäßig ist. Dabei gewinnt das Pendel durch die große Länge der Stahlbänder sehr an Stabilität. Die Periode seiner Eigenschwingungen kann ohne Schwierigkeit bis auf 90 Sekunden gebracht werden; so lange Perioden sind übrigens für seismometrische Beobachtungen selten nötig.

Die Dämpfung der Eigenschwingungen geschieht elektromagnetisch. Am Ende des Pendelarmes ist eine horizontale Kupferplatte befestigt, die

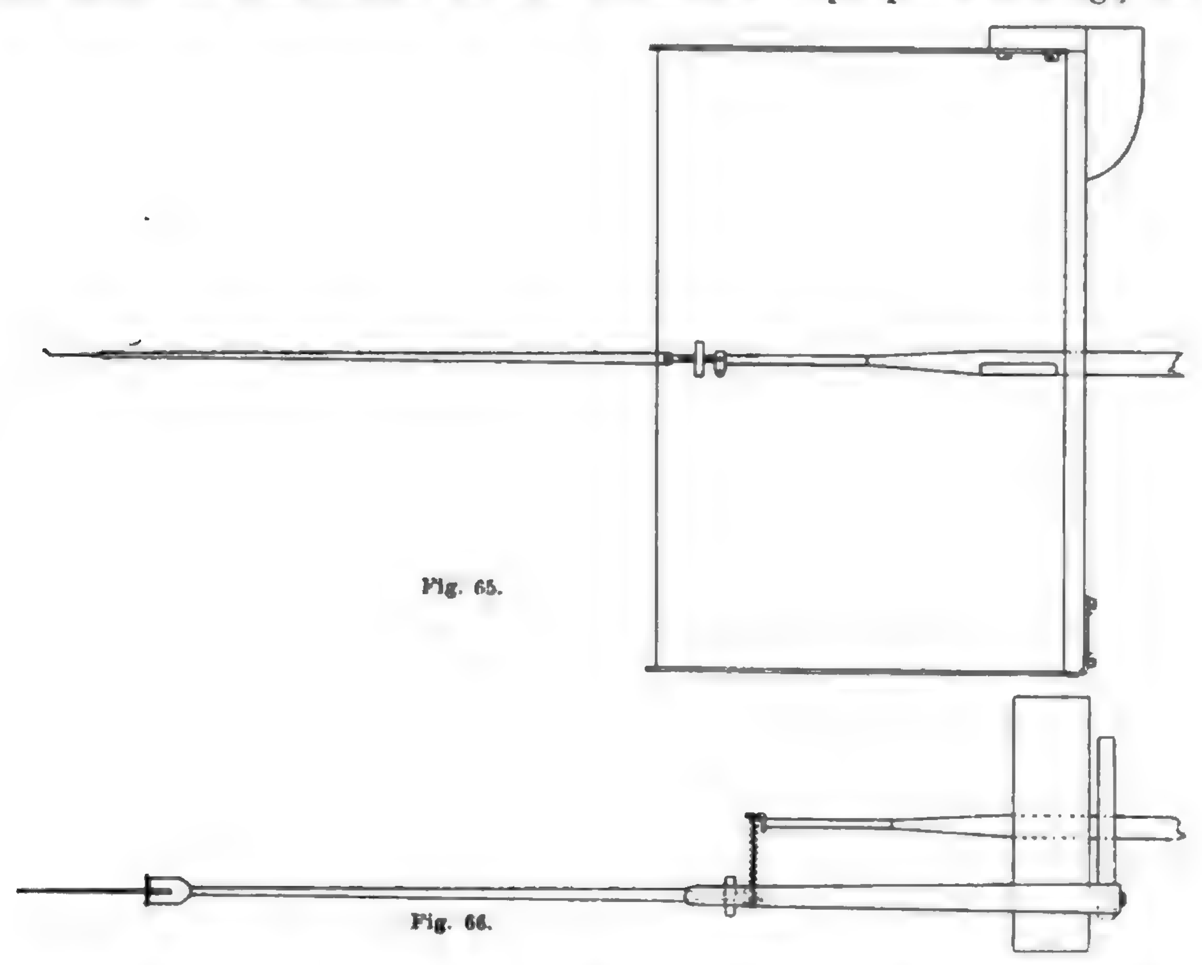


Fig. 65.

Fig. 66.

zwischen den Polen zweier fest gelagerter, hufeisenförmiger, permanenter Magnete schwingt.

Ist eine kleinere Empfindlichkeit des Pendels erwünscht, so kann die Schreibfeder für die mechanische Registrierung direkt am Ende des Pendelarmes befestigt werden. Will man die Empfindlichkeit erhöhen, so führt man eine Vergrößerung durch Hebel ein.

Fig. 65 gibt die Seitenansicht dieser Vergrößerungsvorrichtung und Fig. 66 die Ansicht von oben.

Als Drehungsachse des Vergrößerungshebels, der vorn die Schreibfeder trägt, dient ein dünner, leicht gespannter vertikaler Draht. Der Hebel steht seitlich von der Pendelstange und die Verbindung des kurzen Hebels mit dieser wird durch eine dünne Stahlnadel, die in zwei Achathütchen spielt, erzielt. Eine sehr dünne Spiralfeder, die die Nadel, ohne sie zu berühren, umschließt, verbindet die Pendelstange mit dem kurzen Hebelarm und schützt die Nadel vor dem Herausfallen.

Digitized by Google

Selbstverständlich muß man bei allen Hebelvergrößerungseinrichtungen auf das sorgfältigste bemüht sein, das Pendel so reibungslos als möglich zu machen, da sonst die Genauigkeit der Aufzeichnung von Erdbeben sehr stark beeinträchtigt wird.

Die Schreibfeder selbst kann sich um eine Horizontalachse in einer kleinen Gabel drehen. Die Feder muß so ausbalanziert werden, daß der Druck derselben auf das berußte Papier sehr gering ist.

Einen dritten Typus von Horizontalpendeln stellen die Pendel dar, die an zwei feinen Drähten aufgehängt sind, von denen der eine nach oben, und der andere nach unten geht. Dieses Konstruktionsprinzip wurde zuerst von Hengler vor etwa 80 Jahren aufgefunden. Ohne die Arbeit Henglers zu kennen, kam später Zöllner ebenfalls auf denselben Gedanken. Fig. 67 stellt die Art der Zöllnerschen Aufhängung, wie sie jetzt gewöhnlich genannt wird, dar.

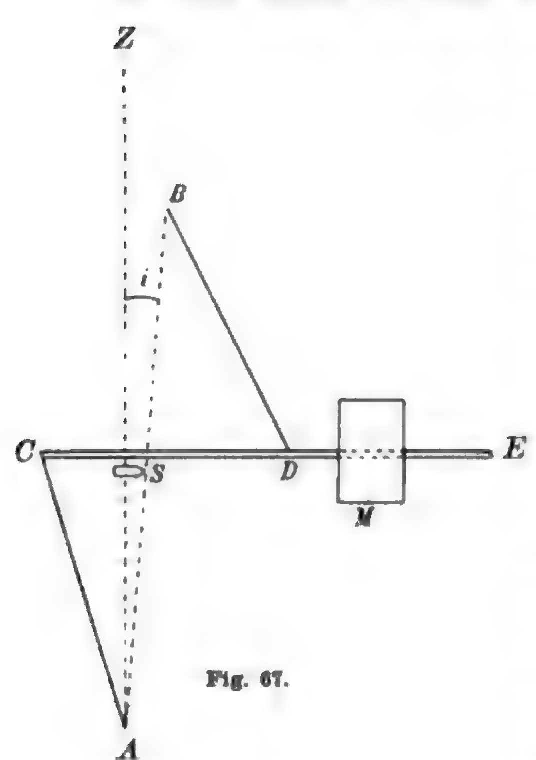


Fig. 67.

Die Punkte A und B sind unbeweglich und mit dem Stativ verbunden. Die Pendelstange CE, auf die die Masse M aufgesetzt ist, wird von zwei Drähten BD und AC getragen. Der Draht BD trägt das Pendel, das durch den Draht AC in eine mehr oder weniger horizontale Lage gebracht wird. Es ist klar, daß der Draht BD eine größere Spannung auszuhalten hat als der Draht AC. Die Gerade, die A und B verbindet, ist die Drehungsachse des Pendels, die gegen die Vertikale AZ unter einem kleinen Winkel i geneigt sein muß.

Die Reibung ist bei dieser Art von Aufhängung sehr gering, so daß die Pendel eine sehr hohe Empfindlichkeit besitzen.

Die Zöllnerschen Pendel werden hergestellt mit großer Masse für mechanische Registrierung oder mit sehr geringer Masse für optische Registrierung. Im letzteren Falle muß an dem Pendelarm in der Nähe der Drehungsachse ein Spiegel befestigt werden.

Pendel dieser Art mit optischer Registrierung wurden insbesondere von Repsold konstruiert; diese Konstruktion ist vor allem in Rußland noch vielfach in Gebrauch. Sie besitzen aber einen wesentlichen Mangel, der sie für das Studium von Nahbeben nahezu unbrauchbar macht. Sie können nämlich bei solchen Beben leicht in Schwingungen kommen, nicht nur in der Richtung senkrecht zum Pendelarme, sondern auch parallel zu demselben, d. h. parallel zur Linie CE. Diese Längsschwingungen lagern sich dann über die durch das Beben senkrecht zum Pendelarm verursachten Bewegungen und verzerren die Aufzeichnungen.

Man kann nun leicht diese schädlichen Längsschwingungen in der folgenden einfachen Weise vermeiden.

In der Nähe der Stelle, wo die Drehungsachse den Pendelarm schnei-

Digitized by Google

det, wird eine flache kleine Stahlplatte S und am Pendelgestell selbst eine Mikrometerschraube mit einer Stahlspitze angebracht. Diese Spitze wird nun zunächst bis zur Berührung mit der Stahlplatte gebracht; durch weiteres Drehen der Schraube verschiebt man dann die Pendelstange sich selbst parallel noch um einen kleinen Betrag, etwa $^1/_2$ oder $^3/_4$ mm. Dasselbe kann man natürlich erreichen, wenn man die Stahlspitze am Pendelarme anbringt und die Mikrometerschraube vorne mit einer Platte versieht.

Bei einer solchen Einrichtung ist das Auftreten von Längsschwingungen ganz ausgeschlossen. Die Versuche haben gezeigt, daß sie ihrem Zweck durchaus entspricht und daß die Empfindlichkeit des Pendels nicht darunter leidet.

Bei den Zöllnerschen Pendeln reguliert man die Eigenperiode des Pendels durch Neigung des Stativs mittels besonderer Schrauben an der Grundplatte, auf der das Pendel montiert ist.

Man muß hierbei jedoch beachten, daß man Spitze und Stahlplättchen erst dann einstellt, wenn die Periode des Pendels bereits reguliert ist, da das Pendel sonst unregelmäßig funktionieren würde.

Es sei noch bemerkt, daß der Stützstift nicht die Mängel des Stützstiftes der älteren Bosch-Pendel besitzt, denn in unserem Falle werden fast alle mechanischen Kräfte, die im Apparat entwickelt werden, durch die Drähte aufgenommen, so daß der Druck auf den Stützstift nur sehr gering ist.

Die Versuche ergaben jedoch, daß ein solcher Stützstift für ein mit starker Dämpfung versehenes Zöllnersches Pendel bei der Registrierung von Fernbeben überflüssig ist, denn die dabei auftretenden Längsschwingungen sind so klein, daß sie die Aufzeichnungen des Pendels nicht stören. Deshalb hat man die Stützstifte bei den Pendeln der seismischen Station in Pulkovo ganz ausgeschaltet.

Fig. 68.

Als weiterer Typus von Apparaten für die Registrierung der horizontalen Bodenbewegungen ist das astatische Pendelseismometer von Wiechert zu nennen, das seinem Grundprinzip nach in Fig. 68 dargestellt ist. Es ist eigentlich nichts anderes als ein umgekehrtes Pendel.

Die stationäre Masse M besteht aus gußeisernen Platten, die zu einem Zylinder zusammengesetzt sind und durch Schrauben miteinander verbunden werden. Das Gewicht der ganzen Masse mit Einschluß des Unterteils beträgt etwa 1000 kg. Der Drehpunkt A besteht nicht wie in der Figur aus einer Spitze, sondern aus einem Kardanischen Federgehänge, das aus Stahllamellen von 1 mm Dicke und 20 mm Breite gebildet wird; der biegsame Teil der Federn hat eine Länge von 7 mm. Im Gegensatz zu einer Spitze gibt diese Art der Aufhängung nur eine sehr geringe Reibung.

Den oberen Teil der Masse bildet ein Zylinder N, der durch ein Loch einer Eisenplatte herausragt, die auf einem festen, aus Winkeleisen her-

Digitized by Google

gestellten, tischartigen Stativ befestigt ist; dieses Stativ umschließt die Masse. Mittels vier um das erwähnte Loch gruppierter kräftiger Schrauben, den Arretierungsschrauben, lassen sich die Ausschläge der Masse beliebig begrenzen.

Wenn die Arretierungsschrauben zurückgeschraubt sind, müßte nun die Masse zur Seite kippen, wenn sie nicht in besonderer Weise gehalten würde. Dies geschieht durch die Gelenkfedern des Hebelsystems, das die Vergrößerung der Bewegung der Masse bewirkt. Die Drehungsachsen der Hebel werden nämlich, um eine möglichst geringe Reibung zu erzielen, durch dünne Blattfedern gebildet.

Die Anordnung dieser Hebeleinrichtung gibt Fig. 69. Der Zylinder N trägt ein Stäbchen O, an dem die Schubstange A verschiebbar befestigt ist.

Das andere Ende der Schubstange, in die bei A und B feine Blattfedern eingefügt sind, greift an dem Schlitten P an, der sich durch Mikrometerschraube auf dem Hebel CD nach oben oder nach unten verschieben läßt.

Der Hebel CD hat seine Drehachse bei C; sie wird durch zwei seitlich nebeneinander stehende dünne Blattfedern gebildet. Diese beiden nur 0,5 mm dicken Federn sind so gewählt, daß sie gerade die Masse halten können. An dem oberen Teile des Hebels CD ist links die Schubstange DE mit einem dünnen Stahldraht angesetzt; sie legt sich mittels eines Achathütchens gegen die Spitze E, die man sich aus der Ebene des Papiers heraustretend zu denken hat. Bei Bewegungen nach links oder rechts tritt dann eine Drehung der Achse GG ein, die den sehr leichten, aus Aluminium gefertigten Arm SQ mit der Schreibfeder und dem Gegengewicht

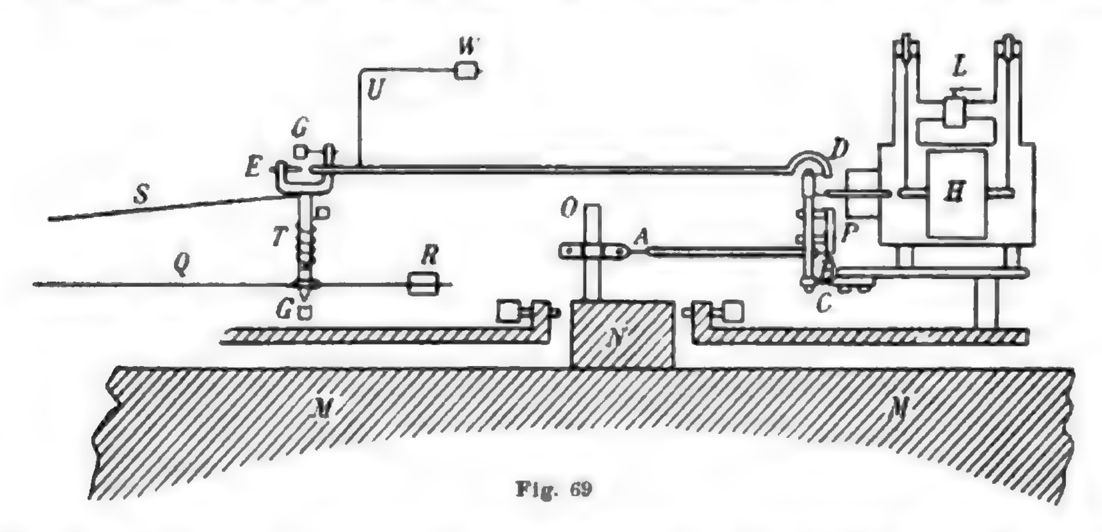


Fig. 69

derselben, R, trägt. Die Achse GG ruht unten mit einer Spitze in einem Achatlager, während sie sich oben mit einer Spitze seitlich in ein Achatlager legt. Die Spiralfeder T hält den Arm SQ leicht an die Schubstange angedrückt und das Gegengewicht W trägt das linke Ende derselben.

Das Ende des Schreibarmes trägt die Schreibfeder, die bei den neueren Apparaten aus einem Stück sehr dünnen Aluminiumblechs gestanzt und sehr starr ist. Sie ruht mit einem etwa 2 mm langen, äußerst dünnen Drahtstückchen, das an der Spitze der Feder befestigt ist, sehr leicht auf dem berußten Papier auf. Die Feder hat eine Querachse, deren sehr dünne Zap-

Digitized by Google

fen in Achatlagern ruhen; ein kleines Gewichtchen gestattet, den Druck, mit dem die Feder aufruht, zu regulieren.

Rechts von dem Hebel CD geht eine Stange zu dem Dämpferkolben H,

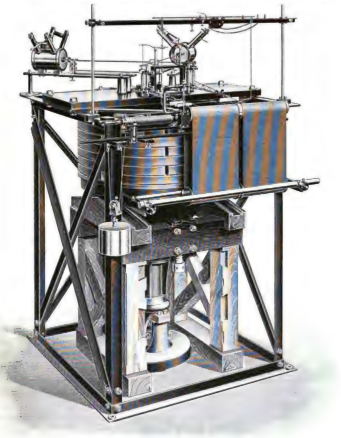


Fig. 70.

der die Eigenschwingungen des Apparates unterdrücken soll. Diese Dämpfung soll später noch eingehender besprochen werden.

Die Masse des Pendels kann nun in allen Azimuten schwingen; um die Komponenten der Bewegung in zwei zueinander senkrechten Richtungen zu erhalten, wird daher die Pendelbewegung mechanisch zerlegt, was da-

Digitized by Google

durch geschieht, daß auf dem Zylinder N zwei Stäbchen O angebracht sind, die mit zwei senkrecht zueinander stehenden Hebeleinrichtungen, wie sie oben beschrieben sind, verbunden sind.

Es ist zu bemerken, daß die Justierung des Apparates sehr genau ausgeführt werden muß, wenn sich die Komponenten nicht gegenseitig beeinflussen sollen. Wie bereits früher ausgeführt, ist dies stets zu befürchten.

Die astatischen Pendelseismometer nach Wiechert sind in Deutschland viel in Gebrauch und arbeiten bei sorgfältiger Überwachung sehr befriedigend. Ihre normale Vergrößerung beträgt etwa 200. Eine Totalansicht des Instrumentes gibt Fig. 70.

Es sei hier noch erwähnt, daß es noch einen leichteren Typus dieses Instrumentes gibt, der aber weniger befriedigend arbeitet.

Der Vertikalseismograph.

Die verschiedenen Arten der Vertikalseismographen, die die Vertikalkomponente der Bodenschwingungen aufzeichnen sollen, benutzen ausnahmslos die Federkraft, sei es von Blatt- oder von Spiralfedern.

Die einfachste Art eines Vertikalseismographen zeigt Fig. 71.

Er besteht aus einer schweren Masse M, die an einer vertikal hängenden, in O befestigten Stahlspiralfeder aufgehängt ist. Irgendwo an der Seite der Masse M wird ein Schreibstift D, der auf einer Registrierwalze mit vertikal stehender Umdrehungsachse schreibt, angebracht.

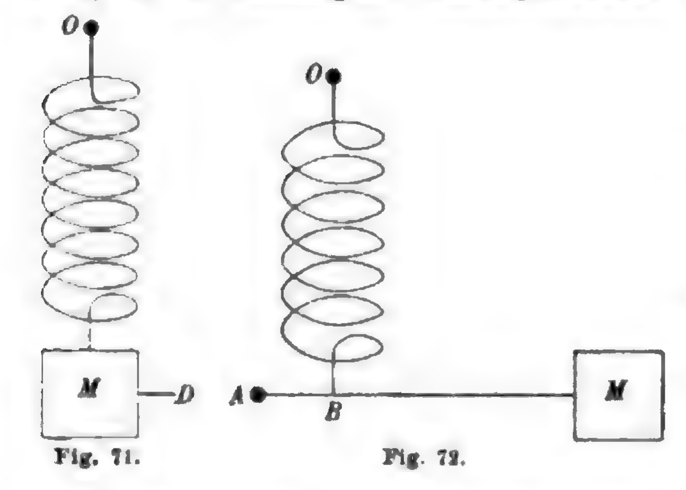


Fig. 71. Fig. 72.

Unter dem Einflusse der vertikalen Bodenverschiebungen verschiebt sich das Gewicht gegen das Pendelgestell nach oben und unten; die entsprechende Aufzeichnung auf dem Zylinder gibt uns die Kurve der relativen Bewegung des Apparates, aus der wir, wie wir sehen werden, die absoluten Größen der vertikalen Bodenverschiebungen ableiten können (siehe Kap. VIII).

Sein Hauptmangel besteht darin, daß die Masse auch unter dem Einflusse von horizontalen Bodenverschiebungen nach allen Seiten schwingen kann, so daß der Stift das Papier verläßt. Außerdem ist die Eigenperiode des Auf- und Abschwingens der Masse sehr kurz und daher der Apparat wenig empfindlich für lange seismische Wellen.

Eine andere Art von Vertikalseismographen ist in Fig. 72 dargestellt.

Hier ist die schwere Masse an einem horizontalen Arm angebracht, der sich um eine horizontale Achse dreht, die senkrecht zur Ebene des Papiers gerichtet ist.

Dieser Arm wird im Punkte B von einer Spiralfeder unterstützt, die oben im Punkte O am Stativ des Apparates befestigt ist.

Digitized by Google

Bei diesem Apparat hält also im Ruhezustande das Moment der Schwerkraft dem Momente der Federspannung das Gleichgewicht. Bei dieser Anordnung des Instrumentes kann die Masse M nur vertikale Schwingungen um die Achse A ausführen.

Die relative Bewegung der schwingenden Masse kann man entweder mechanisch registrieren, indem man am Ende des Horizontalhebels einen Schreibstift befestigt, oder auch optisch, indem man in der Nähe der Drehungsachse A einen kleinen Spiegel anbringt.

Die Eigenperiode der Schwingungen eines solchen Apparates ist jedoch ebenfalls nicht groß, und er besitzt daher nicht die Empfindlichkeit, die für die Untersuchung der vertikalen Bewegungen bei Fernbeben erforderlich ist.

Es gibt jedoch ein einfaches Mittel, um die Eigenperiode eines solchen Vertikalseismographen zu verlängern und ihn damit empfindlicher zu machen. Man braucht nämlich, wie Fig. 73 zeigt, nur die Feder unterhalb der Verbindungslinie des Schwerpunktes von M mit der Verbindungslinie mit dem Punkte A angreifen zu lassen.

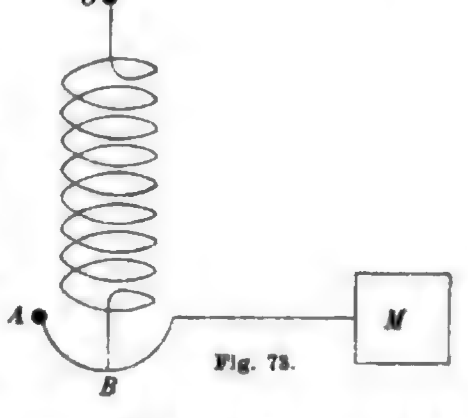


Fig. 73.

Ändert man außerdem die horizontale Entfernung zwischen B und A, so kann man die Eigenperiode des Apparates innerhalb gewisser Grenzen regulieren und sie für spezielle seismometrische Zwecke genügend lang machen (bis etwa 24 Sekunden). Eine solche Verlängerung der Eigenperiode der Schwingungen heißt die Astasierung eines Instrumentes.

Die Theorie dieses Apparates wird später im VIII. Kapitel abgeleitet werden.

Der schwere Vertikalseismograph Wiecherts stellt die erste Art der Vertikalseismographen dar. Die Aufzeichnung ist bei diesem Instrument mechanisch und erfolgt in starker Vergrößerung, so daß eine schwere Masse zur Anwendung kommen muß.

Bei dem Instrument der seismischen Station zu Göttingen wiegt die bewegliche Masse des Apparates, die in einem eisernen Behälter, gefüllt mit Schwerspat, besteht, etwa 1200 kg. Diese Masse ist an acht starken Stahlfedern aufgehängt. Die Astasierung des Apparates wird durch eine besondere, äußerst sinnreiche, aber auch komplizierte Vorrichtung erreicht, auf deren Einrichtung wir hier nicht eingehen wollen.

Von Wiechert wurde noch ein kleineres Vertikalseismometer mit einer Masse von nur 80 kg konstruiert, das vielfach in Gebrauch ist. Von diesem Instrument gibt Fig. 74 eine Gesamtansicht, Fig. 75 zeigt die Art der Aufhängung der Masse. Letztere ist an dem einen Ende eines horizontalen Hebelarmes befestigt, während das andere Ende mittels eines Kreuzfedergelenkes um eine horizontale Achse schwingen kann. Die Spiralfeder, die das Gewicht trägt, greift in der Mitte des Hebels an, jedoch zur Astasierung erheblich tiefer als die Verbindungslinie Kreuzgelenk—Schwer-

Digitized by Google

punkt der Masse. Die Feder, die einen Zug von 160 kg auszuhalten hat, ist oben an einem Hebel befestigt, der sich auf einen Rost von Zink- und

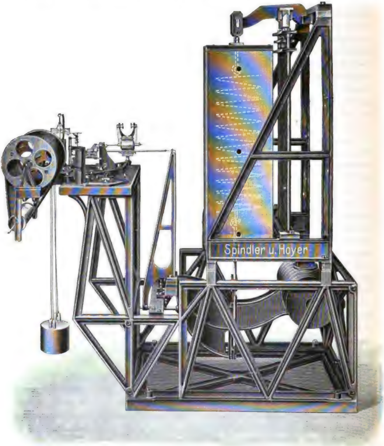


Fig. 74

Eisenstäben stützt. Diese sind so angeordnet, daß sie eine Temperaturkompensation bewirken, die sehr notwendig ist, da schon bei einer Temperaturänderung von $\frac{1}{10}{}^0$ C bei der angewandten Vergrößerung die Schreibfeder einen Ausschlag von 30 mm machen würde. Um die Feder vor Temperaturschwankungen zu schützen, ist sie mit einem dickwandigen Kasten umgeben. Das Instrument, dessen Schwingungsdauer sich etwa bis 8 Sekunden

Digitized by Google

steigern läßt, erfordert aber trotz der Schutzhülle einen Raum zur Aufstellung, in dem die Temperaturänderungen sehr langsam verlaufen. Es besitzt Luftdämpfung, die in gleicher Weise angeordnet ist wie beim astatischen Pendelseismometer von Wiechert. Gebaut wird es von der Firma Spindler & Hoyer in Göttingen.

Die Vertikalseismographen, die an den russischen seismischen Stationen benutzt werden, gehören zum dritten Typus, der in der Figur 73 dargestellt ist; wir kommen auf dieselben später zurück.

Der Vertikalseismograph Vicentini besteht einfach aus einer starken, flachen Stahlfeder, die an einem Ende befestigt ist. Am anderen Ende der

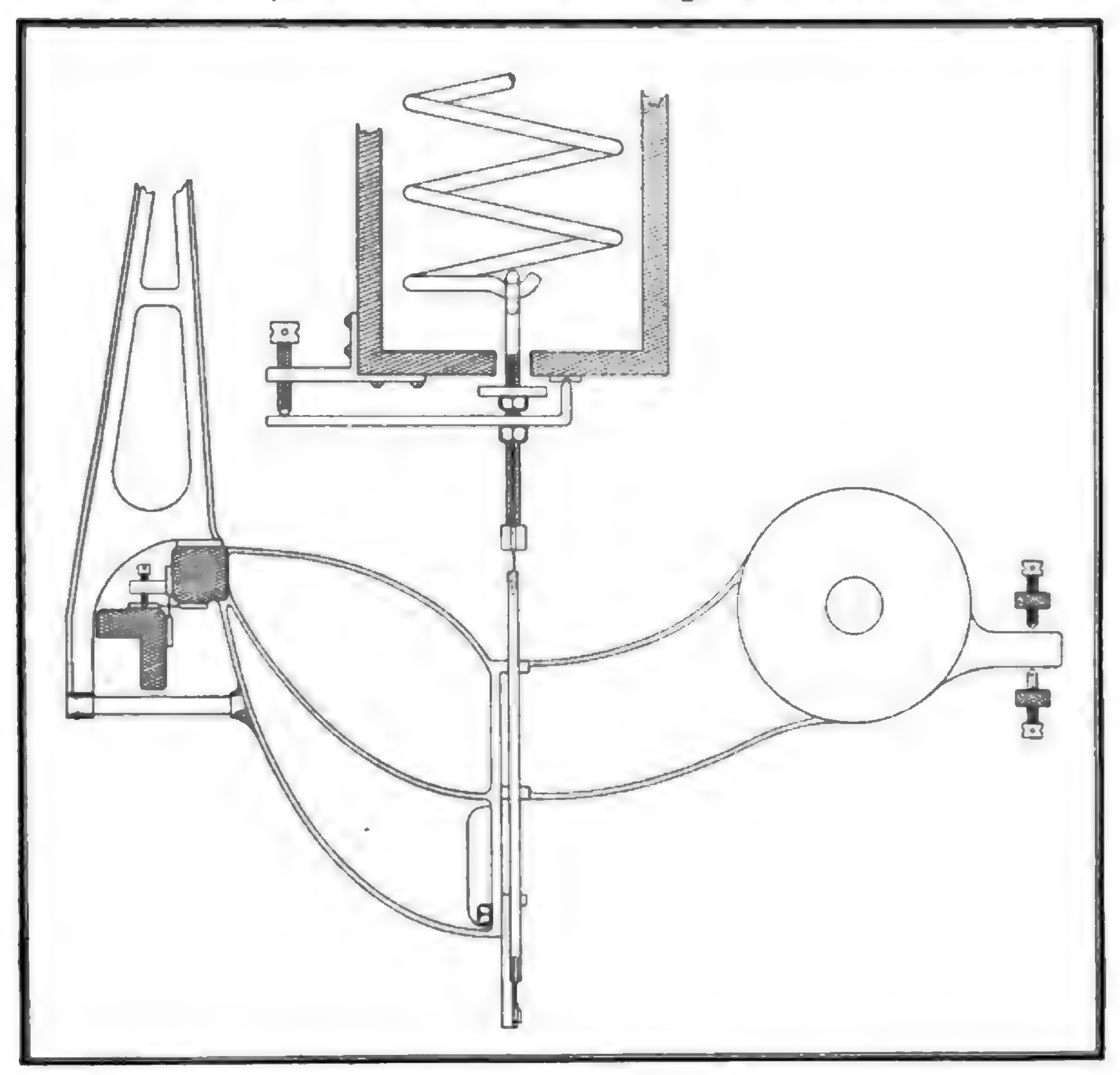


Fig. 75.

Feder befindet sich die schwere Masse und der Hebel mit dem Schreibstift (s. Fig. 54 auf S. 184).

Die Eigenperiode der Schwingungen dieses Apparates ist sehr kurz, so daß er für lange seismische Wellen wenig empfindlich ist. Für die Untersuchung der Schwingungen mit kurzen Perioden ist er jedoch durchaus brauchbar.

Digitized by Google

In Fig. 76 ist ein Vertikalseismometer dargestellt, bei dem ebenfalls eine flache Stahlfeder benutzt wird. Dieses Instrument wurde von dem Mechaniker Masing (mechanische Werkstätte des Physikalischen Laboratoriums der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg) konstruiert und ist speziell zur Untersuchung von kurzen rhythmischen vertikalen Gebäudeschwankungen, die durch den Gang eines Dieselmotors verursacht werden, verwandt worden.

Die Feder ist mit einem Ende durch starke Schrauben auf einem Gußeisenklotz befestigt. Auf die Feder ist eine schwere Masse aufgesetzt, die

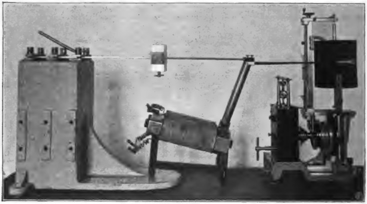


Fig. 76.

längs der Feder verschoben und an jeder Stelle der Feder mittels Schraube festgeklemmt werden kann.

Durch die Verschiebung der Masse kann man die Größe der Periode der Eigenschwingung der Feder ändern. Am äußeren Ende der Feder ist ein Schreibstift angebracht, der auf einem vertikalen rotierenden Zylinder, der mit berußtem Papier belegt ist, schreibt.

Von der Feder geht ein Messingrohr nach unten, das mit einer Kupferplatte, die zwischen den Polen eines Elektromagneten schwingen kann, endigt. Das Instrument hat also eine elektromagnetische Dämpfung, die später genauer betrachtet werden wird. In Fig. 76 sieht man auf der Registriertrommel Spuren der Aufzeichnung der Eigenbewegung des Apparates. Diese Aufzeichnung entspricht einer gedämpften Sinusoide. Nach Bedarf kann die Dämpfung auch ausgeschaltet werden.

Wenn wir es mit vollständig rhythmischen Bodenschwingungen zu tun haben, wie bei der Wirkung des Ganges einer Kraftmaschine, so kann man den Apparat zweckmäßig folgendermaßen benutzen.

Durch Verschiebung des Gewichtes längs der Feder versucht man die Periode der Feder mit der Periode des Motors in Resonanz zu bringen. Dann werden die Ausschläge der Schreibfeder auf der Trommel maximale

Digitized by Google

sein. Kennt man die verschiedenen Konstanten des Apparates, so ist hieraus die absolute Größe der vertikalen Bodenverschiebungen leicht zu bestimmen. In diesem Falle ist die Dämpfung überflüssig.

Bei der Anwendung des Resonanzprinzips kann man mit diesem einfachen Apparat die Bodenschwingungen mit der Genauigkeit eines Mikrons bestimmen, wenn die Schwingungen völlig regelmäßig sind. Ist letzteres nicht der Fall, so ist zweckmäßig die Dämpfung einzuschalten, um die Wirkung der Eigenbewegung des Apparates auf die Aufzeichnung zu verringern.

Schraubt man die Stahlfeder an die eine Seite des Eisenklotzes, wie

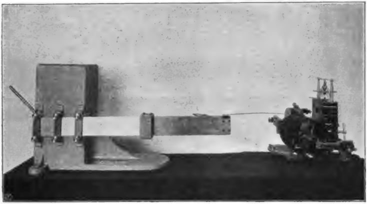


Fig. 77.

Fig. 77 zeigt, so kann ein solcher Apparat ebenfalls zur Untersuchung der horizontalen Bodenverschiebungen dienen.

Drei solcher Apparate, zwei für horizontale und einer für vertikale Bewegungen könnten vielleicht bei ihrer geringen Empfindlichkeit für längere Perioden auch mit Erfolg auf seismischen Stationen in Schüttergebieten angewandt werden.

Die Anwendung sehr hoher Vergrößerungen bei der Messung von Erschütterungen gestatten die von Wiechert[41]) und Mintrop[42]) konstruierten Seismographen für schnelle Bodenbewegungen. Eine Ansicht des für die Messung der horizontalen Komponente der Erschütterungen bestimmten Apparates gibt Fig. 78, einen Durchschnitt durch das Instrument sowie den Registrierapparat stellt Fig. 79 dar.

Die stationäre Masse des Erschütterungsmessers wird durch einen Bleizylinder im Gewicht von 12 kg gebildet, der in zwei starr miteinander verbundene Träger eingelegt und dort durch Halbringe und Schrauben befestigt werden kann. Diese Träger werden unten durch ein System von Kreuzfedern gestützt, so daß sie mit der Masse in einer Ebene schwingen können. An den Trägern sind Messingarme angebracht, die einerseits den in Paraffinöl schwingenden Dämpferkolben tragen, andererseits mittels eines doppelten

Digitized by Google

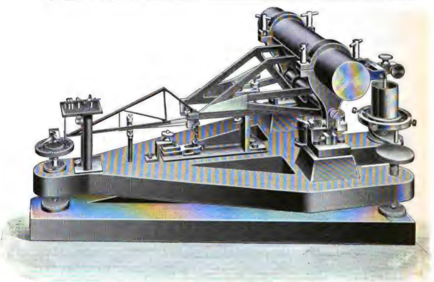


Fig. 78.

Kreuzfedergelenkes an dem kürzeren Arme eines Aluminiumhebels in der in Fig. 80 dargestellten Weise angreifen. Am anderen Arm des Hebels wird die mechanische Vergrößerung mit einer optischen verbunden, indem die Bewegung des Hebels auf ein sehr leichtes Spiegelgehänge (vgl. Fig. 81) übertragen wird, das mittels zweier Stahlspitzen in den Achathütchen von kleinen auf einer Messingplatte angebrachten Säulchen ruht. Ein kleines auf dem

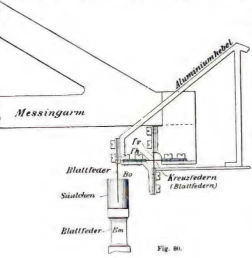


Fig. 80.

Fig. 81.

Digitized by Google

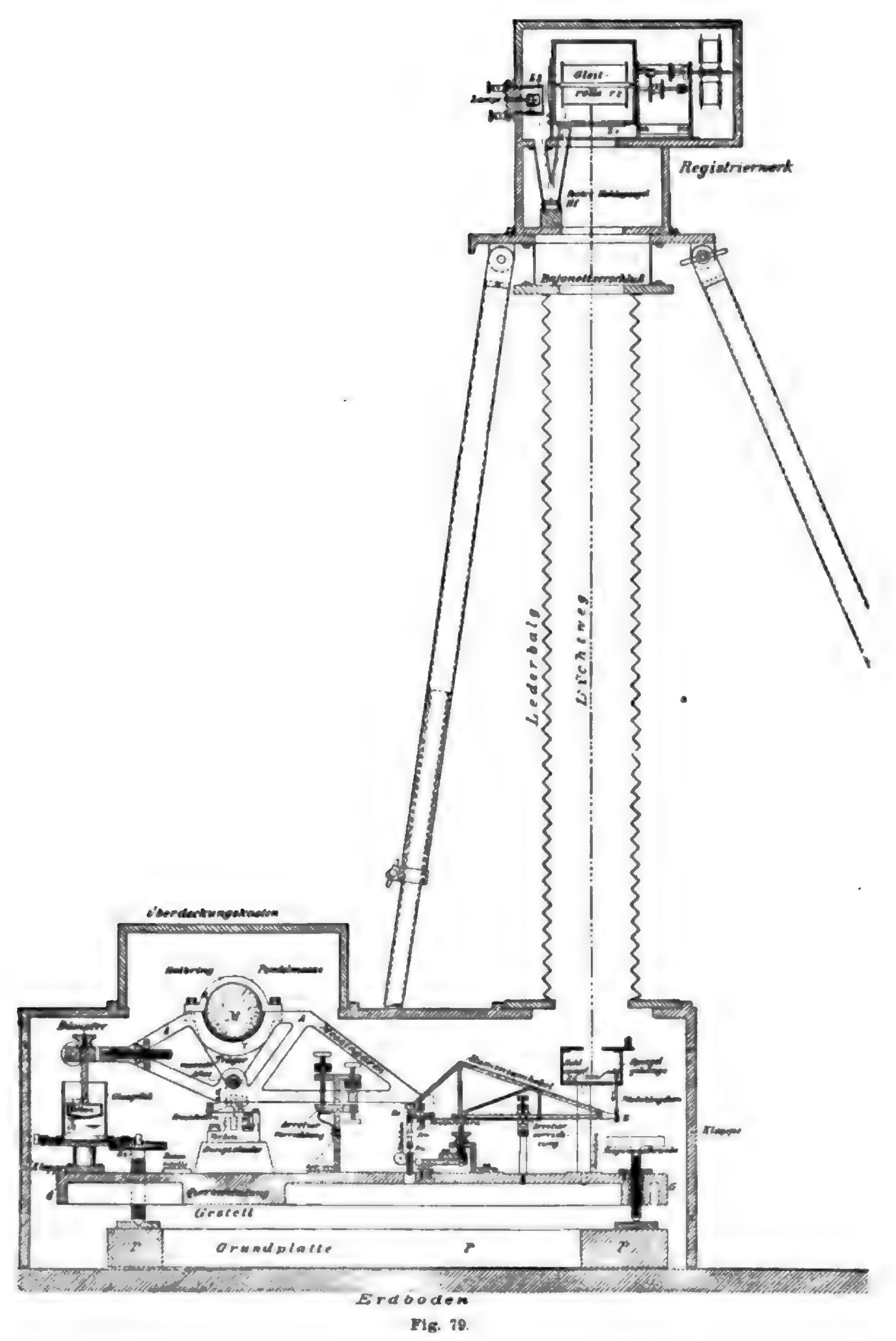


Fig. 79.

Digitized by Google

Hebel aufgesetztes Schubstängelchen trägt die dritte Spitze des Spiegelgehänges.

Da mehrere Paare der eben erwähnten Säulchen mit Achathütchen in verschiedenen Entfernungen vom Schubstängelchen angebracht sind, so kann man bei Anwendung verschiedener Spiegelgehänge mit passender Entfernung der dritten Spitze die Vergrößerung stark variieren.

Bei dem abgebildeten Instrumente lassen sich für sehr schnelle Schwingungen die Vergrößerungen 2000, 4000, 8000 und 16000 erzielen. Über

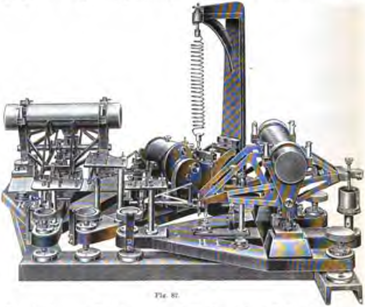


Fig. 81.

die sehr bequeme Berechnung der Größe der wahren Bodenschwingungen aus den Registrierungen vgl. L. Mintrop, „Über die Ausbreitung der von den Massendrucken einer Großgasmaschine erzeugten Bodenschwingungen", Göttingen 1911 (Inauguraldissertation).

Für die Messung der drei Komponenten der Bodenbewegung sind zwei der beschriebenen Instrumente und außerdem noch ein Instrument zur Bestimmung der vertikalen Komponente erforderlich. Das letztere beruht auf der Anwendung der Federkraft, durch die die in der Vertikalen schwingende Masse gehalten wird. Die Vergrößerung der Bewegung der Masse wird in derselben Weise erzielt wie bei dem beschriebenen Horizontalerschütterungsmesser; es soll daher auf die Konstruktion des Vertikalinstrumentes nicht näher eingegangen werden.

Fig. 82 zeigt die für eine Messung der drei Komponenten aufgestellten

Digitized by Google

Instrumente, Fig. 83 gibt den Grundriß ihrer Aufstellung und Fig. 84 eine Registrierung derselben. Die Registrierung erfolgt auf Films; die Einrichtung des Registrierapparates ist aus Fig. 79 zu ersehen.

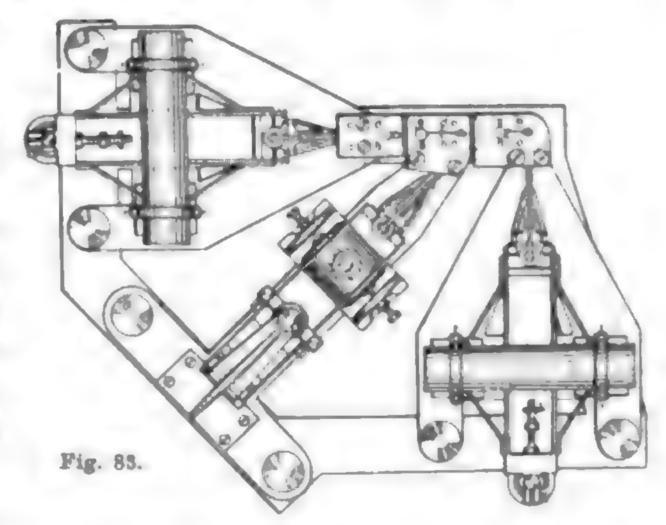


Fig. 83.

Für die Registrierung von Bodenschwingungen mit einer Periode von wenigen Tausendstel von Zeitsekunden sind die zuletzt genannten Apparate nicht so gut geeignet wie der von Grunmach[43]) konstruierte Erschütterungsmesser. Grunmach wandte zwei verschiedene Methoden zur Vergrößerung der Bewegung des von ihm benutzten Horizontalpendels an, nämlich die mikrophotographische und die elektromagnetische Vergrößerung. Da es sich bei der Konstruktion des Instrumentes um Bewegungen mit sehr kleiner Periode, nämlich um die Messungen von Felsschwingungen, die durch den Absturz

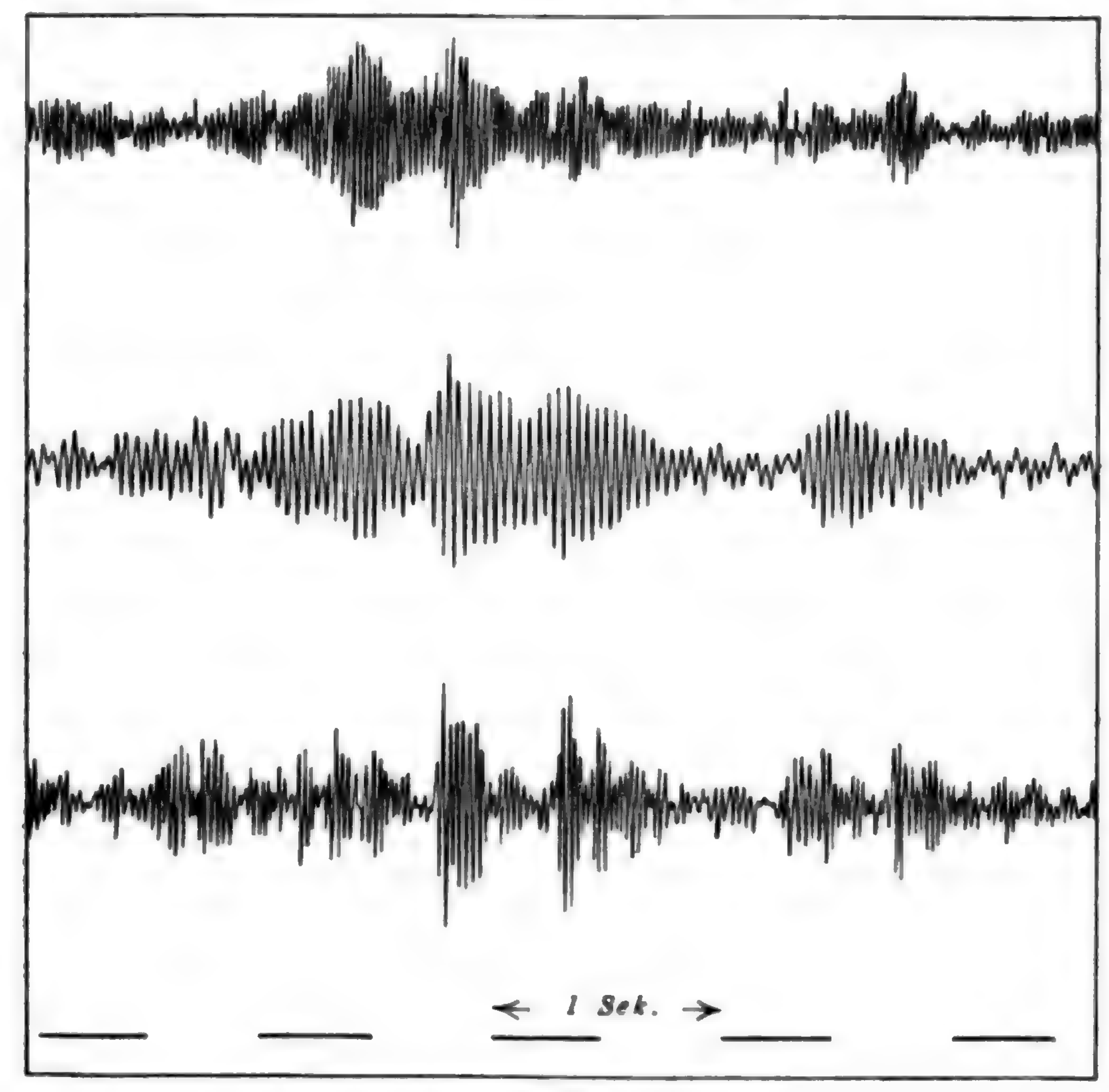


Fig. 84.

Digitized by Google

größerer Wassermassen hervorgerufen wurden, handelte, war die Verwendung eines langsam schwingenden Galvanometers ausgeschlossen.

Grunmach verwandte daher ein Elektromagnet-Saitengalvanometer, dessen Platinfaden auf eine Eigenschwingung von $0^s{,}0015$ eingestellt war. Die Periode der Felsschwingungen betrug nach seinen Messungen zum Teil weniger als $0^s{,}001$.

Dieselben Prinzipien, wie sie im vorigen bei der Konstruktion der Seismometer dargelegt sind, wird man ebenfalls zugrunde legen müssen, wenn es sich um die Herstellung von Apparaten für die Untersuchung der Schwankung von Eisenbahnwagen oder von Brückenträgern beim Befahren der Brücke mit Eisenbahnzügen u. dgl. handelt.

Wir haben im vorhergehenden eine Reihe verschiedener Typen von Seismometern betrachtet, die zur Untersuchung der horizontalen und vertikalen Bodenschwingungen dienen sollten.

Was die Bestimmung der Drehungen anlangt, so sind solche mit Erfolg noch nicht angestellt worden.

Zwar wurden von Schlüter in Göttingen Beobachtungen über die Bodenneigungen mittels eines besonderen Apparates, des Klinographen angestellt, die aber bald aufgegeben wurden, da es sich herausstellte, daß der Klinograph keinen sicheren Beweis für die Existenz von Neigungen bei Fernbeben gibt. Beobachtungen, die in Pulkovo mit einem ähnlichen Apparat, der mit galvanometrischer Registrierung (siehe Kap. VI) versehen war, angestellt wurden, haben ebenfalls ein negatives Resultat ergeben. Solche Neigungen müssen nun zweifellos existieren, zumal es erwiesen ist, daß sich längs der Oberfläche seismische Wellen fortpflanzen, aber diese Neigungen sind von sehr geringer Größe. Für die Untersuchung derselben müssen Apparate von ganz besonderer Empfindlichkeit hergestellt werden. Die Frage nach den Bodenneigungen ist im übrigen sehr wichtig und sollte nicht außer acht gelassen werden. Wie man in der Praxis die Beobachtungen über Neigungen anstellen könnte, werden wir in dem IX. Kapitel besprechen; hier wollen wir uns nur davon überzeugen, daß die bei Fernbeben auftretenden Neigungen tatsächlich sehr klein sind.

In der folgenden Fig. 85 sind seismische Oberflächenwellen dargestellt, welche sich längs der Erdoberfläche fortpflanzen, die wir bis zu einer gewissen Ausdehnung als eben betrachten können. Wir nehmen etwa im Punkte O den Koordinatenanfang an; auf der Abszissenachse tragen wir die Entfernungen s von O ab und längs der Ordinatenachse die zugehörigen vertikalen Bodenverschiebungen z auf.

Fig. 85

Wir erhalten dann eine regelmäßige Sinusoide, die eine gleichzeitige vertikale Lage der Punkte der Erdoberfläche angibt.

Bezeichnen wir die maximale Amplitude einer solchen Sinusoide mit

Digitized by Google

z_m und die Wellenlänge $O_1B = AC$ mit λ, so ist die Gleichung dieser Kurve im bestimmten Moment t die folgende:

$$z = z_m \sin\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right),$$

wo δ eine Konstante ist.

Der größte Wert der Neigung ψ_m ergibt sich aus der Formel

$$\operatorname{tg} \psi = \frac{dz}{ds} = \frac{2\pi z_m}{\lambda} \cos\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right);$$

wenn man hierin setzt

$$\cos\left(2\pi \frac{s}{\lambda} + \delta\right) = 1,$$

so ist bei der Kleinheit von ψ_m

$$\psi_m'' = \frac{2\pi z_m}{\lambda} \cdot \frac{1}{\sin 1''}. \tag{13}$$

Zur Berechnung von ψ_m wollen wir eine seismische Oberflächenwelle mit der Periode T_p von 20 Sekunden annehmen.

Dann ist

$$\lambda = V \cdot T_p = 3{,}5 \times 20 \text{ km} = 70 \text{ km} = 7 \cdot 10^6 \text{ cm}.$$

Bei starken Fernbeben steigt z_m selten über 1 mm; wir wollen daher setzen $z_m = 0{,}1$ cm.

Berücksichtigt man, daß

$$\sin 1'' = \frac{\pi}{180 \times 60 \times 60} = \frac{1}{206265},$$

so ergibt sich auf Grund der Formel (13)

$$\psi_m'' = \frac{6{,}28 \times 0{,}1}{7 \times 10^6} \cdot 206 \times 10^3 = \frac{1294}{7} \cdot 10^{-4} = 0{,}0185''.$$

Wir sehen also, daß die größte Bodenneigung bei Fernbeben etwa nur 0",02 beträgt. Dies ist zwar eine sehr kleine Größe, die aber trotzdem, wie wir sehen werden, der direkten Messung zugänglich ist.

Für Nahbeben, besonders in den Schüttergebieten, kann die Bodenneigung beim Durchgang seismischer Oberflächenwellen offenbar viel größer sein, aber genaue Messungen sind nach dieser Richtung hin noch fast gar nicht angestellt worden.

Drehungen um eine Vertikalachse sind mittels entsprechender Apparate bis jetzt ebenfalls nicht untersucht worden. Für Fernbeben ist dieses auch nicht erforderlich; solche Beobachtungen würden nur in den Schüttergebieten von Bedeutung sein. Für diesen Zweck könnte man etwa einen Apparat konstruieren, der aus einer schweren Kugel, die an einem Faden aufgehängt ist, besteht; unten müßte an dieser dann ein zweiter Faden befestigt werden, der sie nach unten zieht und sie hindert, den Verschiebungen und Neigungen des Bodens zu folgen. Wenn man an einer solchen Kugel einen Schreibstift horizontal anbringt, der auf dem berußten Papier einer

Digitized by Google

Registriertrommel schreibt, so würde dieser die Bodendrehung um eine vertikale Achse aufzeichnen.

Wir haben früher gesehen, daß die Aufzeichnungen der verschiedenen seismischen Apparate bei den Bodenschwingungen aus zwei Bewegungen bestehen: erstens aus der Bewegung der Erdoberfläche und zweitens aus den Eigenbewegungen des Apparates. Die letzteren verdecken und verzerren oft den wahren Charakter der Bodenbewegung sehr stark und erschweren damit eine rasche Auswertung des Seismogramms sehr.

Im folgenden Kapitel werden wir sehen, daß die Theorie einen Weg zeigt, wie man den schädlichen Einfluß der Eigenbewegung des Apparates verringern kann. Ihn ganz und gar auszuschließen ist nicht möglich, sehr wohl möglich ist es dagegen, ihn stark zu schwächen und unschädlich zu machen. Dies geschieht dadurch, daß man den Apparat mit einer Dämpfung versieht, durch die die fast harmonische Eigenbewegung des Apparates in Sinusschwingungen mit abnehmenden Ausschlagsamplituden verwandelt wird.

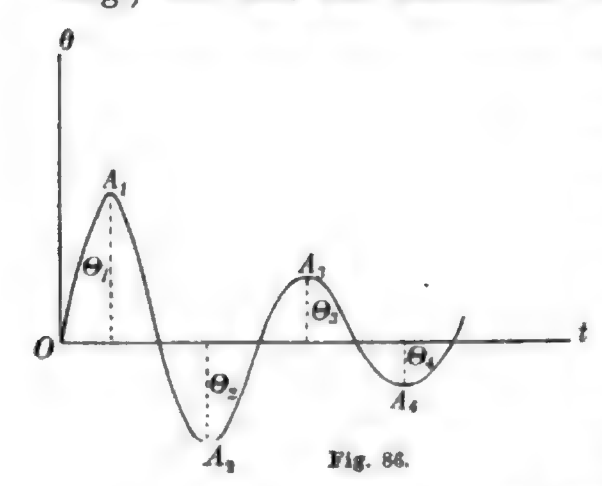


Fig. 86.

Wenn die Bewegung des Apparates eine gewisse Hemmung, z. B. durch Reibung erfährt, und wenn die Größe dieser Reibung der ersten Potenz der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Apparates proportional ist, so werden die aufeinander folgenden maximalen Amplituden der Ausschläge in geometrischer Progression abnehmen, so daß also das Verhältnis von zwei aufeinander folgenden maximalen Amplituden unabhängig von dem Vorzeichen derselben immer eine konstante Größe ist.

Eine solche gedämpfte Sinusschwingung ist in Fig. 86 dargestellt, wo auf der Abszissenachse die Zeit t und auf der Ordinatenachse die zugehörigen Winkel der Ablenkung des Apparates θ von seiner normalen Gleichgewichtslage aufgetragen sind.

Bezeichnet man die maximalen Amplituden, wie sie aufeinander folgen, mit θ_1, θ_2, θ_3 usw., so erhält man:

$$\frac{\theta_1}{\theta_2} = \frac{\theta_2}{\theta_3} = \frac{\theta_3}{\theta_4} = \cdots = \text{Const.} = v. \tag{14}$$

Die entsprechende Konstante v heißt das Dämpfungsverhältnis.

Nimmt man den natürlichen und den gewöhnlichen Briggschen Logarithmus von v, so ist

$$\lambda = \lg v = \lg \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}} \tag{15}$$

und

$$\varLambda = \log_{10} v = \log_{10} \frac{\theta_i}{\theta_{i+1}}, \tag{16}$$

λ heißt das natürliche und $\varLambda$ das gewöhnliche logarithmische Dekrement.

Digitized by Google

Je größer das logarithmische Dekrement ist, desto stärker ist die Dämpfung.

Man kann die Dämpfung so stark machen, daß der etwa durch einen anfänglichen Impuls bis zu dem Maximalausschlag θ_m aus von seiner Ruhelage abgelenkte Apparat bei seiner Rückkehr die Zeitachsen nicht überschreitet, sondern der Abszissenachse sich assymptotisch nähert (vgl. Fig. 87). Eine solche Bewegung nennt man aperiodisch.

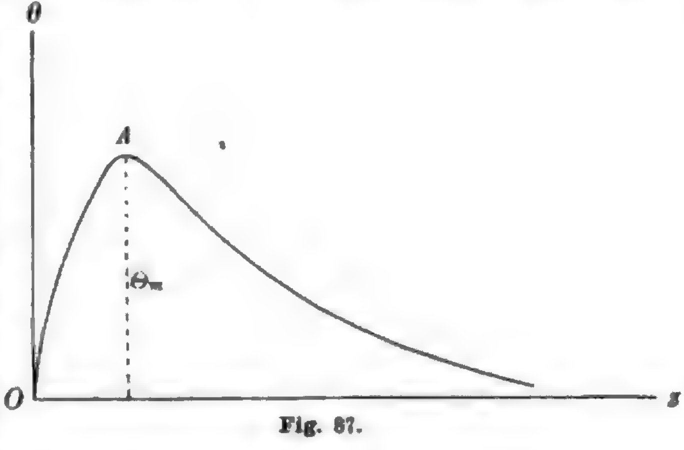


Fig. 87.

Um den schädlichen Einfluß der Eigenbewegung des Apparates möglichst zu eliminieren, ist im allgemeinen die Anwendung einer aperiodischen Dämpfung wünschenswert. Man muß jedoch beachten, daß eine sehr starke Dämpfung die Empfindlichkeit des Instrumentes unter sonst gleichen Bedingungen herabsetzt und deshalb bei Anwendung einer solchen eine stärkere Vergrößerung wählen. Hierüber wird in Kapitel VI noch näheres zu sagen sein.

Die Dämpfung wird bei den verschiedenen Seismographen in verschiedener Weise ausgeführt.

Die Luftdämpfung, wie sie bei dem astatischen Pendelseismometer von Wiechert angewandt wird, ist in Fig. 88 dargestellt. Der Dämpferkolben, der mit dem Hebelmechanismus der Vergrößerungseinrichtung durch eine Verbindungsstange verkuppelt ist, hat einen Durchmesser von 10 cm; er hängt (vgl. Fig. 69) an vier feinen Metalldrähten mit einem Luftzwischenraum von etwa 0,3—0,4 mm in einem rechts geschlossenen Messingzylinder, der auch auf der linken Seite nur eine Öffnung von der Größe hat, daß die Verbindungsstange frei hindurchgeführt werden kann. Durch den Hahn L kann eine Verbindung zwischen den beiden Kammern hergestellt werden, so daß die Dämpfung dadurch sehr stark vermindert werden kann.

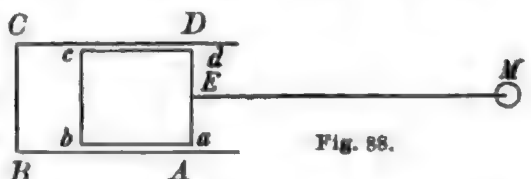


Fig. 88.

Die Dämpfung entsteht nun zum Teil durch die Reibung der Luft in dem engen Zwischenraum zwischen Zylinder und Kolben beim Hin- und Herschwingen des letzteren, teils aber auch durch die Druck- und Saugwirkung der Luft in den Kammern. Wenn man den ersten Teil der Dämpfung als der Geschwindigkeit der Bewegung proportional betrachten kann, so ist das bei dem zweiten Teil jedenfalls nicht der Fall, sondern er wird einer höheren, vielleicht der zweiten Potenz der Geschwindigkeit proportional sein. Damit wird der Charakter der normalen Bewegung des Apparates gestört; ferner führen quadratische Glieder der Geschwindigkeit zu einer Differentialgleichung der Bewegung, die sich nicht in endlicher Form integrieren läßt. Außerdem sind das Dämpfungsverhältnis und das logarithmische Dekrement nicht mehr konstant, sondern hängen von der absoluten

Digitized by Google

Größe der Amplitude des Ausschlages des Apparates ab, wodurch die Auswertung der Seismogramme sehr kompliziert wird.

Dieser Mangel ist bei der Luftdämpfung, die von Hecker[44]) vorgeschlagen worden ist, beseitigt. Bei dieser ist eine Reihe paralleler Platten in der Art eines Rechens mit der Pendelstange verbunden, zwischen die sich die etwas größeren Platten eines festen Rechens schieben. Die Blätter des Pendelrechens schwingen also in einer Reihe von Luftkammern, und zwar mit einem geringen Zwischenraume oben und unten. Natürlich ist der feste Rechen oben und unten geschlossen.

Die Luftdämpfung erfordert eine sorgfältige Regulierung, damit bei dem schmalen Spielraum zwischen den beweglichen und unbeweglichen Teilen des Systems keine Berührung dieser Teile stattfindet; der Seismograph würde sonst ganz unregelmäßig arbeiten. Auch stärkere Temperaturänderungen können einen Einfluß auf die Größe des Dämpfungsverhältnisses ausüben.

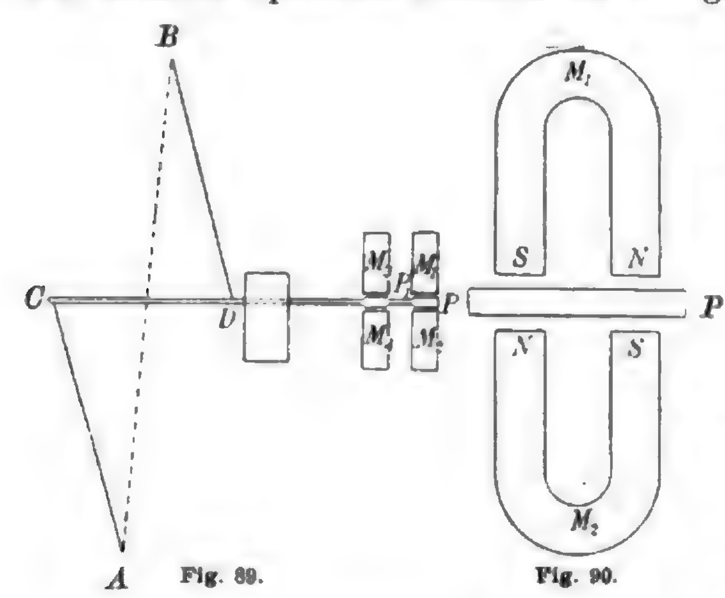


Fig. 89. Fig. 90.

Die Flüssigkeitsdämpfung beruht auch auf denselben Prinzipien wie die Luftdämpfung. Damit sie regelmäßig funktioniert, ist es notwendig, daß die Bewegung der schwingenden Teile der Dämpfungseinrichtung, durch deren Reibung in der Flüssigkeit die Dämpfung der Bewegung hervorgerufen wird, nicht senkrecht zu ihrer Oberfläche erfolgt, sondern daß die letztere sich parallel zu sich selbst in der Flüssigkeit bewegt. Im anderen Falle wird nämlich das Moment des Widerstandes der Flüssigkeit Glieder enthalten, die von dem Quadrate der Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung abhängen, was nicht wünschenswert ist. Die Flüssigkeitsdämpfung ist im allgemeinen in noch höherem Maße von der Temperatur abhängig wie die Luftdämpfung. Die Eigenschaften der benutzten Flüssigkeit kommen hierbei sehr in Betracht.

Die dritte Dämpfungsart ist die magnetische oder elektromagnetische.

Bei dieser Dämpfung wird eine Kupferplatte P an dem beweglichen Teil des Seismographen, wie der Stange des Horizontalpendels, befestigt, wie es Fig. 89 und 90 zeigen. Fig. 89 stellt die Seitenansicht der Einrichtung und Fig. 90 die Vorderansicht dar.

Die Kupferplatte P kann zwischen den Polen zweier fest gelagerter hufeisenförmiger Magnete M_1 und M_2, die mit entgegengesetzten Polen einander zugewandt sind, schwingen.

Bei der Bewegung der Platte werden in derselben Foucaultsche Ströme induziert, die auf die Bewegung des Apparates hemmend einwirken (Lentzscher Satz) und damit die magnetische Reibung erzeugen.

Digitized by Google

Nun ist aber die elektromotorische Kraft der Induktion und folglich die entsprechende Stromstärke der ersten Potenz der Geschwindigkeit der Plattenbewegung proportional (**Neumann**scher Satz) oder anders gesagt, direkt proportional der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Pendels. Es entspricht also die magnetische Dämpfung der Forderung der Theorie, daß das Moment der hemmenden Kräfte der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Seismographen streng proportional ist. Bei der magnetischen Dämpfung haben wir mit völlig bestimmten Angaben, mit exakten physikalischen Erscheinungen zu tun, während bei der Luft- und Flüssigkeitsdämpfung die variablen und ungenügend erforschten Reaktionserscheinungen des Luft- oder Flüssigkeitsmediums auf die bewegliche Oberfläche zu berücksichtigen sind. In dieser Beziehung hat die magnetische Dämpfung unbestreitbare und sehr wesentliche theoretische Vorzüge.

Um die Wirkung der magnetischen Dämpfung zu erhöhen, hat man die Kupferplatte möglichst weit von der Drehungsachse des Apparates anzubringen; dadurch nimmt das Moment der hemmenden Kräfte zu.

Die Erfahrung hat gezeigt, daß man in der Mehrzahl der Fälle für diese Dämpfung permanente Magnete benutzen kann, die am besten aus Wolframstahl angefertigt werden. Solche Magnete zeichnen sich durch große Stärke und Konstanz aus. Nur in wenigen Fällen, z. B. bei dem oben beschriebenen Apparate für die Untersuchung der Schwankungen der Gebäude, wo die Eigenperiode der Schwingungen der flachen Stahlfeder sehr kurz ist, ist man gezwungen, Elektromagnete anzuwenden.

Die magnetische Dämpfung zeichnet sich durch außerordentliche Einfachheit aus und kann bei jeder Art von Seismographen angewandt werden.

Ein anderer wesentlicher Vorzug der magnetischen Dämpfung besteht darin, daß die Stärke der Dämpfung durch einfache Annäherung oder Entfernung der Pole der permanenten Magnete von der Kupferplatte sehr leicht in weiten Grenzen variiert werden kann. Nähert man die Magnete genügend einander, so kann, wenn die Schwingungsdauer des Seismographen nicht zu kurz ist, der Apparat vollständig aperiodisch gemacht werden, was in theoretischer Hinsicht für die Eliminierung des Einflusses der Eigenbewegung des Apparates große Vorteile bietet.

Nicht unwesentlich ist, daß auch bei sehr großer Dämpfung zwischen den Oberflächen der Kupferplatte und den benachbarten Polen der permanenten Magnete gewöhnlich noch ein ziemlich großer freier Spielraum bleibt, so daß man nicht zu fürchten braucht, daß die Platte bei ihrer Bewegung die Magnetpole berührt. Die magnetische Dämpfung ist außerdem ganz offen, so daß man sich immer leicht überzeugen kann, ob alles in Ordnung ist; bei den anderen Dämpfungsarten ist das nicht immer leicht möglich.

Außerdem hat die Temperaturänderung, wenn sie nicht sehr erheblich ist, auf die Stärke der magnetischen Dämpfung keinen Einfluß.

Alle die genannten Vorteile, die durch ausgedehnte Beobachtungen auf der seismischen Station in Pulkovo bestätigt wurden, haben dazu geführt,

Digitized by Google

daß auf den sämtlichen russischen seismischen Stationen neue Instrumente nur noch mit magnetischer Dämpfung versehen werden.

Wir wollen nun kurz die verschiedenen Registrierungsmethoden betrachten; als Seismograph sei hierbei ein Horizontalpendel angenommen.

Die mechanische Registrierung.

Bei der mechanischen Registrierung befestigt man am Ende der Pendelstange einen leichten Stift, der auf der mit berußtem Papier bezogenen Registrierwalze die relative Bewegung des Pendels aufschreibt.

Um die Empfindlichkeit der Aufzeichnung zu erhöhen, kann man Vergrößerungsvorrichtungen benutzen, wie sie früher bei dem schweren Horizontalpendel erläutert wurden.

Die mechanische Registrierung zeichnet sich durch ihre Billigkeit aus. Sie ist besonders für die seismischen Stationen zweiten Ranges geeignet, für die nicht so sehr absolute Genauigkeit in der Ableitung der Elemente der Bodenbewegung von Wichtigkeit ist, als die Registrierung der Phaseneinsätze bei den Bebenaufzeichnungen und sonstige Beobachtungen, die den allgemeinen Charakter der Bodenbewegung in irgendeinem seismischen Gebiet wiedergeben.

Der Hauptnachteil der mechanischen Registrierung besteht darin, daß sie in die Beobachtungen ein variables Element, die Reibung der Feder an dem berußten Papier, einführt. Der Einfluß dieser Reibung wird besonders fühlbar, wenn man die Bewegung der Masse durch Hebeleinrichtungen vergrößert. In diesem Falle muß man, wie wir früher gesehen haben, sehr schwere Massen verwenden. Aber auch bei großen Massen tritt noch Reibung auf; in die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels müssen also auch dann noch Korrektionsglieder eingeführt werden.

Bei der mechanischen Registrierung sind daher wegen der variablen Reibung weder das Dämpfungsverhältnis, noch auch das entsprechende logarithmische Dekrement konstante Größen, sondern sie variieren mit der Amplitude der Ausschläge des Apparates, was die Auswertung der Seismogramme sehr erschwert. Wie man dieses berücksichtigen und in welcher Weise

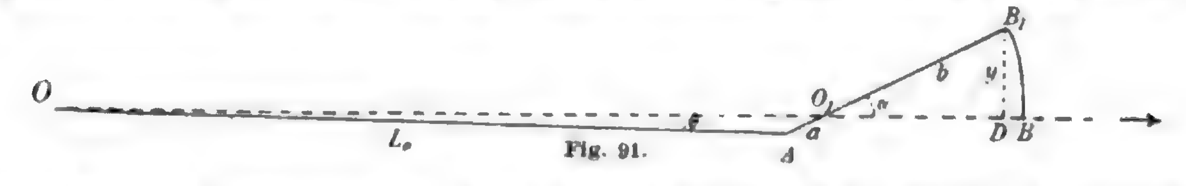


Fig. 91.

man aus den Aufzeichnungen eines solchen Apparates die absoluten Elemente der Bodenbewegung ableiten kann, werden wir in der Folge im XII. Kapitel sehen, das speziell der Theorie der mechanischen Registrierung gewidmet ist.

Außer dem angeführten sehr wesentlichen Nachteil hat die mechanische Registrierung bei Anwendung von Vergrößerungseinrichtungen noch folgende Unbequemlichkeit.

Es sei in der Fig. 91 O die Drehungsachse des Horizontalpendels, A das Ende des Pendelarms, AB_1 der vergrößernde ungleicharmige Hebel, der seine Drehungsachse in O_1 hat.

Digitized by Google

Die Länge des kurzen Armes AO_1 bezeichnen wir mit a, des langen O_1B mit b, und die Länge der Pendelstange OA mit L_0.

Das Pendel sei um den Winkel θ von seiner Ruhelage abgelenkt. Dann dreht sich der Hebel nach der entgegengesetzten Seite um den Winkel α, und die Entfernung des Schreibstiftes am Ende des langen Hebels B von der Zeitachse ist gleich $B_1D = y$. Diese Größe entnehmen wir unmittel-

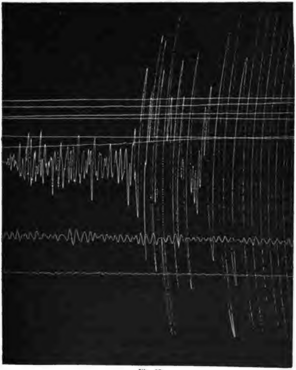


Fig. 92.

bar dem Seismogramm. Es sei die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel so gewählt, daß die Länge einer Sekunde auf dem Papier λ mm entspricht. λ ist immer eine sehr kleine Größe, z. B. $^1/_2$ mm.

Würde kein Vergrößerungshebel angebracht sein, wäre also der Schreibstift direkt am Ende der Pendelstange in A befestigt, so hätte sich der Punkt A, bei der Größe von L_0 und bei kleinen Winkeln θ fast senkrecht zu der Zeitachse bewegt. Aber bei einem Vergrößerungshebel wird infolge der Kleinheit von b der Schreibstift B bei kleinem λ ungefähr längs eines Kreisbogens sich bewegen und das ganze Seismogramm wird verzerrt, was

Digitized by Google

bei bedeutenden Amplituden wenig angenehm ist, da eine Zeitkorrektion erforderlich ist, wenn nicht die Zeitmarken in der Kurve selbst durch Unterbrechungen gegeben werden.

Ein solches Seismogramm, das die Kreisbewegung der Schreibnadel deutlich zeigt, ist in Fig. 92 wiedergegeben; es wurde von einem astatischen Wiechertschen Pendel aufgezeichnet.

Wir wollen nun untersuchen, welchen Einfluß die Kreisbewegung des Schreibstiftes B auf die Aufzeichnung des Apparates ausübt, und setzen dabei

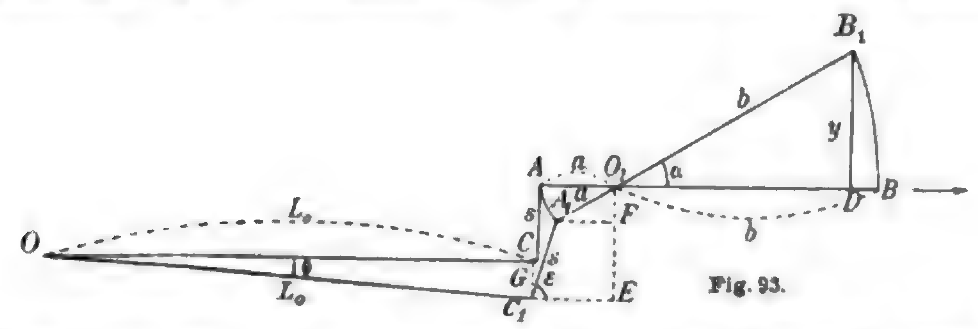


Fig. 93.

eine Vergrößerungseinrichtung voraus, wie wir sie früher bei dem schweren Horizontalpendel beschrieben haben.

In Fig. 93 ist $OC = L_0$ die Stange des Horizontalpendels, O die Drehungsachse des Pendels, O_1 die Drehungsachse des Vergrößerungsapparates, $AO_1 = a$ der kurze Arm, $O_1B = b$ der lange Arm, und $AC = s$ die Verbindungsnadel.

Bei der Drehung des Pendels um einen kleinen Winkel θ dreht sich der Vergrößerungshebel um den Winkel α, wobei der Punkt C sich nach C_1, A nach A_1 und B nach B_1 verlegt; außerdem ist

$$OC_1 = OC = L_0$$

$$O_1A_1 = O_1A = a$$

$$O_1B_1 = O_1B = b$$

$$A_1C_1 = AC = s$$

und der Winkel $A_1C_1E = \varepsilon$.

Wir wollen nun die Abhängigkeit zwischen der Ordinate $y = B_1D$ und dem Drehungswinkel θ des Pendels aufsuchen.

Aus Fig. 93 folgt

$$O_1F + FE = AC + GC_1$$

oder

$$a \sin \alpha + s \sin \varepsilon = s + L_0 \sin \theta.$$

Andererseits ist

$$O_1A = C_1E - CG$$

oder

$$a = a \cos \alpha + s \cos \varepsilon - L_0(1 - \cos \theta).$$

Da θ eine sehr kleine Größe ist, so können wir ihre höheren Potenzen vernachlässigen.

Digitized by Google

Setzt man noch

$$\varepsilon = 90 - \beta,$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} a\sin\alpha + s\cos\beta &= s + L_0\theta \\ a\cos\alpha + s\sin\beta &= a \end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

und

Ist α klein, so ist auch β klein. Entwickelt man $\cos\alpha$ nach Potenzen von α in eine Reihe, so erhält man

$$a\left(1 - \frac{\alpha^2}{2}\right) + s\sin\beta = a$$

oder

$$\sin\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{s}\alpha^2,$$

und bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\beta = \frac{1}{2}\cdot\frac{a}{s}\alpha^2.$$

Wir können $\cos\beta$ gleich 1 setzen; dann gibt die erste Formel (17)

$$a\sin\alpha = L_0\theta.$$

Andererseits ist

$$b\sin\alpha = y; \qquad (18)$$

folglich

$$y = \frac{b}{a}L_0\theta. \qquad (19)$$

Wir sehen also, daß die Ordinate der Kurve des Seismogramms tatsächlich dem Drehungswinkel des Pendels θ proportional ist und keine Korrektion erfordert; aber die Korrektion des Zeitpunktes t', der aus dem Seismogramm entnommen wird und dem Punkte D oder der Abszisse des Punktes B_1 entspricht, ist sehr groß. Die stets negative Korrektion $\Delta t'$ für den wahren Moment t ist

$$t = t' - \Delta t'. \qquad (20)$$

Die Größe dieser Korrektion wird durch die Länge des Abschnittes BD gegeben

$$\Delta t' = \frac{BD}{\lambda},$$

also

$$BD = b(1 - \cos\alpha) = \tfrac{1}{2}b\alpha^2.$$

Aus der Formel (18) ergibt sich bis auf die Glieder höherer Ordnung

$$\alpha^2 = \frac{y^2}{b^2};$$

folglich

$$\Delta t' = \frac{1}{2}\frac{y^2}{b\lambda}. \qquad (21)$$

Bei größeren Amplituden der Ausschläge des Apparates ist somit die Anbringung einer Korrektion erforderlich.

Digitized by Google

Statt der Benutzung eines Stiftes, der auf berußtem Papier schreibt, kann man auch eine besonders konstruierte Feder mittels einer Farblösung auf weißem Glanzpapier schreiben lassen, eine Einrichtung, die von Zeißig für die Registrierung der Bewegung des astatischen Wiechertschen Pendels auf der seismischen Station in Jugenheim bei Darmstadt benutzt wird.

Die Feder besteht aus einer sehr feinen Glaskapillaren, die mit ihrem fein polierten, etwas gebogenen Ende so auf dem Glanzpapier aufruht, daß Farblösung auf das Papier treten kann. An dem anderen Ende der Feder, das wie üblich in den Achatlagern des Schreibarms gelagert ist, ist die Kapillare erweitert, so daß ein kleines Reservoir für die Farblösung entsteht.

Bei dieser Registrierungsart, die sehr bequem ist, ist die Reibung etwa dieselbe, wie bei der Registrierung auf berußtem Papier. Die Aufzeichnung ist sehr klar. Ihr Hauptwert besteht darin, daß man die Bewegung des Apparates auf einem fortlaufenden schmalen Papierbande, das von einer Walze abläuft und automatisch auf eine andere aufgespult wird, in der Art wie beim Morseapparat registrieren kann. Es kann hierbei nicht vorkommen, daß sich wie bei den gewöhnlichen Registrierapparaten mit spiraliger Fortbewegung des Papiers bei länger dauernden Beben eine Aufzeichnung über die andere lagert.

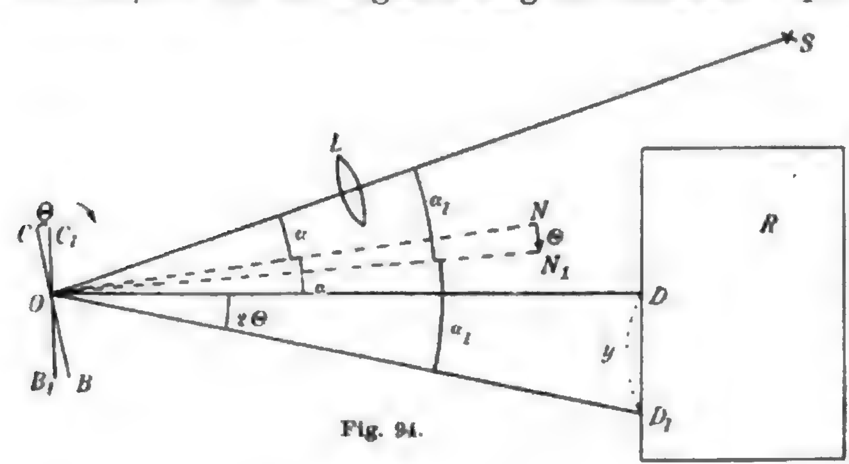


Fig. 94.

Ein Hindernis für die weitere Ausbreitung dieser Registriermethode ist die außerordentlich schwierige Herstellung passender Federn. Damit die Feder regelmäßig funktioniert und keine Unterbrechungen in der Kurve eintreten, muß das Ende der Feder sehr sorgfältig abgeschliffen werden, was eine große Geschicklichkeit erfordert.

Die optische Registrierung.

Die optische Registriermethode besitzt große Vorzüge vor der mechanischen, besonders deswegen, weil sie selbst keine neue Reibung einführt, denn als Vergrößerungshebel dient ja der Lichtstrahl. Außerdem geschieht die Bewegung des Lichtpunktes auf der Trommel fast senkrecht zur Zeitachse, so daß die Seismogramme auch bei bedeutenden Amplituden der Ausschläge des Apparates nicht in verzerrter Gestalt erscheinen, wie bei der mechanischen Registrierung mittels Vergrößerungshebels. Nur bei sehr großen Ausschlägen würde die Anbringung einer kleinen Korrektion notwendig sein.

Diese Methode verlangt aber die Verwendung von lichtempfindlichem Papier und ist daher bei großer Registriergeschwindigkeit verhältnismäßig

Digitized by Google

kostspielig; sie wird deswegen im allgemeinen nur auf den seismischen Stationen erster Ordnung angewandt.

In Fig. 94 stellt S den Lichtpunkt dar, statt dessen am besten ein scharf beleuchteter, vertikal stehender Spalt genommen wird. Das Strahlenbündel fällt auf den kleinen Spiegel BC, der in der Nähe der Drehungsachse des Pendels angebracht ist. ON ist die Richtung der Normalen zum Spiegel.

Der Strahl wird in der Richtung OD zurückgeworfen und fällt bei D auf die Registrierwalze R, wobei

$$\sphericalangle SON = \sphericalangle NOD = \alpha.$$

Man hat den Spiegel und den Registrierapparat so einzustellen, daß der Strahl OD, der der Ruhelage des Seismographen entspricht, normal auf die Oberfläche des Registrierzylinders einfällt.

Setzen wir nun voraus, daß das Pendel mit Spiegel um einen Winkel θ in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers abgelenkt wird, so dreht sich der Spiegel in die Lage $B_1 C_1$ und es wandert daher ON nach ON_1; der Einfallswinkel wird gleich

$$\alpha_1 = \alpha + \theta.$$

Der Reflexionswinkel ist ebenfalls gleich α_1, und der Lichtpunkt wandert daher von D nach D_1, wobei

$$\sphericalangle DOD_1 = \alpha_1 - (\alpha - \theta) = 2\theta.$$

Bezeichnet man die Amplitude des Ausschlages des Lichtpunktes auf der Trommel mit y und die Entfernung des Punktes D bis zur Mitte des Spiegels mit A, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{y}{A}. \tag{22}$$

Für kleine Winkel θ kann man setzen

$$\theta = \frac{y}{2A}, \tag{23}$$

für große Ausschlagsamplituden muß man für die Bestimmung von θ eine geringe Korrektion y hinzu addieren, welche wir in der Folge (s. § 2 des VI. Kap.) ableiten werden.

Die Linse L dient dazu, ein Bild des vertikalen Spaltes auf der Oberfläche der Trommel zu entwerfen.

Eine andere lange horizontal liegende Zylinderlinse mit kurzer Brennweite wird direkt vor der Trommel angebracht; sie vereinigt die Strahlen des Spaltbildes zu einem Punkt D. Um einen scharf definierten Lichtpunkt zu erhalten, blendet man zweckmäßig diese Linsen etwas ab.

Gewöhnlich wird übrigens jetzt die Linse L direkt vor dem Spiegel angebracht, so daß das von der Lichtquelle einfallende Lichtbündel sie doppelt passiert.

In der Praxis nimmt man gewöhnlich 4 m als Entfernung Spiegel-Registrierwalze. Bei größerer Entfernung ist bei Anwendung schwächerer Lichtquellen der Lichtpunkt nicht hell genug.

Nimmt man 0,1 mm als Grenze der Genauigkeit der Messung von y und für $A = 4000$ mm an, so erhält man als Genauigkeit, mit der man den Winkel θ messen kann

$$\theta'' = \frac{0{,}1}{8000} \cdot \frac{1}{\sin 1''} = \text{etwa } 2^1/_2''.$$

Wenn man die Empfindlichkeit des Seismographen noch größer haben will, so muß man zur galvanometrischen Registrierung übergehen.

Die galvanometrische Registrierung.

Die Theorie dieser Registriermethode werden wir eingehend im VI. Kapitel auseinandersetzen, jetzt sollen nur kurz die Prinzipien, auf die sie sich gründet, erläutert werden.

Für die galvanometrische Registrierung wird an dem Pendelarm ein horizontal liegender Rahmen P_1 mit vier flachen Induktionsspulen aus dünnem isoliertem Draht (Fig. 89) angebracht. Der Rahmen bewegt sich zwischen den Polen zweier permanenter Magnete M_3 und M_4, die ihre entgegengesetzten Pole einander zukehren. Bei der Bewegung des Pendels bewegen sich ebenfalls die Spulen in dem magnetischen Felde, wodurch elektrische Ströme in ihnen induziert werden, deren Stärke der Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung proportional ist. Von den äußeren Spulen gehen zwei Drähte den Pendelarm entlang zu zwei Klemmen, die sich in der Nähe der Drehungsachse des Pendels befinden. Die Verbindung dieser Klemmen mit zwei festen Klemmen an dem Pendelgestell wird durch zwei dünne Silberblättchen bewirkt, durch die die Regelmäßigkeit der Eigenbewegung des Pendels nicht gestört wird. Von hier führen Drähte zu einem hochempfindlichen Drehspulengalvanometer von Deprez-d'Arsonvalschem Typus. Die Wickelung und die Verbindung der Spulen untereinander ist so hergestellt, daß sich bei der Pendelbewegung alle vier Induktionsströme in dem äußeren Stromkreise gegenseitig verstärken.

Diese Induktionsströme setzen nun das Galvanometer in Bewegung. Da Drehspulengalvanometer der angegebenen Art auf die schwächsten Ströme reagieren, so ist diese Art der Registrierung der Bewegung des Seismographen äußerst empfindlich.

Bei dieser Art von Registrierung wird also nicht die Bewegung des Pendels selbst direkt aufgezeichnet, sondern die von ihm veranlaßte Bewegung des Galvanometers, d. h. Größen, die unmittelbar von der Geschwindigkeit der Bewegung des Pendels abhängen. Für harmonische Schwingungen ist es offenbar ganz gleich, ob wir den Winkelausschlag des Apparates oder die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten registrieren. Zur Registrierung der Bewegung des Galvanometers wird die oben beschriebene Methode der direkten optischen Registrierung auf lichtempfindlichem Papier

Digitized by Google

angewandt; zu diesem Zwecke ist an der Drehspule des Galvanometers ein kleiner Spiegel befestigt.

Für bradyseismische Erscheinungen kann die galvanometrische Registrierung offenbar nicht angewandt werden, für die Erforschung der seismischen Erscheinungen bei Fernbeben oder der mikroseismischen Bewegungen jedoch ist diese Methode wegen ihrer großen Empfindlichkeit sehr zweckmäßig und bequem. Während der mehrere Jahre umfassenden seismometrischen Beobachtungen in Pulkovo hat sie sich vorzüglich bewährt.

Bei der Empfindlichkeit der Galvanometer kann die Registriertrommel verhältnismäßig nahe am Galvanometerspiegel, etwa in einer Entfernung von 1 m, aufgestellt werden, wodurch man scharf definierte und völlig ausgezeichnete Kurven erhält.

Ferner gestattet diese Methode eine Fernregistrierung. Man kann die Registriereinrichtung von den Seismographen selbst getrennt, das Galvanometer z. B. in einem besonderen trockenen und bequem gelegenen Raume aufstellen, so daß man beim Papierwechsel den Seismographenraum gar nicht zu betreten braucht, was sehr wünschenswert ist, denn jedes Betreten dieses Raumes stört unvermeidlich die empfindlichen Apparate.

Bei galvanometrischer Fernregistrierung ist es zur Vermeidung besonderer Induktionserscheinungen notwendig, beide Zuleitungsdrähte vom Pendel zum Galvanometer sorgfältig umeinander zu wickeln, also zu drillen.

Ein anderer Vorteil der galvanometrischen Registrierung besteht darin, daß die Aufzeichnung des Galvanometers bis zu einem gewissen Grade vollkommen unabhängig von der etwaigen Nullage des Seismographen ist. Der Seismograph selbst kann infolge von Temperatureinflüssen seine normale Ruhelage nicht unerheblich ändern. In den Aufzeichnungen des Galvanometers kommen diese Änderungen aber nicht zum Ausdruck, da ja nicht die Ausschläge des Seismographen, sondern die Winkelgeschwindigkeiten seiner Bewegung registriert werden und daher seine anfängliche Lage ohne Einfluß ist.

Die Anwendung der galvanometrischen Registriermethode ermöglicht Details der Bodenbewegung, wie sie z. B. bei der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums erforderlich sind, zu ermitteln, die den anderen Registriermethoden nur schwer zugänglich sind.

Eins nun könnte man bei dieser Methode befürchten, daß die Bewegung des Rahmens des Galvanometers eine gewisse Rückwirkung auf die Bewegung des Seismographen selbst ausüben könnte, aber die zur Untersuchung dieser Frage angestellten Beobachtungen haben gezeigt, daß bei einer nicht zu geringen Masse des beweglichen Teiles des Seismographen diese Rückwirkung völlig belanglos ist, was man bei der außerordentlichen Schwäche der induzierten Ströme auch ohne weiteres erwarten konnte.

Die Fig. 95 gibt eine Ansicht eines aperiodischen Horizontalpendels in Koppelung mit einem Galvanometer; solche Pendel sind jetzt auf einer Reihe von größeren seismischen Stationen in Gebrauch.

Sie zeichnen sich durch große Kompaktheit aus und geben bei einer Pendelmasse von nur 7 kg Vergrößerungen, die für einige Arten von seismischen Wellen 800 bis 1500 leicht erreichen.

Digitized by Google

Beide Magnetsysteme, sowohl das für die Dämpfung, als auch das für die galvanometrische Registrierung können durch besondere Schlittenvorrichtungen mit Mikrometerschrauben verschoben werden. Besondere Skalen mit

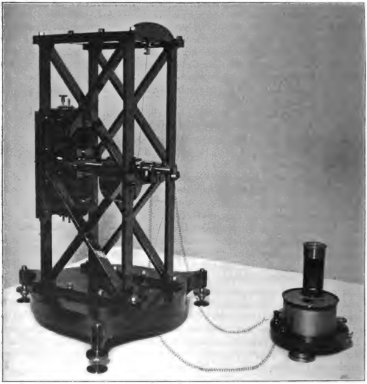


Fig. 95.

Nonien gestatten die Entfernung der Magnetpole bis auf 0,1 mm genau direkt abzulesen.

Die geeignetste Eigenperiode der Schwingungen ist für diese Apparate bei Ausschaltung der Dämpfung 12 bis 25 Sekunden. Bei vollständiger Aperiodizität des Apparates ist dann der Spielraum zwischen den Oberflächen der Kupferplatte für die Dämpfung und den benachbarten Magnetpolen noch einige Millimeter, so daß die Möglichkeit einer Berührung zwischen Platte und Magnet gänzlich ausgeschlossen ist.

Der Seismograph ist mit dem früher erwähnten Stützstift für die Eliminierung der Längsschwingungen der Pendelmasse versehen, der aber für die Registrierung von Fernbeben nicht benutzt wird.

Digitized by Google

An der Seite des Pendelgestells ist ein kleiner Elektromagnet angebracht, der auf das Pendelgewicht schlägt und demselben einen kleinen Anstoß erteilt, was für die Bestimmung der Pendelkonstanten bequem ist. Das Horizontalpendel wird durch eine zylindrische Blechkappe mit zwei Handgriffen und einem Fensterchen bedeckt; der untere Rand der Kappe ruht in einer Blechrinne, welche direkt auf dem Pfeiler, auf dem das Instrument aufgestellt wird, befestigt wird.

Um die große Empfindlichkeit des beschriebenen aperiodischen Horizontalseismographen zu zeigen, seien die beiden folgenden Beispiele angeführt.

Beim Messinabeben am 28. Dezember 1908 war der ganze (doppelte)

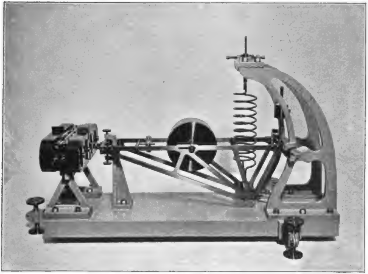


Fig. 96.

Ausschlag des Lichtpunktes auf der Registriertrommel in Pulkovo bei einer Entfernung von 2600 km vom Epizentrum etwa 0,9 m. Beim letzten Wernyjbeben am 3.—4. Januar 1911 war er dagegen bei einer Entfernung von 3700 km vom Epizentrum nicht weniger als 3,4 m! Solche außerordentlich große Ausschläge kann man natürlich direkt nicht registrieren.

Fig. 96 gibt eine Ansicht des Pulkovoer aperiodischen Vertikalseismographen.

Ein beweglicher Doppelrahmen aus Messing, der die schwere Masse trägt, kann frei um eine horizontale Achse sich drehen; die Achse wird gebildet durch zwei Paare dünner, senkrecht zueinander stehender, flacher Stahlfedern.

Digitized by Google

Der Rahmen wird von einer festen Spiralfeder aus Stahl unterstützt, deren unteres Ende weit unter dem Schwerpunkt des ganzen beweglichen Teiles des Apparates angreift. Mit Hilfe besonderer Schrauben können der obere und untere Befestigungspunkt der Feder gehoben oder gesenkt, auch nach rechts und links verschoben werden. Es ist dieses notwendig, um den schwingenden Teil in die gewünschte Lage zu bringen und seine Eigenperiode zu regulieren.

Am freien Ende des Rahmens ist eine Kupferplatte für die Dämpfung und ein Rahmen mit den Spulen für die galvanometrische Registrierung angebracht. Die Platte und der Rahmen können sich zwischen den Polen zweier Paare hufeisenförmiger permanenter Magnete bewegen. In Fig. 96 ist nur ein Paar solcher Magnete für die Dämpfung dargestellt, will man aber die Dämpfung bis zur Aperiodizität erhöhen, so muß man wegen der verhältnismäßig kurzen Eigenperiode des Apparates, 13 bis 14 Sekunden, zwei Platten und zwei Paare permanenter Magnete benutzen.

Am Außenrande der Kupferplatte ist eine Millimeterskala aufgetragen und an einem der Magnete ist ein Zeiger angebracht. Diese Skala dient dazu, den oberen Balken des beweglichen Rahmens des Apparates in die horizontale Lage einzustellen, wozu man sich eines kleinen Laufgewichtes bedient, das sich längs einer horizontalen Schraube fortbewegt.

Die Drähte von den Induktionsspulen laufen den oberen Balken des Rahmens entlang zu zwei Klemmen in der Nähe der Drehungsachse des Apparates. Diese Klemmen sind mit festen Klemmen am Pendelgestell durch zwei dünne Silberblättchen verbunden. Von hier aus gehen dann die Drähte zum Galvanometer.

In der Nähe der Drehungsachse des Apparates befindet sich ein vertikaler Stab mit einem verschiebbaren Gewicht, das dazu dient, den Schwerpunkt des beweglichen Systems in dieselbe Höhe wie die Drehungsachse des Apparates zu bringen. In diesem Falle reagiert der Vertikalseismograph nicht auf die horizontalen Bodenverrückungen.

Da sich die Elastizität der Stahlfedern bei Temperaturänderungen stark ändert, so benutzt man gewöhnlich bei empfindlichen Federseismographen eine besondere Temperaturkompensation, die aber die Konstruktion des Apparates sehr kompliziert macht. Bei unserem Seismographen ist eine solche Temperaturkompensation unnötig, denn bei Anwendung der galvanometrischen Registriermethode hat die Nullage des Apparates keine große Bedeutung, da nicht die Winkelausschläge des Apparates, sondern die entsprechenden Winkelgeschwindigkeiten registriert werden. Trotzdem muß man immer versuchen, den oberen Balken des Rahmens in horizontaler Lage zu erhalten, denn selbst unbedeutende Neigungen des Rahmens können schon eine merkliche Änderung der Periode des Apparates veranlassen. Zur feineren Einstellung dient, wie schon erwähnt, das Laufgewicht.

Die auf der Pulkovoer Station angestellten Beobachtungen mit diesem Seismographen haben die vortrefflichen Eigenschaften desselben klar erwiesen.

Digitized by Google

Beim Gebrauch der hochempfindlichen Seismographen, die uns gestatten, die verschiedenen Details der wahren Bodenbewegung kennen zu lernen, ist die Verwendung guter Registrierapparate wichtig. Es ist zu bedauern, daß zurzeit auf diesen Punkt noch so wenig Gewicht gelegt wird.

Von einem guten Registrierapparat wird verlangt, daß die rotierende Trommel einen gleichmäßigen Gang besitzt, daß also die Länge einer Minute überall die gleiche ist, und daß die Rotationsgeschwindigkeit so groß

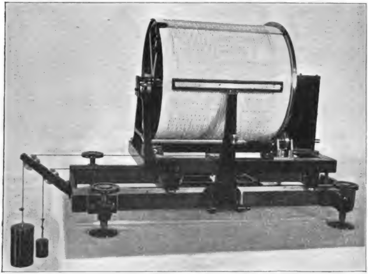


Fig. 97.

ist, daß man auf dem Seismogramm seismische Wellen mit kurzen Perioden deutlich entziffern kann.

Einer der vollkommensten Registrierapparate, der sich durch einen sehr regelmäßigen Gang auszeichnet, konstruiert vom Mechaniker am Physikalischen Laboratorium der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Petersburg, Herrn Masing, ist in Fig. 97 dargestellt.

Ein sorgfältig gearbeiteter Messingzylinder wird von einem Uhrwerk in Bewegung gesetzt (in der Figur rechts). Die Regulierung der Bewegung dieses Uhrwerks mit Federantrieb wird mittels eines fein konstruierten Foucaultschen Regulators erzielt.

Die Bewegung des Zylinders erfolgt nicht durch Angriff an seiner Achse, sondern an der Peripherie, und zwar mittels einer Rolle, auf der der Zylinderrand aufruht. Eine solche Übertragung hat den unbestreitbaren Vorteil, daß die verschiedenen kleinen unvermeidlichen Mängel der Zahnräder des Uhrwerks auf die Bewegung des Zylinders nicht in dem Maße

Digitized by Google

störend einwirken, als wenn die Bewegung des Uhrmechanismus direkt auf die Zylinderachse übertragen würde.

Der Registrierapparat nebst dem Uhrwerk ruht mittels Rollen auf Schienen, auf denen er seitlich fortbewegt werden kann. Die Fortbewegung erfolgt durch ein besonderes einfaches Uhrwerk, das durch ein fallendes Gewicht getrieben wird. Das kleine Gewicht dient zur Spannung der Aufzugsschnur.

Bei vielen Registrierapparaten wird die Fortbewegung des Zylinders sich selbst parallel mit Hilfe einer unendlichen Schraube erzielt und dasselbe Uhrwerk, das die Walze treibt, bewegt sie auch seitwärts vorwärts. Bei schweren Registrierapparaten ist eine solche Einrichtung wenig angebracht, denn die Belastung des Uhrwerks ist in diesem Falle so groß, daß es sehr schwer ist, einen ganz gleichmäßigen Gang der Walze zu erzielen. Die Verwendung zweier, voneinander ganz unabhängiger Uhrwerke erscheint daher sehr vorteilhaft.

Bei diesem Apparate ist die Länge einer Minute gleich 30 mm und der Abstand der benachbarten Linien auf der Trommel gleich 10 mm. Das Uhrwerk ist für 12 Stunden regelmäßigen Gang berechnet, somit müssen die Registrierbögen zweimal in 24 Stunden gewechselt werden.

In neuerer Zeit hat der Mechaniker Masing auch einen vereinfachten Registrierapparat für die seismischen Stationen zweiter Ordnung mit nur einem Uhrmechanismus hergestellt, bei dem statt des Foucaultschen Regulators eine neue Art von Regulator sehr einfacher Konstruktion zur Anwendung kommt.

Auf einer Registriertrommel kann man gleichzeitig die Bewegungen zweier Seismographen aufzeichnen.

In Fig. 98 ist der Strahlengang bei der Registrierung der Bewegung zweier Galvanometer, die mit aperiodischen Horizontalpendeln gekoppelt sind, dargestellt.

N bedeutet den Metallzylinder, in welchem die Nernstlampe mit vertikal stehendem leuchtendem Faden eingeschlossen ist. Das Licht dieses Fadens wird mittels einer Sammellinse auf den schmalen Vertikalspalt A konzentriert, der als Lichtquelle dient.

Vor dem Spalte stehen unter einem Winkel zueinander zwei kleine Spiegel M, welche je ein Bündel reflektierter Strahlen auf die Spiegel O_1 und O_2 der Galvanometer G_1 und G_2 werfen.

Nach der Reflexion an den Galvanometerspiegeln werden die Strahlen noch in den Punkten E_1 und E_2 von zwei Spiegeln S_1 und S_2, die auf dem Tischchen T aufgestellt sind, reflektiert. Nach der zweiten Reflexion fallen die Strahlen auf die Registriertrommel R (Punkte B_1 und B_2). Die Sammellinsen L_1 und L_2, die vor den Galvanometerspiegeln aufgestellt sind, und die lange horizontale zylindrische Linse C vereinigen die Strahlen zu zwei scharf begrenzten Punkten B_1 und B_2. Diese Anordnung erwies sich in der Praxis als sehr bequem.

Die Zeitmarkierung auf den Seismogrammen wird am einfachsten so ausgeführt, daß auf dem Wege eines der beiden Strahlenbündel ein kleiner

Digitized by Google

Elektromagnet, der einen kleinen Schirm trägt und mit der Kontaktuhr in Verbindung steht, aufgestellt wird; dieser Schirm unterbricht ein oder zwei Sekunden lang die Aufzeichnung des Apparates, indem er die Strahlenbündel abblendet.

Um eine genaue Zeitbestimmung für den zweiten Apparat, der auf derselben Walze registriert, zu erhalten, hat man immer die Zeitparallaxe

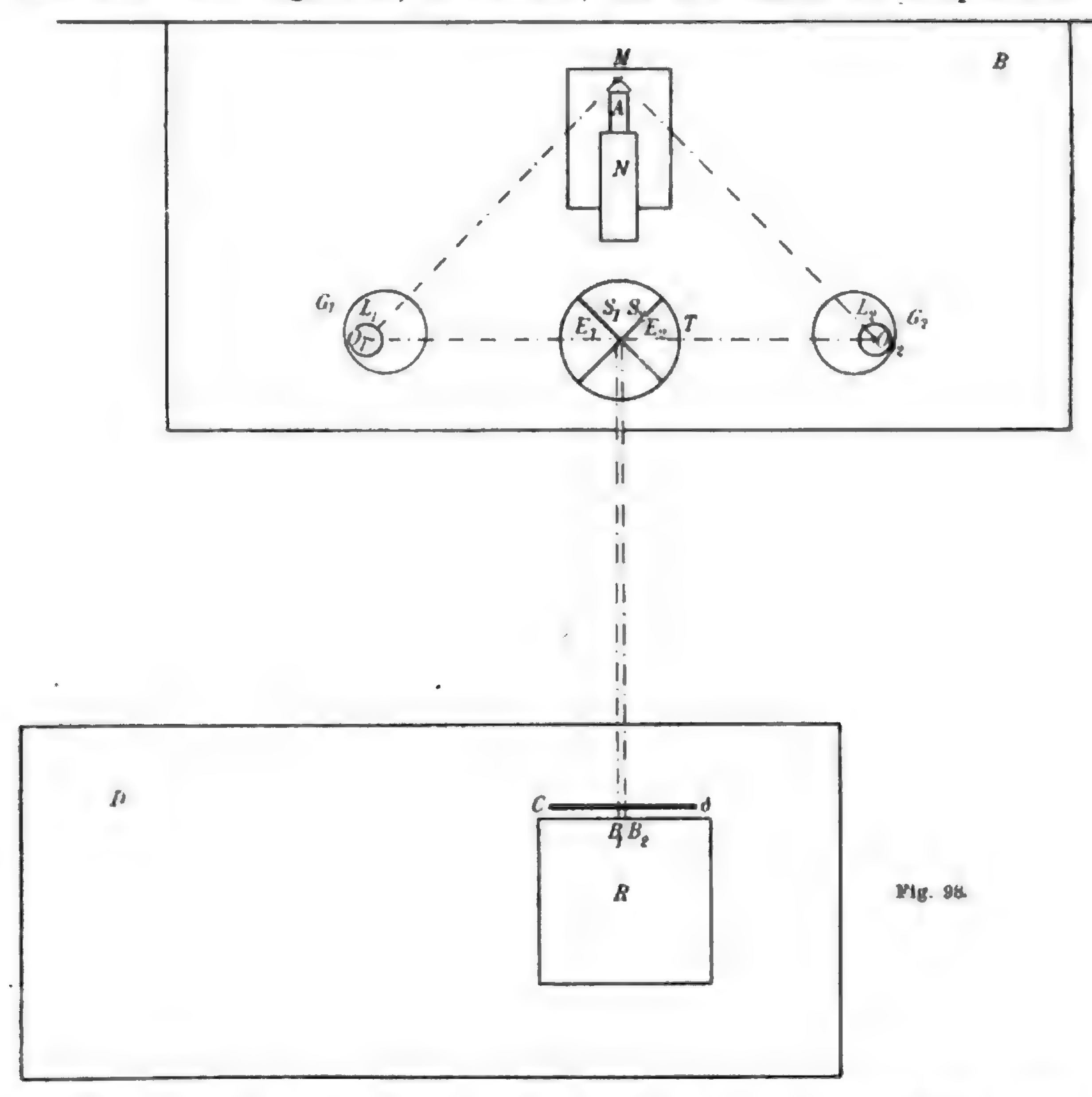


Fig. 98.

zu berücksichtigen, man hat also zu bestimmen, um wieviel der eine Punkt in der Ruhelage der Apparate gegen den anderen in der Zeitachse verschoben ist.

Wichtig ist, daß auch die Kontaktuhr einen regelmäßigen Gang hat, damit man stets die richtige Zeit bis auf eine Sekunde genau ermitteln kann. Diese Genauigkeit wird jetzt von den seismischen Beobachtungen gefordert.

Die Gänge der Uhr kann man entweder durch direkte elektrische Übertragung der Zeit von einem astronomischen Observatorium, oder auch durch Aufnahme der auf drahtlosem Wege gegebenen Zeitsignale der Funkensta-

Digitized by Google

tionen bestimmen. Läßt sich beides nicht ausführen, so muß man die Uhrkorrektionen selbständig nach einfachen astronomischen Methoden bestimmen.

Alle Momente auf den Seismogrammen sollen in mittlerer Greenwicher Zeit angegeben werden, gezählt von Mitternacht zu Mitternacht von 0 bis 24 Stunden.

Die Seismographen selbst müssen auf festen massiven Pfeilern, die wenn möglich auf Steinboden ruhen, aufgestellt werden.

Die seismischen Stationen erster Ordnung sollten mit den besten Seis-

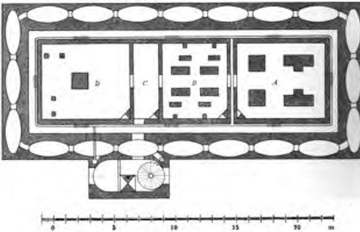


Fig. 99.

mographen versehen sein, wobei es zweckmäßig ist, zwei volle Sätze von Apparaten zu haben, und zwar den einen mit größerer, den anderen mit geringerer Empfindlichkeit.

Der Raum der Station selbst soll möglichst trocken sein und möglichst geringe Temperaturschwankungen aufweisen. Um der zuletzt genannten Forderung zu genügen, dann aber auch zur Verminderung der Wirkung der mikroseismischen Schwingungen II. Art, baut man zweckmäßig unterirdische Räume, wobei man den Raum, der für die Seismographen bestimmt ist, mit einem oder noch besser mit zwei Gängen umgibt.

Die Fig. 99 gibt den Grundriß der neuen seismischen Zentralstation in Pulkovo und Fig. 100 ihren Aufriß.

Die Station besteht aus vier Räumen, die ganz unter der Erde liegen und die von zwei Gängen umgeben sind. Der äußere von diesen Gängen ist mit Warmwasserheizung versehen.

Die Forderungen, die an die seismischen Stationen zweiter Ordnung zu stellen sind, sind weniger streng. Die Apparate können kleinere Empfindlichkeit besitzen und die Aufzeichnung kann mechanisch sein; aber auch von diesen Stationen wird verlangt, daß die Zeit mit derselben Genauig-

Digitized by Google

keit, also bis auf eine Sekunde genau angegeben werden muß. Nur unter dieser Bedingung kann das gesammelte seismometrische Material der betreffenden seismischen Station wissenschaftlichen Wert haben.

Wir wollen hiermit die Betrachtung der Konstruktion der Seismographen sowie die Art ihrer Aufstellung abschließen.

Es sei nur noch wiederholt, daß die Hauptaufgabe aller seismometrischen Beobachtungen in der Bestimmung der Elemente der wahren Bodenbewegung besteht; ihre Kenntnis gestattet uns, Schlüsse über die Intensi-

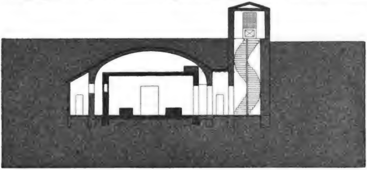


Fig. 100.

tät der seismischen Energie und die verschiedenen charakteristischen Eigentümlichkeiten der Bewegung der Oberfläche zu ziehen.

Zum Schluß wollen wir noch auf eine Methode der Schätzung der Stärke der Beben hinweisen, die in den pleistoseistischen und epizentralen Gebieten mit Erfolg dürfte angewandt werden können.

Diese Methode ist sehr einfach, verlangt keine komplizierten Apparate und ist daher von jedermann anzuwenden; sie beruht darauf, daß Gegenstände bestimmter Form bei einer bestimmten Größe der Bodenbewegung umkippen. Sie könnte vielleicht eine rationelle, rein dynamische Skala für die Schätzung der Stärke der Beben geben, wenigstens in bezug auf horizontale Bodenverschiebungen.

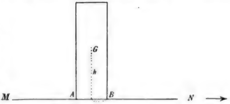


Fig. 101

Denken wir uns ein gleichartiges Holzparallelepiped, das auf der Unterlage MN ruht (s. Fig. 101).

Neigen wir es um einen kleinen Winkel θ nach rechts um B als Achse und überlassen es sich selbst. Ist der Winkel θ nicht zu groß, so kommt das Parallelepiped in seine vorige vertikale Ruhelage zurück, aber wegen der Trägheit wird es nach links weiter schwingen, indem es sich jetzt um die Achse A dreht; es erreicht einen maximalen Winkelausschlag, der klei-

Digitized by Google

ner als der erste ist, kommt dann von neuem in seine Ruhelage, bewegt sich nach rechts fort, indem es sich um die Achse B dreht usw.

Diese Bewegung ist ihrem Charakter nach sehr interessant. Wir wollen nicht ausführlicher darauf eingehen, sondern nur darauf hinweisen, daß nach der Theorie die maximalen Amplituden (die Neigungswinkel) nach rechts und links in geometrischer Progression nach dem Gesetze des logarithmischen Dekrements abnehmen, daß aber die Dauer der Schwingungen nach rechts und links nicht konstant bleibt, sondern mit der Amplitude abnimmt, und zwar ist diese Dauer der Quadratwurzel aus der maximalen Amplitude proportional.

Die Richtigkeit dieser theoretischen Resultate in betreff der Eigenbewegung dieses einfachen Apparates ist durch direkte Beobachtungen geprüft worden.

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß sich die Unterlage MN selbst in Bewegung befindet.

Bezeichnen wir die Höhe des Schwerpunktes G über der Basis AB mit h, und die Hälfte des Abstandes der Drehungsachsen A und B voneinander mit c.

Denken wir uns nun, daß sich die Erdoberfläche plötzlich nach rechts in der Richtung x bewegt, d. h. die Unterlage MN also einen Stoß erfährt, der ihr eine anfängliche Geschwindigkeit x_0' verliehen hat.

Ist x_0' genügend groß, so kippt das Parallelepiped nach links um.

Die Bedingung des Umkippens kann man theoretisch bestimmen. Die Theorie lehrt, daß das Parallelepiped umkippt, wenn bis auf die Glieder der Ordnung $\frac{c^2}{h^2}$ die folgende Ungleichung gilt

$$x_0' > c\sqrt{\frac{4}{3} \cdot \frac{g}{h}}, \tag{24}$$

wo g die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

Die Richtigkeit dieser Formel im allgemeinen ist durch direkte Beobachtungen bestätigt worden.

Stellt man nun eine ganze Reihe verschiedener solcher Parallelepipede auf, so kann man, wenn man beobachtet, welche von ihnen umgefallen und welche stehengeblieben sind, über die Intensität des entsprechenden plötzlichen horizontalen Stoßes in der betreffenden Richtung auf Grund der angegebenen Formel ein Urteil gewinnen. Eine solche Skala ist rein dynamisch.

Stellt man nun zwei Systeme von Parallelepipeden in zwei zueinander senkrechten Ebenen auf, so kann man einen Schluß auf die Richtung, aus der der betreffende Stoß kam, ziehen.

Außer durch plötzliche Stöße können jedoch die Parallelepipede auch von rythmischen Bodenbewegungen umgeworfen werden.

Setzen wir voraus, daß die Verschiebung x dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leistet

$$x = x_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_p} + \delta\right).$$

Digitized by Google

Die maximale Beschleunigung der Bewegung ist

$$w_m = \frac{4\pi^2 x_m}{T_p^2}. \tag{25}$$

Die Theorie der Stabilität der Parallelepipede auf einer beweglichen Unterlage, die regelmäßige Sinusschwingungen ausführt, bietet gewisse Schwierigkeiten, aber die Versuche, welche mit einer kleinen beweglichen Plattform angestellt wurden, haben gezeigt, daß es für jedes gegebene Parallelepiped, das durch die bestimmten Größen h und c charakterisiert wird, eine bestimmte maximale Beschleunigung der Bodenbewegung w_m gibt, bei welcher es umkippt. Die Stabilität des Parallelepipeds hängt nicht von den einzelnen absoluten Werten x_m und T_p ab, sondern von einer Kombination dieser Größen, die die maximale Beschleunigung charakterisiert. Außerdem haben die Versuche gezeigt, daß dieser Grenzwert w_m, bei welchem das Parallelepiped umkippt, nur von dem Verhältnis $\frac{c}{h}$ abhängt. Diese Abhängigkeit wird durch folgende, sehr einfache Formel ausgedrückt:

$$\frac{c}{h} = 0{,}0012\, w_m, \tag{26}$$

wo w_m in Einheiten des absoluten CGS-Systems ausgedrückt ist.

Nach dieser Formel könnte man wiederum eine besondere Skala von Parallelepipeden aufstellen, nach deren Umfallen man beurteilen kann, zwischen welchen Grenzen die maximale horizontale Beschleunigung der Bodenbewegung in der gegebenen Richtung liegt. Zwei Systeme von Parallelepipeden, die in zwei zueinander senkrechten Ebenen aufgestellt sind, können einen Hinweis darauf geben, in welcher Richtung die entsprechende seismische Oberflächenwelle sich fortpflanzt.

Die Beobachtungen mit solchen Parallelepipeden können natürlich keinen Anspruch auf große Genauigkeit machen, denn wir können in der angedeuteten Weise nur die Grenzen, zwischen denen die gesuchte Größe der maximalen Beschleunigung der Bodenbewegung eingeschlossen ist, ermitteln. Jedoch gibt dieses System von Parallelepipeden eine rationelle, rein dynamische Skala für die Schätzung der Stärke des Bebens bei makroseismischen Erscheinungen wenigstens in bezug auf die horizontalen Bodenverschiebungen. Jedenfalls ist eine solche Skala viel zuverlässiger als eine beliebige bedingte Skala, wo die Schätzung der Intensität des Bebens nach den Graden der Zerstörung und ähnlichen Wirkungen des Bebens erfolgt.

Die Frage nach der maximalen Beschleunigung der Bodenbewegung bei Beben hat in den seismischen Gebieten eine große praktische Bedeutung, denn wenn man die verschiedenen charakteristischen Eigentümlichkeiten der Bodenbewegung während der Beben genau kennen gelernt hat, so kann man mit viel größerer Sicherheit rationelle Regeln für die Ausführung von Bauten jeder Art in Gebieten geben, die oft dem zerstörenden Einflusse von Beben unterworfen sind.

Digitized by Google

Fünftes Kapitel.

Theorie des Horizontalpendels.

§ 1. Ableitung der Grunddifferentialgleichung der Bewegung des Pendels.

Als Beispiel eines Seismographen nehmen wir ein Horizontalpendel und wollen eingehend die Theorie seiner Bewegung betrachten. Die Sätze und Methoden, die wir im folgenden ableiten werden, können auch auf alle anderen Arten von Seismographen ausgedehnt werden. Es kann somit die Theorie des Horizontalpendels bis zu einem gewissen Grade als die allgemeine Theorie der seismischen Instrumente betrachtet werden.

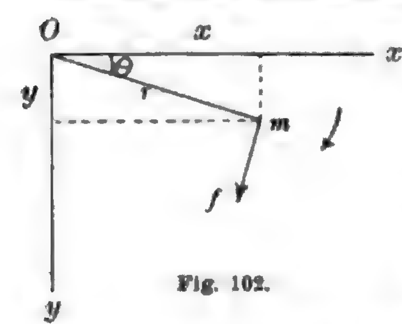


Fig. 102.

Das Horizontalpendel wird durch einen festen Körper gebildet, der eine bestimmte Drehungsachse besitzt.

Bevor wir in die Betrachtung der Theorie der Bewegung des Horizontalpendels eintreten, wollen wir das Grundtheorem der Mechanik, nach dem sich die Bewegung eines jeden festen Körpers um eine unbewegliche Achse vollzieht, ableiten.

Zu diesem Zweck nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem x, y, z an, in dem die unbewegliche Achse des festen Körpers in die Richtung der z-Achse fällt.

Auf die Masse m, mit den Koordinaten x, y und z, wirke eine äußere Kraft F. Es seien die Projektionen dieser Kraft auf die Koordinatenachsen X, Y, Z.

Dann erhalten wir auf Grund der Sätze der Dynamik

$$\left.\begin{aligned} m\frac{d^2x}{dt^2} &= X + R_x \\ m\frac{d^2y}{dt^2} &= Y + R_y \\ m\frac{d^2z}{dt^2} &= Z + R_z \end{aligned}\right\}. \tag{1}$$

R_x, R_y, R_z sind die Projektionen der Reaktionen. Führt man diese Reaktionen ein, so können wir m als frei betrachten.

Die Koordinate z ändert sich nicht mit der Zeit.

Statt der rechtwinkligen Koordinaten x und y wollen wir Polarkoordinaten r und θ einführen (Fig. 102).

Die Richtung der Drehung werden wir als positiv betrachten, wenn sie mit der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers zusammenfällt.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

Digitized by Google

Bei der Drehung des Körpers bleibt r unverändert; die einzige Variable ist θ.

Aus den Gleichungen (2) finden wir:

$$\frac{dx}{dt} = -r\sin\theta\frac{d\theta}{dt},$$

$$\frac{dy}{dt} = \quad r\cos\theta\frac{d\theta}{dt}.$$

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2} &= -r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\end{aligned}\right\}. \tag{3}$$

Wir wollen nun das Moment der totalen Kraft f, die senkrecht zu dem Arm r in der Richtung der zunehmenden θ wirkt, aufsuchen.

Da die Reaktion in der Ebene yOx längs der Linie mO gerichtet ist, so ist die Projektion dieser Kraft auf die zu mO senkrechte Richtung gleich Null.

Wir erhalten daher

$$\begin{aligned}fr &= [Y\cos\theta + X\cos(90+\theta)]\,r\\ &= Yr\cos\theta - Xr\sin\theta\\ &= Yx - Xy.\end{aligned}$$

Auf Grund der Gleichungen (1) finden wir

$$f.r = m\left[x\frac{d^2y}{dt^2} - y\frac{d^2x}{dt^2}\right].$$

Setzt man nun hierin die entsprechenden Ausdrücke aus den Gleichungen (2) und (3) ein, so ergibt sich

$$fr = m\left[r\cos\theta\left\{-r\sin\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + r\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\} - r\sin\theta\left\{-r\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - r\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2}\right\}\right]$$

$$= mr^2\cdot\frac{d^2\theta}{dt^2}.$$

Diese Gleichung behält ihre Gültigkeit für eine jede Masse m; da aber $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ für alle Punkte gleich ist, so erhalten wir schließlich

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}\cdot\Sigma mr^2 = \Sigma fr.$$

Σmr^2 ist das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehungsachse. Wir bezeichnen es mit K.

Σfr ist das Moment aller äußeren Kräfte in bezug auf dieselbe Drehungsachse. Bezeichnen wir es mit $\mathfrak{M}$.

Digitized by Google

Dann haben wir

$$K\frac{d^2\theta}{dt^2} = \mathfrak{M}. \tag{4}$$

Diese Formel stellt das Grundtheorem der Mechanik dar, daß bei der Drehung eines festen Körpers um eine unbewegliche Achse das Trägheitsmoment des Körpers in bezug auf die Drehungsachse, multipliziert mit der Winkelbeschleunigung, dem Momente aller wirkenden äußeren Kräfte gleich ist.

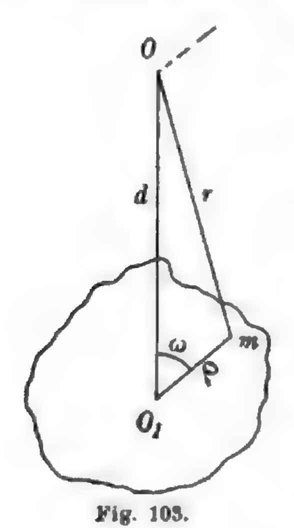


Fig. 103.

Wir wollen noch einen wichtigen Hilfssatz, der sich auf die Trägheitsmomente bezieht, ableiten.

Nehmen wir an, daß K das Trägheitsmoment eines Körpers, dessen totale Masse M ist, in bezug auf die gegebene Achse O ist, und K_0 das Trägheitsmoment in bezug auf die zu der gegebenen parallel laufenden Achse O_1, die durch den Schwerpunkt des Körpers geht. Den Abstand dieser Achsen bezeichnen wir mit d (Fig. 103).

Dann ist

$$K = K_0 + Md^2. \tag{5}$$

Denn es ist

$$r^2 = d^2 + \varrho^2 - 2d\varrho\cos\omega,$$

$$\Sigma mr^2 = d^2\cdot\Sigma m + \Sigma m\varrho^2 - 2d\,\Sigma m\varrho\cos\omega.$$

$$\Sigma mr^2 = K$$

$$\Sigma m = M$$

$$\Sigma m\varrho^2 = K_0.$$

Es ist weiter

$$\Sigma m\varrho\cos\omega = O,$$

denn nach der Voraussetzung geht die Achse O_1 durch den Schwerpunkt.

Folglich ist

$$K = K_0 + Md^2,$$

Diesen Satz werden wir bei der Berechnung der reduzierten Länge eines schweren Pendels, wie es oben beschrieben ist, benutzen, denn für ein solches ist die Bestimmung der reduzierten Länge aus direkten Beobachtungen sehr kompliziert.

Wir wollen nun die Differentialgleichung der Eigenbewegung des Horizontalpendels für die Ruhelage des Bodens ableiten und nehmen zu dem Zweck ein Koordinatensystem an, das eine feste Lage im Raume hat.

Die x-Achse richten wir nach Norden, die y-Achse nach Osten und die z-Achse nach dem Zenit.

Im Gleichgewichtszustande des Pendels möge ein Schwerpunkt B in der zy-Ebene liegen, wie es in Fig. 104 dargestellt ist. Die Drehungsachse des Pendels OP liegt ebenfalls in der zy-Ebene und bildet mit der Vertikalen den Winkel i.

Digitized by Google

Für den Anfangspunkt O nehmen wir den Schnittpunkt der Senkrechten aus dem Schwerpunkte des Pendels auf die Drehungsachse.

Wenn der Arm des Horizontalpendels in der Ebene des ersten Vertikals liegt, so kann das Pendel nur auf solche Bodenverrückungen reagieren, welche zur x-Achse parallel sind, d. h. es registriert die Bodenverschiebungen, die im Meridian vor sich gehen. Das Pendel kann also aus seiner Gleichgewichtslage nicht durch Verschiebungen, die zur y- oder z-Achse parallel sind, herausgebracht werden, wenn wir von den früher erwähnten longitudinalen Nebenschwingungen desselben absehen, die bei der Zöllnerschen Aufhängung stattfinden, die aber durch die Stützspitze ausgeschlossen werden können.

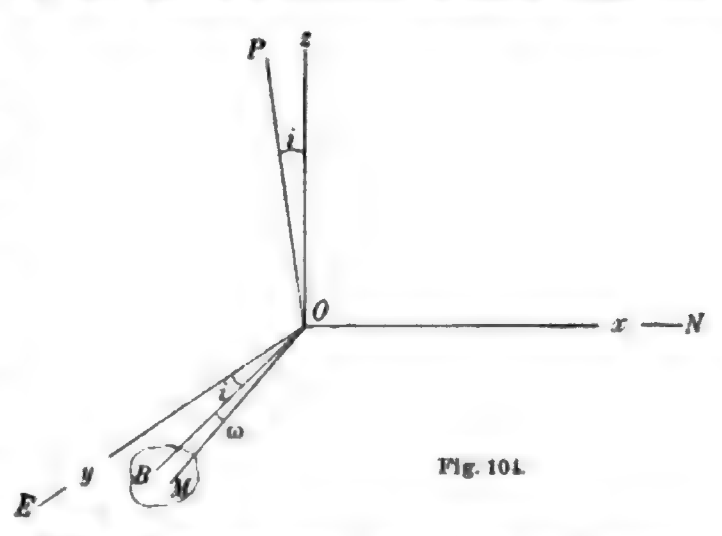


Fig. 104.

Es bezeichne nun in Fig. 105 der Punkt C die Richtung der x-Achse, der Punkt A die Richtung der y-Achse und der Punkt Z die der z-Achse.

Der Bogen des größten Kreises ZC entspricht dann der zx-Ebene, der Bogen AC der xy-Ebene und der Bogen ZA der yz-Ebene.

Die Richtung der Drehungsachse projiziert sich in P und die Richtung zum Schwerpunkt in B, wobei der Bogen $PZ = AB = i$ ist.

Ein jeder Punkt des Horizontalpendels bewegt sich, wenn das Pendel schwingt, in der zur Drehungsachse P senkrechten Ebene, folglich wird die Lage dieser Ebene durch den Bogen des größten Kreises definiert, bei dem jeder Punkt um 90° von P absteht. Dieser Bogen ist DBC; er stellt also die Lage der Bewegungsebene eines beliebigen Punktes des Horizontalpendels dar, ganz gleich, ob dieser Punkt außerhalb oder innerhalb des Schwerpunktes B liegt.

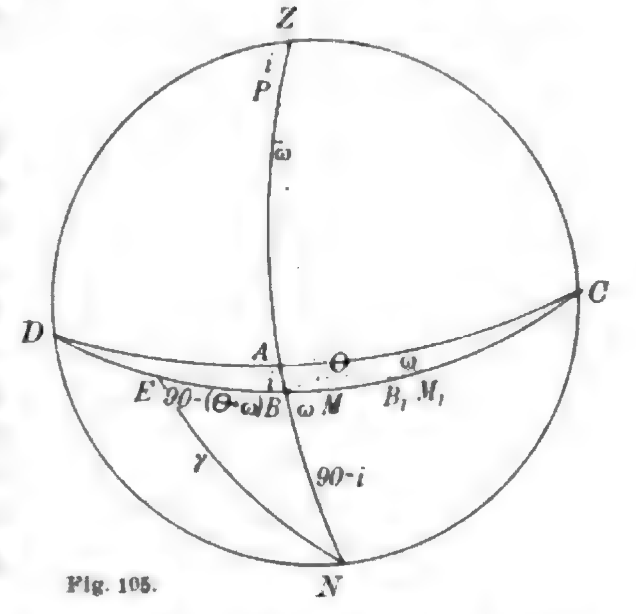


Fig. 105.

Wir wollen nun einen willkürlichen Punkt M des gegebenen festen Körpers wählen und uns in diesem Punkte die Masse m konzentriert denken.

Wir legen jetzt durch die Drehungsachse OP des Pendels (Fig. 104) zwei Ebenen, die eine PB durch den Schwerpunkt B und die andere PM durch den gegebenen Punkt M und nennen den Winkel zwischen diesen Ebenen ω. In Fig. 105 ist also $\omega = \breve{BM}$.

Je nachdem der Punkt M rechts oder links von B liegt, ist ω positiv oder negativ.

Die Länge der Senkrechten aus dem Punkte M auf die Drehungsachse bezeichnen wir mit r und die Länge der Senkrechten aus dem Schwerpunkte B auf dieselbe Achse mit r_0.

Im Gleichgewichtszustande des Pendels fällt die Richtung des Schwerpunktes mit dem Punkte B zusammen.

Denken wir uns nun, daß das Pendel um den Winkel θ nach rechts abgelenkt ist; wir betrachten in diesem Falle θ als positiv. Dann verlegt sich B nach B_1 und M nach M_1.

Das Trägheitsmoment des Systems in bezug auf die Drehungsachse ist

$$K = \Sigma m r^2, \tag{6}$$

und die Winkelbeschleunigung

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \theta''.$$

Um das Grundtheorem der Mechanik auf die Drehung eines festen Körpers um eine unbewegliche Achse anzuwenden (Gleichung (4)), müssen wir das Moment $\mathfrak{M}$ der äußeren Kräfte in bezug auf die Drehungsachse berechnen.

Auf die Masse m wirkt die äußere Schwerkraft mg, wo g die Beschleunigung der Schwerkraft ist. Diese Kraft ist vertikal nach unten, also von Z nach N in Fig. 105 gerichtet. Man hat nun die Projektion dieser Kraft auf die Richtung, die zu r senkrecht ist, zu nehmen, d. h. auf die Richtung, welche mit der Richtung der Senkrechten aus dem Punkte M auf die Drehungsachse den Winkel von 90° bildet und die mit der Ebene der Bewegung der Masse m zusammenfällt. Diese Richtung geht in unserer Figur durch den Punkt E, der um 90° von dem Punkte M_1 absteht, also

$$\breve{EM_1} = 90^\circ.$$

Der Winkel zwischen der Richtung der Schwerkraft und der Richtung zum Punkte E läßt sich durch den Bogen $\breve{EN} = \gamma$ ausdrücken.

Also ist das gesuchte Moment der Schwerkraft

$$mg\cos\gamma \cdot r.$$

Es erübrigt jetzt nur den Ausdruck für $\cos\gamma$ zu bilden.

Aus dem sphärischen Dreieck EBN, in dem der Winkel B ein rechter ist, haben wir

$$\cos\gamma = \cos\breve{EB} \times \cos\breve{BN}.$$

Es ist aber

$$\breve{EB} = 90^\circ - (\theta + \omega)$$

und

$$BN = 90^\circ - i;$$

folglich

$$\cos\gamma = \sin i \cdot \sin(\theta + \omega). \tag{7}$$

Das Moment der Schwerkraft strebt immer das Pendel in seine Ruhelage zurückzuführen, d. h. es strebt immer die vorhandene Winkelbeschleunigung zu vermindern; das Moment ist somit negativ.

Digitized by Google

Wir haben also für das volle Moment der äußeren Kräfte in bezug auf die Drehungsachse folgenden Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = -\Sigma mgr \sin i \cdot \sin(\theta + \omega), \tag{8}$$

wo die Summation auf alle beweglichen Massen des Pendels auszudehnen ist.

Für die verschiedenen Punkte des gegebenen festen Systems sind g, i und θ gleich, und deshalb

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \cdot [\sin\theta \cdot \Sigma mr \cos\omega + \cos\theta \cdot \Sigma mr \sin\omega].$$

Hier ist $r\cos\omega$ die Projektion der Länge r auf die Ebene, welche durch den Schwerpunkt des Pendels und die Drehungsachse geht, folglich

$$\Sigma mr \cos\omega = Mr_0. \tag{9}$$

Andererseits ist $r\sin\omega$ der Abstand des Punktes m von derselben Ebene und infolgedessen ist $\Sigma mr \sin\omega$ nach dem Momentensatz gleich Null, weil die gegebene Ebene gerade durch den Schwerpunkt des Systems geht.

Also

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \cdot \sin\theta \cdot Mr_0,$$

oder, wenn man sich nur auf kleine Drehungswinkel beschränkt, mit welchen wir in der praktischen Seismometrie nur zu tun haben

$$\mathfrak{M} = -g \sin i \cdot Mr_0 \cdot \theta.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Grundgleichung (4) ein, so ergibt sich

$$\theta'' + g \sin i \cdot \frac{Mr_0}{K} \cdot \theta = 0.$$

$K = \Sigma mr^2$, durch Mr_0 dividiert, ist eine Länge, die wir mit l bezeichnen wollen.

Andererseits kann man K folgendermaßen ausdrücken:

$$K = M\varrho^2,$$

wo ϱ der Trägheitsradius ist.

Folglich

$$l = \frac{K}{Mr_0} = \frac{\varrho^2}{r_0}, \tag{10}$$

wo r_0 der Abstand des Schwerpunktes des Systems von der Drehungsachse ist.

l heißt die **reduzierte Pendellänge**.

Also erhalten wir folgende endgültige Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels bei Abwesenheit einer Dämpfung

$$\theta'' + \frac{g \sin i}{l}\theta = 0. \tag{11}$$

Wir wollen nun ihr allgemeines Integral aufsuchen.

Digitized by Google

Dazu setzen wir

$$n^2 = \frac{g \sin i}{l},$$

dann ist

$$\theta'' + n^2\theta = 0.$$

Auf Grund der Ableitungen des II. Kapitels (Formel (23), (24) und (26)) lautet das allgemeine Integral dieser Gleichung:

$$\theta = A \cos nt + B \sin nt,$$

wo A und B zwei willkürliche Konstanten sind.

Die Bewegung des Pendels ist also eine periodische, die dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leistet, wobei die volle Periode T der Schwingungen in folgender Weise ausgedrückt werden soll

$$T = \frac{2\pi}{n} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g \sin i}}. \tag{12}$$

Für kleine Werte von i kann die Periode der Schwingungen des Pendels sehr groß sein.

Ist $i = 90^0$, so verwandelt sich unser Horizontalpendel in ein einfaches Vertikalpendel mit einer horizontalen Drehungsachse.

Die zugehörige Schwingungsperiode ist

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{13}$$

Wir sind also zu der bekannten Formel für die Periode eines einfachen Vertikalpendels gelangt und es stellt l nichts anderes dar, als die Länge eines mathematischen Pendels mit derselben Periode wie das gegebene physische Pendel; die Drehungsachse ist hierbei horizontal.

Für die Horizontalpendel mit Zöllnerscher Aufhängung, die für die russischen seismischen Stationen ersten Ranges bestimmt sind, ist l ungefähr gleich 120 mm.

Wir wollen nun sehen, wie groß die Neigung der Drehungsachse i sein muß, damit die Eigenperiode der Schwingungen eines solchen Horizontalpendels gleich 25 Sek. wird.

Nimmt man als Beschleunigung der Schwerkraft g in St. Petersburg die Größe 9819 mm an, so findet man nach der Formel (12)

$$\sin i = \frac{4\pi^2}{T^2} \cdot \frac{l}{g} = \frac{4\pi^2}{625} \cdot \frac{120}{9819}$$

oder

$$i = 0^0 2' 39'',2.$$

Wir sehen also, daß der Neigungswinkel der Achse sehr klein ist. Infolgedessen können wir in der weiteren Ausführung der Theorie des Horizontalpendels in allen Formeln setzen

$$\sin i = i$$

und

$$\cos i = 1.$$

Digitized by Google

Es sei hier noch bemerkt, daß ein einfaches Vertikalpendel mit derselben Periode von 25 Sek. eine sehr große Länge haben muß. Setzt man nämlich $i = 90^0$, so findet man $l = 155{,}5$ m.

Mit Hilfe des Horizontalpendelprinzips ist also leicht ein Seismograph mit sehr langer Periode der Eigenschwingungen zu konstruieren.

Wir wollen nun die Bewegung des Horizontalpendels in dem Falle betrachten, wenn der Boden eine Verschiebung parallel zur x-Achse erfährt.

Die Größe dieser Verschiebung bezeichnen wir mit x, wobei x eine Funktion der Zeit t ist, also

$$x = f(t). \tag{14}$$

Die Verschiebungen, welche den Achsen y und z parallel sind, haben keinen Einfluß auf die Ruhelage des Pendels.

Wir wollen nun ein anderes Koordinatensystem ξ, η, ζ annehmen, welches mit dem Pendelgestell verbunden ist und welches mit dem System x, y, z zusammenfällt, wenn der Boden, auf welchem das Pendel steht, sich in Ruhe befindet. Die Koordinatenachsen x, y, z haben im Raume eine feste Lage und in bezug auf diese bestimmen wir die Bodenbewegung.

Verschiebt sich der Boden um die Größe x, so verschieben sich auch um dieselbe Größe das Pendel mit dem Gestell und somit auch die Koordinatenachsen ξ, η, ζ. Das, was wir unmittelbar beobachten können, ist nur die relative Bewegung des Horizontalpendels in bezug auf die Achsen ξ, η, ζ.

Im Moment der Verschiebung ist die zugehörige Beschleunigung der Bodenbewegung $\frac{d^2x}{dt^2} = x''$, das Pendel ändert jedoch wegen seiner Trägheit nicht sofort seine Lage im Raume. Bei einer plötzlichen Verschiebung nach rechts wird das Pendel in bezug auf das Gestell nach links abgelenkt. Wenn man die Bewegung des Pendels in bezug auf die beweglichen Achsen ξ, η, ζ betrachtet, so ist eine solche Beschleunigung der Bewegung des ganzen Systems nach rechts dem gleichbedeutend, als ob der Masse m infolge der Trägheit die Kraft mx'' hinzugefügt ist, die nach der negativen Seite von x hin gerichtet ist. Führt man diese Kraft ein, so kann man direkt unser Grundtheorem der Mechanik von der Drehung eines festen Körpers um eine unbewegliche Achse (Formel (4)) auf den Fall des Horizontalpendels auf einer beweglichen Unterlage anwenden.

Ist das Pendel im gegebenen Moment um den Winkel θ abgelenkt, so bildet die Richtung der Ebene, die durch die Drehungsachse und die Masse m geht, mit der Ebene der Gleichgewichtslage des Pendels zOy den Winkel $\theta + \omega$.

Die Trägheit mx'' wirkt in der Richtung der negativen x (wenn $x'' > 0$), und deswegen ist die Projektion dieser Kraft auf die Richtung senkrecht zum Arm r gleich

$$mx'' \cos(\theta + \omega),$$

und das entsprechende Moment

$$- mr \cos(\theta + \omega) \cdot x''.$$

Die Größe x'' ist für alle Punkte des gegebenen festen Körpers dieselbe.

Digitized by Google

Es kommt zum Moment der Schwerkraft noch das Trägheitsmoment hinzu; folglich ist das totale Moment aller wirkenden Kräfte (Formel (8))

$$\mathfrak{M} = -gi\Sigma mr\sin(\theta + \omega) - x''\Sigma mr\cos(\theta + \omega).$$

Mit Rücksicht darauf, daß

$$\Sigma mr\cos\omega = Mr_0$$

und

$$\Sigma mr\sin\omega = 0$$

ist, haben wir

$$\mathfrak{M} = -giMr_0\sin\theta - x''Mr_0\cos\theta.$$

Beschränkt man sich auf kleine Ablenkungswinkel θ, d. h. setzt man

$$\sin\theta = \theta$$

und

$$\cos\theta = 1$$

und führt dieses in den gefundenen Ausdruck für $\mathfrak{M}$ in die Formel (4) ein, so hat man mit Rücksicht auf die Beziehung (10)

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\cdot\theta + \frac{x''}{l} = 0. \tag{15}$$

Dies ist die Differentialgleichung des Pendels.

Wir wollen nun den Einfluß der Drehung auf die Ruhelage und auf die Bewegung des Horizontalpendels untersuchen.

Die Drehung um die x-Achse (φ) hat gar keinen Einfluß auf die Ruhelage des Pendels.

Wir wollen nun aber sehen, was eine geringe Drehung ψ um die y-Achse bewirkt. Diese Drehung entspricht einer Neigung der Oberfläche um denselben Winkel ψ der x-Achse. Wie früher betrachten wir ψ als positiv, wenn die Erdoberfläche rechts von der zOy-Ebene sinkt und links steigt.

Wir setzen voraus, daß andere Bodenbewegungen nicht vorhanden sind.

Fig. 106.

Infolge dieser Drehung um die y-Achse ändert das Pendel seine Gleichgewichtslage in bezug auf das Stativ und wird um den Winkel α abgelenkt, den wir jetzt zu bestimmen haben. Wir setzen hierbei voraus, daß i und ψ sehr klein sind und vernachlässigen daher die Glieder höherer Ordnung.

Digitized by Google

Bei der Drehung um die y-Achse, vgl. Fig. 106, verlegt sich die Drehungsachse des Pendels von P nach P', wobei der Winkel PAP' gleich ψ ist und der Bogen $\widehat{AP} = \widehat{AP'} = 90 - i$.

Aus dem sphärischen Dreieck PAP' ergibt sich

$$\widehat{PP'} = \psi \cdot \cos i = \psi.$$

Bezeichnet man ferner den Winkel PZP' mit β, so ergibt sich aus dem Dreieck PZP'

$$\widehat{PP'} = \beta \sin i = \beta i.$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke für $\widehat{PP'}$, so findet man, daß

$$\beta = \frac{\psi}{i}\,. \tag{16}$$

Der Bogen des größten Kreises $P'Z$ entspricht der Ebene, welche durch die neue Lage der Drehungsachse und durch die Richtung der Lotlinie geht, d. h. der neuen Ebene der Gleichgewichtslage des Horizontalpendels. Das Pendel wird also infolge der Neigung ψ von der früheren Ruhelage um den Winkel $\alpha = BB_0$ abgelenkt.

Infolge der Kleinheit von ψ und β können wir in erster Annäherung in dem sphärischen Dreieck $\widehat{ZB} = \widehat{ZB_0}$ setzen. Dann ist

$$\alpha = \beta \sin (90 + i) = \beta \cos i = \beta.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (16) ein, so erhält man

$$\alpha = \frac{\psi}{i}\,. \tag{17}$$

Diese Formel zeigt, daß für kleine Werte des Neigungswinkels i der Drehungsachse des Pendels, d. h. für lange Perioden T, das Horizontalpendel ein äußerst empfindlicher Apparat für die Registrierung von Neigungen des Bodens wird, oder was dasselbe bedeutet, für Änderungen der Richtung der Lotlinie.

Wir nehmen z. B. den früher angeführten Wert $i = 0^0\,2'\,39'',2$.

Im absoluten Maß ist

$$i = \frac{1}{1295},$$

folglich

$$\alpha = 1295 \cdot \psi.$$

Die Grenzen der Genauigkeit in der Bestimmung des Ablenkungswinkels des Horizontalpendels von der Gleichgewichtslage bei der Anwendung einer direkten optischen Registrierung haben wir früher auf $2^1/_2''$ geschätzt. Wir können somit im vorliegenden Falle als Grenze für die Bestimmung des Neigungswinkels des Bodens ψ oder der Änderung der Richtung der Lotlinie $\frac{2{,}5''}{1295}$ oder rund $0'',002$ annehmen.

Digitized by Google

Diese Zahl zeigt uns anschaulich die außerordentliche Empfindlichkeit des Horizontalpendels. Vergrößert man die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels, so erhält man eine noch größere Genauigkeit der Beobachtungen. Das Horizontalpendel ist somit ein sehr geeigneter Apparat für die Untersuchung der Deformationen der Erde unter dem Einfluß der Attraktion der Sonne und des Mondes, da es sich hierbei um die Messung sehr kleiner Änderungen der Lotrichtung handelt.

Wir wollen nun untersuchen, wie die Bodenneigung ψ die Gleichung der Bewegung des Horizontalpendels beeinflußt.

Die Neigung ψ ändert die Gleichgewichtslage des Pendels, indem sie den Punkt B nach B_0 verlegt (Fig. 106), erteilt aber an und für sich dem Pendel keine Beschleunigung.

Setzen wir nun voraus, daß das Pendel von seiner neuen Ruhelage um den Winkel $B_0B_1 = \theta_1$ abgelenkt worden ist; das, was wir unmittelbar beobachten, ist der Winkel $\theta = BB_1$.

Folglich ist

$$\theta_1 = \theta - \alpha. \tag{18}$$

Für die Berechnung des Momentes der Schwerkraft, welche auf eine willkürliche Masse m im Punkte M wirkt, können wir Formeln wie vorher benutzen, nur mit dem Unterschiede, daß wir statt der Ablenkungen θ von der anfänglichen Ruhelage nun die Ablenkungen θ_1 von der neuen Ruhelage zu nehmen haben.

Dann ist das resultierende Moment der Schwerkraft

$$-gi\,\Sigma mr \sin(\theta_1 + \omega),$$

und das Trägheitsmoment, bei einer Verschiebung parallel zur x-Achse

$$-x''\,\Sigma mr \cos(\theta + \omega).$$

Für das totale Moment ergibt sich wie vorher

$$\mathfrak{M} = -gi \cdot Mr_0\theta_1 - x''Mr_0. \tag{19}$$

Wenn man hier θ_1 durch den entsprechenden Ausdruck aus der Formel (18) ersetzt, so erhält man die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\cdot(\theta - \alpha) + \frac{x''}{l} = 0.$$

Mit Rücksicht auf die Beziehung (17) können wir diese Gleichung in folgender Form darstellen

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\,\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0. \tag{20}$$

Wir wollen noch betrachten, welchen Einfluß die Drehung des Bodens um die vertikale Achse z auf die Bewegung des Pendels hat. Den Drehungswinkel bezeichnen wir mit χ, wobei wir nach der Annahme χ positiv zählen,

Digitized by Google

wenn wir die z-Achse entlang nach dem Koordinatenanfang sehen und die Drehung in der Richtung der Bewegung des Uhrzeigers geschieht.

Die Winkelgeschwindigkeit der Drehung des Apparates mit dem Stativ um die z-Achse ist $\frac{d\chi}{dt} = \chi'$, und die Winkelbeschleunigung $\frac{d^2\chi}{dt^2} = \chi''$.

Irgendein Punkt in der Entfernung r von der Drehungsachse des Pendels, oder, was bei der vorausgesetzten Kleinheit des Neigungswinkels i dasselbe ist, von der z-Achse, hat die lineare Beschleunigung $r\chi''$. Diese Beschleunigung ist für einen beliebigen Punkt M immer senkrecht zu dem Arm r gerichtet.

Um die relative Bewegung des Pendels kennen zu lernen, muß man eine neue, von der Trägheit herrührende Kraft $mr\chi''$ einführen.

Das Moment dieser Kraft für die Masse m ist

$$mr^2\chi''.$$

Diese Kraft wirkt in der Richtung des zunehmenden Winkels θ (für $\chi'' > 0$). Da χ'' für alle Punkte des Pendels gleich ist, so ist das totale ergänzende Moment dieser Trägheitskraft

$$\chi'' \Sigma mr^2 = K \cdot \chi''.$$

Fügt man diese Größe dem früher abgeleiteten Ausdruck des Momentes $\mathfrak{M}$ hinzu und setzt man die entsprechende Größe in die Grundformel (4) ein, so erhält man

$$\theta'' + \frac{gi}{l}\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = \chi''. \tag{21}$$

In den vorhergehenden Ableitungen haben wir die besonderen Kräfte, welche der Bewegung des Pendels Widerstand leisten, nicht berücksichtigt, wie z. B. die Reibung; wir werden sie jetzt berücksichtigen und in den allgemeinen Ausdruck für das Moment $\mathfrak{M}$ einführen.

Auf die Natur dieser Kräfte wollen wir nicht eingehen, sondern nur annehmen, daß das entsprechende Moment der Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Pendels $\frac{d\theta}{dt} = \theta'$ proportional ist. Die letztere Bedingung wird, wie wir früher gesehen haben, bei der magnetischen Dämpfung streng erfüllt. Da diese Kräfte der Bewegung des Pendels immer entgegenwirken, so ist ihr Moment negativ und folglich kommt das entsprechende Glied in die linke Seite der Gleichung (21) mit dem Vorzeichen $+$.

Bezeichnet man den entsprechenden Koeffizienten von θ' mit 2ε, wo ε die Dämpfung charakterisiert, so ergibt sich folgende endgültige Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = \chi'', \tag{22}$$

wo

$$n^2 = \frac{gi}{l}. \tag{23}$$

Digitized by Google

Die Formel (22) zeigt, daß auf die Bewegung eines in der EW-Richtung aufgestellten Horizontalpendels drei Elemente der Bodenbewegung Einfluß haben, und zwar: erstens, Verschiebungen der x-Achse parallel, zweitens, Drehungen um die y-Achse und drittens, Drehungen um die z-Achse. Die letztgenannte Drehung können wir für ferne Beben gleich Null setzen, brauchen sie also nicht weiter zu betrachten.

Wir sehen also, daß die Bewegung des Horizontalpendels, allgemein genommen, nicht nur von x'' oder nur von ψ, sondern von der Kombination dieser beiden Größen $x'' - g\psi$ abhängt,

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0. \tag{24}$$

Streng genommen bietet also ein Horizontalpendel nicht die Möglichkeit, die horizontalen Bodenverschiebungen unabhängig von den Neigungen zu bestimmen, denn die wahre Bewegung des Pendels wird immer durch gemeinschaftliche Wirkung dieser beiden Faktoren bedingt. Da aber bei den Fernbeben die Bodenneigungen infolge der großen Länge der Oberflächenwellen nur ganz unbedeutend sind, so können wir in der Mehrzahl der Fälle den Einfluß der Neigungen ganz vernachlässigen und daher die Grunddifferentialgleichung der Bewegung des Pendels auf folgende einfache kanonische Form bringen

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0. \tag{25}$$

In diesem Falle kann also das Horizontalpendel speziell zur Untersuchung der Bodenschwingungen dienen, die zur x-Achse parallel sind. Ein anderes im Meridian aufgestelltes Pendel gestattet die Bodenverschiebungen parallel zur y-Achse zu untersuchen. Folglich geben zwei solche Pendel die Möglichkeit, die horizontalen Bodenverschiebungen bei Fernbeben nach jeder Richtung hin zu ermitteln.

Die Gleichung (25) wird uns zur Grundlage für weitere Folgerungen und Schlüsse dienen.

§ 2. Die Untersuchung der Eigenbewegung des Pendels.

Setzen wir nun voraus, daß der Boden ruht, so ist $x'' = 0$.

Dann erhält die Differentialgleichung der Eigenbewegung des Pendels folgende Gestalt:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = 0; \tag{26}$$

ε und n^2 sind zwei charakteristische Konstanten des Apparates.

Für das Horizontalpendel wird die Größe der Konstante n^2 nach der Formel (23) durch $n^2 = \frac{gi}{l}$ definiert, für ein einfaches Vertikalpendel mit horizontaler Drehungsachse ist $n^2 = \frac{g}{l}$. Also umfaßt die Gleichung (26) im wesentlichen die Theorie der Eigenbewegung beider Pendeltypen.

Die Gleichung (26) ist eine einfache lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

Digitized by Google

Um dieselbe zu integrieren, setzen wir in bekannter Weise

$$\theta = e^{-\alpha t}.$$

Dann ist

$$\theta' = -\alpha e^{-\alpha t}$$

und

$$\theta'' = +\alpha^2 e^{-\alpha t}.$$

Setzt man diese Größen in die Gleichung (26) ein, so ergibt sich folgende quadratische Gleichung:

$$\alpha^2 - 2\varepsilon\alpha + n^2 = 0.$$

Diese Gleichung hat zwei Wurzeln α_1 und α_2

und

$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 &= +\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \\ \alpha_2 &= +\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 - n^2} \end{aligned}\right\}. \tag{27}$$

Dann ist das allgemeine Integral der Gleichung (26)

$$\theta = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}, \tag{28}$$

wo A_1 und A_2 zwei willkürliche Integrationskonstanten sind, die durch die Anfangsbedingungen der Bewegung, d. h. durch die Werte θ und θ' zur Zeit $t = 0$ bedingt sind.

Von der Richtigkeit der Formel (28) kann man sich durch Einsetzen des Ausdruckes θ in die Gleichung (26) überzeugen.

Man muß hier nun zwei Fälle unterscheiden.

Erster Fall: $\varepsilon > n$.

Dann sind α_1 und α_2 beide reell und positiv, wobei $\alpha_1 > \alpha_2$ ist.

Nehmen wir nun an, daß zur Zeit $t = 0$ das Pendel in Ruhe war und daß ihm in demselben Moment ein Stoß gegeben wurde, der ihm die anfängliche Geschwindigkeit θ_0' erteilt hat.

Da

$$\theta' = -[\alpha_1 A_1 e^{-\alpha_1 t} + \alpha_2 A_2 e^{-\alpha_2 t}] \tag{29}$$

ist, so haben wir für die Bestimmung der Konstanten A_1 und A_2 folgende zwei Beziehungen:

$$0 = A_1 + A_2$$

$$-\theta_0' = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,$$

woraus wir finden

$$A_2 = -A_1,$$

$$A_1 = -\frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}$$

und

$$A_2 = +\frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}.$$

Digitized by Google

Folglich ist

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2}\left[e^{-\alpha_2 t} - e^{-\alpha_1 t}\right]. \tag{30}$$

Da $\alpha_1 > \alpha_2$ ist, so nimmt das zweite Glied in der Klammer mit der Zunahme t schneller ab als das erste und θ ist immer positiv.

θ ist gleich Null bei $t = 0$ und bei $t = \infty$.

Wir sehen also, daß in diesem Falle die Bewegung des Pendels eine aperiodische ist.

Eine solche Bewegung ist in Fig. 87 gegeben.

Wir wollen nun den maximalen Winkelausschlag θ_m bestimmen. Der entsprechende Moment t_m ergibt sich aus der Bedingung

$$\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Folglich ist

$$-\alpha_2 e^{-\alpha_2 t_m} + \alpha_1 e^{-\alpha_1 t_m} = 0$$

$$-\alpha_2 e^{(\alpha_1 - \alpha_2) t_m} + \alpha_1 = 0.$$

Hieraus finden wir

$$t_m = \frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) = \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}. \tag{31}$$

Setzt man nun den Wert t_m in die Formel (30) ein, so erhält man:

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[e^{-\alpha_2 \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}} - e^{-\alpha_1 \lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{1}{\alpha_1 - \alpha_2}}}\right]$$

$$= \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\frac{1}{e^{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}} - \frac{1}{e^{\lg\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}}}\right]$$

oder

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left[\left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}} - \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}\right]$$

$$= \frac{\theta_0'}{\alpha_1 - \alpha_2} \cdot \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}\left[1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right]$$

$$= \theta_0' \cdot \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}{\alpha_1 \cdot (\alpha_1)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}},$$

oder schließlich

$$\theta_m = \theta_0' \cdot \frac{(\alpha_2)^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1 - \alpha_2}}}{(\alpha_1)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}}} = \theta_0' \sqrt[\alpha_1 - \alpha_2]{\frac{\alpha_2^{\alpha_2}}{\alpha_1^{\alpha_1}}}. \tag{32}$$

Digitized by Google

Wir wollen nun den Grenzfall betrachten, wenn

$$\varepsilon = n$$

oder

$$\alpha_1 = \alpha_2 = n.$$

Dieser Fall entspricht der Grenze der Aperiodizität.

Dann nimmt die Gleichung (30) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Um die Unbestimmtheit zu vermeiden, setzen wir

$$\alpha_1 = \alpha_2 + \xi,$$

wo ξ eine sehr kleine Größe ist. Wir entwickeln jetzt unter dieser Voraussetzung die Formel (30) und setzen an der Grenze $\xi = 0$:

$$e^{-\alpha_1 t} = e^{-\alpha_2 t} \cdot e^{-\xi t} = e^{-\alpha_2 t}\left[1 - \xi t + \frac{1}{2}\xi^2 t^2 - \cdots\right],$$

folglich

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\xi} e^{-\alpha_2 t}\left[1 - \left\{1 - \xi t + \frac{1}{2}\xi^2 t^2 - \cdots\right\}\right],$$

oder schließlich

$$\theta = \theta_0' \cdot t e^{-nt}. \tag{33}$$

Diese Formel zeigt uns, daß θ immer positiv ist. θ ist gleich Null bei $t = 0$ und $t = \infty$, d. h. es ist auch in diesem Falle die Bewegung des Pendels eine aperiodische.

Der maximale Winkelausschlag θ_m läßt sich nach derselben Methode bestimmen.

Die Bedingung $\frac{d\theta}{dt} = 0$ gibt

$$e^{-nt_m} - nt_m e^{-nt_m} = 0,$$

oder

$$t_m = \frac{1}{n}. \tag{34}$$

Folglich

$$e^{-nt_m} = \frac{1}{e}$$

und

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{ne}. \tag{35}$$

Diese Formel kann man auch aus dem allgemeinen Ausdruck (32) erhalten. Die Lösung dieser Frage bietet eine interessante mathematische Aufgabe.

Zweiter Fall: $\varepsilon < n$.

In diesem Fall sind die Konstanten α_1 und α_2 in der Formel (28) imaginär.

Wir führen folgende Bezeichnung ein:

$$\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}. \tag{36}$$

Digitized by Google

Dann können wir auf Grund der Formeln (27) setzen:

$$\alpha_1 = \varepsilon + \gamma i$$

und

$$\alpha_2 = \varepsilon - \gamma i,$$

wo

$$i = \sqrt{-1}$$

ist. Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (28) ein, so ergibt sich

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[A_1 e^{-\gamma t \cdot i} + A_2 e^{\gamma t \cdot i}].$$

Es ist aber nach der Moivreschen Formel

$$e^{\gamma t \cdot i} = \cos \gamma t + i \sin \gamma t$$

und

$$e^{-\gamma t \cdot i} = \cos \gamma t - i \sin \gamma t.$$

Setzt man diese Größe ein, so erhält man

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[(A_2 + A_1)\cos \gamma t + (iA_2 - iA_1)\sin \gamma t].$$

$(A_2 + A_1)$ und $(iA_2 - iA_1)$ sind zwei willkürliche Konstanten, die wir mit C_1 und C_2 bezeichnen können.

Dann ergibt sich das allgemeine Integral in folgender Gestalt:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t]. \tag{37}$$

Die willkürlichen Konstanten lassen sich wie früher aus den Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmen.

Man überzeugt sich leicht, daß dieser Ausdruck für θ (aus der Formel (37)) tatsächlich der Gleichung der Bewegung des Pendels (Gleichung (26)) für einen beliebigen Moment t und für alle Werte der Konstanten C_1 und C_2 Genüge leistet. Denn aus der Formel (37) finden wir

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}[-\varepsilon C_1 \cos \gamma t - \varepsilon C_2 \sin \gamma t - \gamma C_1 \sin \gamma t + \gamma C_2 \cos \gamma t]$$

oder

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}[(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos \gamma t + (-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\sin \gamma t]. \tag{38}$$

Ferner haben wir

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}[-\varepsilon(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos \gamma t + \varepsilon(\varepsilon C_2 + \gamma C_1)\sin \gamma t$$
$$- \gamma(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\sin \gamma t + \gamma(-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\cos \gamma t]$$

oder

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}[\{-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2 - \gamma^2)C_1\}\cos \gamma t + \{(\varepsilon^2 - \gamma^2)C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1\}\sin \gamma t] \tag{39}$$

Setzt man nun die Ausdrücke für θ, θ' und θ'' aus den Formeln (37), (38) und (39) in die Gleichung (26) ein und faßt man alle Glieder mit den Faktoren $\cos \gamma t$ und $\sin \gamma t$ zusammen, so erhält man

$$[-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2 - \gamma^2)C_1 + 2\varepsilon\gamma C_2 - 2\varepsilon^2 C_1 + n^2 C_1]\cos \gamma t$$
$$+ [(\varepsilon^2 - \gamma^2)C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1 - 2\varepsilon^2 C_2 - 2\varepsilon\gamma C_1 + n^2 C_2]\sin \gamma t = 0$$

Digitized by Google

oder

$$C_1\{n^2-\varepsilon^2-\gamma^2\}\cos\gamma t + C_2\{n^2-\varepsilon^2-\gamma^2\}\sin\gamma t = 0.$$

Da aber auf Grund der Formel (36)

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2$$

ist, so ist die vorige Gleichung für alle Werte von t, C_1 und C_2 identisch gleich Null.

Wir wollen nun die Eigenbewegung des Pendels, die durch Gleichung (37) bestimmt wird, untersuchen.

Zur Bestimmung der Konstanten C_1 und C_2, setzen wir wiederum fest, daß für $t=0$

$$\theta = 0$$

und

$$\theta' = \theta_0'$$

sein soll.

Setzt man in Formel (37) $t=0$, so ergibt sich

$$C_1 = 0.$$

Zur Bestimmung von C_2 benutzen wir Formel (38).

Setzt man darin t und C_1 gleich Null, so erhält man

$$\theta_0' = \gamma C_2$$

oder

$$C_2 = \frac{\theta_0'}{\gamma}.$$

Die Gleichung der Bewegung des Pendels wird dadurch auf folgende Gestalt gebracht:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\gamma}\cdot e^{-\varepsilon t}\sin\gamma t. \tag{40}$$

Wir wollen nun den Charakter dieser Bewegung näher untersuchen.

Zur Zeit $t=0$ ist $\theta=0$. Mit dem Anwachsen von t nimmt θ anfangs zu. Das erste Maximum für θ tritt ein, wenn $\frac{d\theta}{dt}=0$ ist. Den entsprechenden Moment bezeichnen wir mit t_1.

Die Gleichung

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\theta_0'}{\gamma}e^{-\varepsilon t}[-\varepsilon\sin\gamma t + \gamma\cos\gamma t] = 0$$

gibt

$$\operatorname{tg}\gamma t = \frac{\gamma}{\varepsilon} \tag{41}$$

oder

$$t_1 = \frac{1}{\gamma}\operatorname{arctg}\frac{\gamma}{\varepsilon}. \tag{42}$$

Also gibt die erste Wurzel der Gleichung (41) den gesuchten Moment t_1 Den entsprechenden maximalen Winkelausschlag bezeichnen wir mit θ_1.

Digitized by Google

Dann ist

$$\theta_1 = \frac{\theta_0'}{\gamma} e^{-\varepsilon t_1} \sin \gamma t_1 .$$

Andererseits ist

$$\sin \gamma t_1 = \frac{\operatorname{tg} \gamma t}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \gamma t_1}} = \frac{\frac{\gamma}{\varepsilon}}{\sqrt{1 + \frac{\gamma^2}{\varepsilon^2}}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}},$$

wo

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2; \tag{43}$$

folglich

$$\sin \gamma t_1 = \frac{\gamma}{n}$$

und

$$\theta_1 = \frac{\theta_0'}{n} \cdot e^{-\varepsilon t_1}. \tag{44}$$

Wir wollen nun das zweite Maximum θ_2 aufsuchen.

Den entsprechenden Moment bezeichnen wir mit t_2.

t_2 ist die zweite Wurzel der Gleichung (41).

Die Tangente eines jeden Winkels nimmt denselben Wert an, wenn der Winkel um π vergrößert wird, folglich

$$\gamma t_2 = \gamma t_1 + \pi$$

oder

$$t_2 = t_1 + \frac{\pi}{\gamma} .$$

Hieraus folgt, daß

$$\sin \gamma t_2 = \sin(\gamma t_1 + \pi) = -\frac{\gamma}{n}$$

und

$$\theta_2 = -\frac{\theta_0'}{n} \cdot e^{-\varepsilon t_2}$$

ist. Ebenfalls finden wir

$$t_3 = t_2 + \frac{\pi}{\gamma} = t_1 + 2\frac{\pi}{\gamma}$$

und

$$\theta_3 = \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_3} \quad \text{usw.}$$

oder allgemein

$$\theta_k = (-1)^{k+1} \cdot \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_k} \tag{45}$$

wo

$$t_k = t_1 + (k-1)\frac{\pi}{\gamma} . \tag{46}$$

Wir sehen also, daß die maximalen Ausschläge des Pendels abwechselnd positiv und negativ sind, wobei die absolute Größe dieser Amplituden mit der Zeit allmählich abnimmt.

Nehmen wir das Verhältnis der absoluten Größen zweier benachbarter maximalen Amplituden, z. B. $\frac{\theta_k}{\theta_{k+1}}$.

Dann haben wir nach den Formeln (45) und (46)

$$\frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} = e^{\varepsilon(t_{k+1} - t_k)} = e^{\pi \frac{\varepsilon}{\gamma}}.$$

Dieses Verhältnis, das wir mit v bezeichnen wollen, ist also eine konstante Größe. Man nennt es das Dämpfungsverhältnis.

Also ist

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}} = e^{\pi \frac{\varepsilon}{\gamma}}. \tag{47}$$

Wir sehen also, daß die maximalen Amplituden der Ausschläge des Pendels in geometrischer Progression abnehmen. Die entsprechende Kurve der Bewegung des Pendels ist in Fig. 86 dargestellt.

Die Zeit, welche zwischen den zwei aufeinanderfolgenden Maxima auf der einen Seite der Zeitachse verlaufen ist, ist die volle Periode der Pendelbewegung. Wir bezeichnen sie mit T'.

Aus Formel (46) sieht man, daß

$$T' = \frac{2\pi}{\gamma} \tag{48}$$

ist. Wir erhalten somit das Resultat, daß die Kurve der Bewegung des Horizontalpendels eine gedämpfte Sinusoide mit der Periode T' ist.

Hätte das Pendel keine Dämpfung besessen, so würden wir haben

$$\varepsilon = 0$$

und

$$\gamma = n.$$

In diesem Falle ist

$$v = 1$$

und

$$T' = T = \frac{2\pi}{n}, \tag{49}$$

das heißt, die Kurve der Bewegung des Pendels würde eine gewöhnliche Sinusoide mit der Periode $T = \frac{2\pi}{n}$ sein.

T ist somit die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels bei Abwesenheit einer Dämpfung. Die Größe dieser Periode wird nur durch die Größe der reduzierten Pendellänge l, der Beschleunigung der Schwerkraft g und den Neigungswinkel der Drehungsachse des Pendels i (Formel (23)) bedingt.

Aus den Formeln (48) und (36) folgt, daß

$$T' > T$$

ist, d. h. mit der Vergrößerung der Dämpfung, nimmt auch die Eigenperiode des Pendels zu.

Digitized by Google

Das gewöhnliche logarithmische Dekrement $\varDelta$ ergibt sich direkt aus der Formel (47):

$$\varDelta = \log_{10} v = \pi \frac{\varepsilon}{\gamma} \log_{10} e. \tag{50}$$

Wir wollen nun sehen, wie man durch Versuch die zwei charakteristischen Konstanten des Pendels ε und n, die in der Grunddifferentialgleichung der Bewegung (Formel (26)) mit enthalten sind, bestimmen kann.

Aus den Beobachtungen können wir sowohl die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels T' als auch das entsprechende logarithmische Dekrement $\varDelta$ ermitteln, indem wir eine Reihe aufeinanderfolgender maximaler Amplituden θ_k bestimmen.

Sind T' und $\varDelta$ bekannt, so ist es leicht, n $\left(\text{oder } T = \frac{2\pi}{n}\right)$ und ε zu bestimmen.

Aus den Formeln (49) und (43) folgt, daß

$$T = \frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{\sqrt{\gamma^2 + \varepsilon^2}} = \frac{2\pi}{\gamma} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2}}.$$

Andererseits ist $\frac{2\pi}{\gamma} = T'$ (Formel (48)), und nach Formel (50)

$$\left(\frac{\varepsilon}{\gamma}\right)^2 = \frac{1}{(\pi \log e)^2} \cdot \varDelta^2 = 0{,}53720\, \varDelta^2. \tag{51}$$

Folglich ist

$$T = \frac{T'}{\sqrt{1 + 0{,}53720\, \varDelta^2}} \tag{52}$$

und

$$n = \frac{2\pi}{T'} \cdot \sqrt{1 + 0{,}53720\, \varDelta^2} \tag{53}$$

Was die Konstante ε anbetrifft, so läßt sie sich unmittelbar aus der Formel (50) bestimmen:

$$\varepsilon = \frac{\varDelta}{\pi \log e} \cdot \gamma = \frac{\varDelta}{\pi \log e} \cdot \frac{2\pi}{T'} = \frac{2}{\log e} \cdot \frac{\varDelta}{T'}$$

oder

$$\varepsilon = 4{,}6052 \cdot \frac{\varDelta}{T'} \cdot \tag{54}$$

Beobachtet man T' und $\varDelta$, so kann man sehr leicht die beiden Konstanten n und ε und auch T bestimmen.

Ersetzt man in dem Ausdrucke (54) T' durch die entsprechende Größe aus Formel (52), so erhält man

$$\varepsilon = 4{,}6052 \cdot \frac{1}{T} \cdot \frac{\varDelta}{\sqrt{1 + 0{,}53720\, \varDelta^2}}. \tag{55}$$

Zur Abkürzung der verschiedenen Formeln und zur Erleichterung der weiteren Berechnungen wollen wir folgende Bezeichnungen einführen

$$h = \frac{\varepsilon}{n} \tag{56}$$

Digitized by Google

und

$$\mu^2 = 1 - h^2. \tag{57}$$

Dann ist

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} = n\sqrt{1 - h^2} = n\mu \tag{58}$$

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{h}{\mu} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}. \tag{59}$$

Setzt man die letzte Größe in die Formel (47) ein, so erhält man

$$v = e^{\pi\frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}}. \tag{60}$$

Andererseits folgt aus den Formeln (53) und (54)

$$h = \frac{\varepsilon}{n} = \frac{4{,}6052}{2\pi} \cdot \frac{\varDelta}{\sqrt{1 + 0{,}53720\varDelta^2}}$$

oder

$$h = 0{,}7330 \frac{\varDelta}{\sqrt{1 + 0{,}53720\varDelta^2}}. \tag{61}$$

Also hängen h und folglich auch μ^2 nicht von der Eigenperiode des Pendels T' ab, sondern sie werden ausschließlich durch die Größe des entsprechenden logarithmischen Dekrements $\varDelta$ bestimmt.

Im weiteren werden wir die Stärke der Dämpfung des Horizontalpendels weder durch die Konstante ε noch durch das Dämpfungsverhältnis v, noch schließlich durch die Größe des logarithmischen Dekrements $\varDelta$ charakterisieren, sondern durch den Koeffizient μ^2, den wir also als Maß für den Grad der Dämpfung des Apparates annehmen.

Aus dem folgenden wird ersichtlich werden, daß der Koeffizient μ^2, den wir bedingungsweise die **Dämpfungskonstante** nennen wollen, in sehr charakteristischer Weise den Grad der Dämpfung definiert, wenn die Schwingungen des Apparats nahe an der Grenze der Aperiodizität liegen.

Nimmt man also μ^2 als eine unabhängige Variable an, so können aus den Formeln (57) und (60) die entsprechenden Größen h und das **Dämpfungsverhältnis** v ermittelt werden.

Diese Zahlen sind in Tabelle I der „Seismometrischen Tabellen" angeführt, die von der Russischen Permanenten Seismologischen Zentralkommission veröffentlicht worden sind.

Ist $\mu^2 = 1$, $h = 0$ und $v = 1$, so ist der Apparat ungedämpft.

Ist $\mu^2 = 0$, $h = 1$ (wenn $\varepsilon = n$) und $v = \infty$, so befindet sich der Apparat an der Grenze der Aperiodizität.

Für $\mu^2 = 0{,}79$ ist v ungefähr 5. Dies ist das Dämpfungsverhältnis, das am häufigsten in Deutschland angewandt wird.

Mit der Abnahme von μ^2 wächst v, wie man aus der erwähnten Tabelle sieht, sehr schnell an. Z. B. für $\mu^2 = 0{,}10$ ist bereits $v = 12400$; das ist ein so großes Dämpfungsverhältnis, daß das Pendel als aperiodisch betrachtet werden kann.

Digitized by Google

Zum Schluß wollen wir noch untersuchen, wie sich die Gleichung der Bewegung des Pendels, die durch die Formel (40) definiert wird, ändert, wenn das Pendel gerade an der Grenze der Aperiodizität sich befindet, d. h. wenn

$$\mu^2 = 0$$

$$\varepsilon = n$$

und

$$\gamma = 0$$

ist.

Die Formel (40) nimmt in diesem Falle die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an. Um diese Unbestimmtheit zu eliminieren, entwickeln wir $\sin \gamma t$ in eine Reihe nach Potenzen von γt und gehen dann zur Grenze $\gamma = 0$ über.

$$\frac{\sin \gamma t}{\gamma} = \frac{1}{\gamma}\left[\gamma t - \frac{1}{6}\gamma^3 t^3\right] = t - \frac{1}{6}\gamma^2 t^3.$$

Wir haben also an der Grenze der Aperiodizität

$$\theta = \theta_0' t \cdot e^{-nt}. \tag{62}$$

Wir erhalten dieselbe Gleichung (33), welche wir früher abgeleitet haben, als wir von der aperiodischen Bewegung des Pendels ausgingen.

Wir sehen also, daß je nachdem ε größer oder kleiner als n ist, die Eigenbewegung des Pendels entweder aperiodisch oder periodisch mit Dämpfung ist.

Besonders interessant und in der Praxis wichtig ist der Fall, wenn das Pendel streng auf Aperiodizität eingestellt, d. h. $\mu^2 = 0$ ist.

In diesem Falle nehmen die verschiedenen Formeln besonders einfache und für die Berechnung bequeme Form an, wodurch die Auswertung der Seismogramme sehr vereinfacht wird.

In der Praxis soll man daher beim Gebrauch der oben beschriebenen Horizontal- und Vertikalseismographen mit magnetischer Dämpfung und galvanometrischer Registrierung immer möglichst nahe Aperiodizität herbeizuführen suchen. Wie das zu geschehen hat, wird später in § 3 des VII. Kapitels dargelegt werden.

§ 3. Die Bewegung des Pendels unter dem Einfluß von horizontalen Bodenverschiebungen.

Zur Untersuchung dieser Frage gehen wir auf die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels (Formel (25)) zurück.

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0. \tag{25}$$

Die horizontale Bodenverschiebung x in der Richtung des Meridians ist eine Funktion von t:

$$x = f(t). \tag{14}$$

Digitized by Google

Bilden wir die zweite Derivierte von x und setzen

$$-\frac{1}{l}x'' = -\frac{1}{l}f''(t) = A\,\Phi(t) \tag{63}$$

so ist

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = A\,\Phi(t). \tag{64}$$

Setzen wir ferner voraus, daß $\varepsilon < n$, d. h. daß die Eigenbewegung des Pendels gedämpft ist.

Zur Integration linearer Differentialgleichungen von der Art wie (64), in der rechts eine gegebene Funktion $\Phi(t)$ steht, wird die Methode der Variation der willkürlichen Konstanten angewandt, die in folgendem besteht.

Man setzt anfangs $\Phi(t)$ gleich Null. Dann kann das allgemeine Integral der Gleichung (64) in folgender Form niedergeschrieben werden (Formel (37)):

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t], \tag{37}$$

wo $\gamma = +\sqrt{n^2 - \varepsilon^2}$ und C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten sind.

Steht aber auf der rechten Seite der Differentialgleichung (64) die Funktion $\Phi(t)$, so wird der Ausdruck (37) unsere Differentialgleichung nicht mehr befriedigen, wenn C_1 und C_2 Konstanten sind. Wir können aber doch das allgemeine Integral der Gleichung (64) durch einen Ausdruck von der Art (37) bezeichnen, wenn wir C_1 und C_2 als Funktionen der Zeit t betrachten. Es handelt sich also um die Bestimmung dieser zwei Funktionen.

Da es zwei solcher Funktionen geben soll und wir nur eine Differentialgleichung, der sie genügen müssen, haben, so können wir eine Zusatzbedingung nach unserer Wahl hinzufügen.

Wir nehmen die erste Derivierte von θ nach der Zeit (Formel (38)).

$$\theta' = e^{-\varepsilon t}[(\gamma C_2 - \varepsilon C_1)\cos\gamma t + (-\varepsilon C_2 - \gamma C_1)\sin\gamma t]$$
$$+ e^{-\varepsilon t}[C_1' \cos\gamma t + C_2' \sin\gamma t].$$

Die Bedingung, welcher wir die Funktionen C_1 und C_2 unterwerfen, sei die folgende:

$$C_1' \cos\gamma t + C_2' \sin\gamma t = 0. \tag{65}$$

Wir nehmen nun die zweite Derivierte von θ nach der Zeit unter Berücksichtigung der Bedingung (65) (Formel (39)).

Dann ist

$$\theta'' = e^{-\varepsilon t}[\{-2\varepsilon\gamma C_2 + (\varepsilon^2 - \gamma^2)C_1\}\cos\gamma t + \{(\varepsilon^2 - \gamma^2)C_2 + 2\varepsilon\gamma C_1\}\sin\gamma t]$$
$$+ e^{-\varepsilon t}[\{\gamma\cos\gamma t - \varepsilon\sin\gamma t\}C_2' - \{\varepsilon\cos\gamma t + \gamma\sin\gamma t\}C_1'].$$

Setzt man nun die Ausdrücke für θ, θ' und θ'' in die Differentialgleichung (64) ein und berücksichtigt, daß dem vorhergehenden gemäß alle Glieder, die die Faktoren C_1 und C_2 enthalten, identisch gleich Null sind, weil

Digitized by Google

θ bei konstanten Werten von C_1 und C_2 das Integral der Differentialgleichung (64) unter der Bedingung $\Phi(t) = 0$ ist, so ergibt sich:

$$e^{-\varepsilon t}[\{\gamma \cos \gamma t - \varepsilon \sin \gamma t\} C_2' - \{\varepsilon \cos \gamma t + \gamma \sin \gamma t\} C_1'] = A\Phi(t). \quad (66)$$

Es können also die Werte C_1' und C_2' aus den Gleichungen (65) und (66) bestimmt werden.

Aus der Formel (65) ergibt sich

$$C_2' = -\frac{\cos \gamma t}{\sin \gamma t} \cdot C_1'. \quad (67)$$

Setzt man diese Größe in die Formel (66) ein, so ergibt sich weiter

$$\left[-\gamma \frac{\cos^2 \gamma t}{\sin \gamma t} + \varepsilon \cos \gamma t - \varepsilon \cos \gamma t - \gamma \sin \gamma t\right] C_1' = A \cdot e^{\varepsilon t}\Phi(t)$$

oder

$$C_1' = -\frac{A}{\gamma} \cdot \sin \gamma t \cdot e^{\varepsilon t}\Phi(t);$$

Formel (67) gibt aber

$$C_2' = \frac{A}{\gamma} \cdot \cos \gamma t \cdot e^{\varepsilon t}\Phi(t).$$

Nimmt man nun das unbestimmte Integral von diesen Ausdrücken, und bezeichnet man mit Γ_1 und Γ_2 zwei willkürliche Konstanten, so erhält man

$$C_1 = \Gamma_1 - \frac{A}{\gamma}\int e^{\varepsilon t} \sin \gamma t \cdot \Phi(t) dt$$

und

$$C_2 = \Gamma_2 + \frac{A}{\gamma}\int e^{\varepsilon t} \cos \gamma t \cdot \Phi(t) dt.$$

Die Funktionen C_1 und C_2 sind hiermit bestimmt worden.

Setzt man diese Größen in die Formel (37) ein, so findet man endgültig

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t]$$

$$+ \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t}\left[-\cos \gamma t \int e^{\varepsilon t} \sin \gamma t \cdot \Phi(t) dt + \sin \gamma t \int e^{\varepsilon t} \cos \gamma t \cdot \Phi(t) dt\right]. \quad (68)$$

Dieser Ausdruck liefert uns das allgemeine Integral der Differentialgleichung (64), da der angegebene Wert θ ihr genügt und da außerdem der Ausdruck für θ zwei willkürliche Konstanten Γ_1 und Γ_2, die aus den Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt werden, enthält.

In diesem Ausdruck für θ ist die Funktion $\Phi(t)$ oder $f(t)$ (Formel (63) und (14)) ganz willkürlich.

Wir wollen nun den partikulären Fall einer harmonischen Bodenbewegung betrachten.

Demgemäß setzen wir

$$x = x_m \sin(pt + \delta), \quad (69)$$

Digitized by Google

wo x_m die maximale Amplitude der Bodenbewegung und δ die anfängliche Phase ist.

Die entsprechende Periode der seismischen Welle ist

$$T_p = \frac{2\pi}{p}. \tag{70}$$

Aus der Gleichung (69) finden wir

$$x'' = -x_m p^2 \sin(pt + \delta),$$

und folglich wegen der Beziehung (63)

$$A = \frac{p^2}{l} x_m \tag{71}$$

und

$$\Phi(t) = \sin(pt + \delta).$$

Die Grunddifferentialgleichung der Pendelbewegung wird folgendermaßen ausgedrückt sein:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = A\sin(pt + \delta). \tag{72}$$

Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \gamma t &= \alpha \\ pt + \delta &= \beta \end{aligned}\right\} \tag{73}$$

$$S_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin\alpha \cdot \sin\beta \, dt \tag{74}$$

$$S_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos\alpha \cdot \sin\beta \, dt. \tag{75}$$

Dann kann das allgemeine Integral der Gleichung (72) auf Grund der Formel (68) in folgender Form geschrieben werden:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\alpha + \Gamma_2 \sin\alpha] + \frac{A}{\gamma} e^{-\varepsilon t}[-\cos\alpha \cdot S_1 + \sin\alpha \cdot S_2]. \tag{76}$$

Es erübrigt nun noch die Werte der Integrale S_1 und S_2 zu finden.

$$\left.\begin{aligned} S_1 &= \tfrac{1}{2}\int e^{\varepsilon t}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]\,dt \\ S_2 &= \tfrac{1}{2}\int e^{\varepsilon t}[\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)]\,dt \end{aligned}\right\} \tag{77}$$

Auf Grund der Bezeichnungen (73) ist

$$\alpha - \beta = (\gamma - p)t - \delta$$

und

$$\alpha + \beta = (\gamma + p)t + \delta.$$

Setzen wir noch

und

$$\left.\begin{aligned} \gamma - p &= q_1 \\ \gamma + p &= q_2 \end{aligned}\right\} \tag{78}$$

Digitized by Google

dann ist

und
$$\left.\begin{aligned}\alpha - \beta &= q_1 t - \delta\\ \alpha + \beta &= q_2 t + \delta\end{aligned}\right\}. \tag{79}$$

Bei der Berechnung von S_1 und S_2 werden wir mit zwei unbestimmten Integralen folgender Form zu tun haben:

$$\left.\begin{aligned}I_1 &= \int e^{\varepsilon t}\cos(qt+\sigma)dt\\ I_2 &= \int e^{\varepsilon t}\sin(qt+\sigma)dt\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

wo σ eine konstante Größe ist ($\mp \delta$).

Wenn wir den allgemein bekannten Methoden der Integralrechnung folgen, finden wir leicht für diese zwei unbestimmten Integrale die folgenden Ausdrücke:

und
$$\left.\begin{aligned}I_1 &= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[q\sin(qt+\sigma)+\varepsilon\cos(qt+\sigma)]\\ I_2 &= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[\varepsilon\sin(qt+\sigma)-q\cos(qt+\sigma)]\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

Von der Richtigkeit dieser Formeln kann man sich sehr leicht durch Differentiation überzeugen.

Denn es ist

$$I_1' = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[\varepsilon q\sin(qt+\sigma)+\varepsilon^2\cos(qt+\sigma)+q^2\cos(qt+\sigma)-\varepsilon q\sin(qt+\sigma)]$$
$$= e^{\varepsilon t}\cos(qt+\sigma)$$

und

$$I_2' = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[\varepsilon^2\sin(qt+\sigma)-\varepsilon q\cos(qt+\sigma)+\varepsilon q\cos(qt+\sigma)+q^2\sin(qt+\sigma)]$$
$$= e^{\varepsilon t}\sin(qt+\sigma).$$

Wir wollen die Formeln (81) zur Bestimmung von S_1 und S_2 benutzen. Nach den vorigen Bezeichnungen haben wir

$$S_1 = \tfrac{1}{2}\left[\int e^{\varepsilon t}\cos(q_1 t-\delta)dt - \int e^{\varepsilon t}\cos(q_2 t+\delta)dt\right]$$
$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2}\{q_1\sin(\alpha-\beta)+\varepsilon\cos(\alpha-\beta)\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\{q_2\sin(\alpha+\beta)+\varepsilon\cos(\alpha+\beta)\}\right]$$
$$S_2 = \tfrac{1}{2}\left[\int e^{\varepsilon t}\sin(q_2 t+\delta)dt - \int e^{\varepsilon t}\sin(q_1 t-\delta)dt\right]$$
$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\left[\frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\{\varepsilon\sin(\alpha+\beta)-q_2\cos(\alpha+\beta)\}\right.$$
$$\left.-\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2}\{\varepsilon\sin(\alpha-\beta)-q_1\cos(\alpha-\beta)\}\right].$$

Digitized by Google

Bilden wir nun den Ausdruck

$$S = -\cos\alpha \cdot S_1 + \sin\alpha \cdot S_2,$$

den die Formel (76) enthält, so erhalten wir

$$S = -\cos\alpha \cdot S_1 + \sin\alpha \cdot S_2 = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\Big[\frac{1}{\varepsilon^2 + q_1^2}\{-q_1 \cos\alpha \sin(\alpha-\beta) - \varepsilon\cos\alpha\cos(\alpha-\beta)$$

$$-\varepsilon\sin\alpha\sin(\alpha-\beta) + q_1\sin\alpha\cos(\alpha-\beta)\}$$

$$+\frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\{q_2\cos\alpha\sin(\alpha+\beta) + \varepsilon\cos\alpha\cos(\alpha+\beta)$$

$$+\varepsilon\sin\alpha\sin(\alpha+\beta) - q_2\sin\alpha\cos(\alpha+\beta)\}\Big].$$

oder

$$S = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\Big[\Big\{\frac{q_1}{\varepsilon^2+q_1^2} + \frac{q_2}{\varepsilon^2+q_2^2}\Big\}\sin\beta + \Big\{\frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+q_2^2} - \frac{\varepsilon}{\varepsilon^2+q_1^2}\Big\}\cos\beta\Big].$$

Bringen wir noch die Koeffizienten von $\sin\beta$ und $\cos\beta$ auf einen Nenner, so erhalten wir schließlich

$$S = \frac{e^{\varepsilon t}}{2}\cdot\frac{q_1+q_2}{(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)}[\{\varepsilon^2+q_1q_2\}\sin\beta + \varepsilon(q_1-q_2)\cos\beta].$$

Aus den Formeln (78) ergibt sich

$$q_1 + q_2 = 2\gamma$$

$$q_1 - q_2 = -2p$$

$$q_1 q_2 = \gamma^2 - p^2$$

$$\varepsilon^2 + q_1^2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 + p^2 - 2\gamma p$$

$$\varepsilon^2 + q_2^2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 + p^2 + 2\gamma p$$

und

$$\varepsilon^2 + q_1 q_2 = \varepsilon^2 + \gamma^2 - p^2.$$

Bezeichnen wir das Produkt $(\varepsilon^2 + q_1^2)(\varepsilon^2 + q_2^2)$ mit einem Buchstaben R und berücksichtigen, daß

$$\varepsilon^2 + \gamma^2 = n^2, \tag{43}$$

so haben wir

$$R = (\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2) = (n^2+p^2)^2 - 4\gamma^2p^2 = n^4 + p^4 + 2p^2n^2 - 4p^2n^2$$

$$+4p^2\varepsilon^2 = (n^2-p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 \tag{82}$$

und

$$\varepsilon^2 + q_1 q_2 = n^2 - p^2.$$

Setzt man diese Größen in den vorhergehenden Ausdruck für S ein, so ergibt sich

$$S = \gamma e^{\varepsilon t}\frac{1}{R}[(n^2-p^2)\sin\beta - 2p\varepsilon\cos\beta]. \tag{83}$$

Digitized by Google

Jetzt multiplizieren und dividieren wir diesen Ausdruck durch

$$\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}$$

und setzen

$$\left.\begin{aligned} \frac{2p\varepsilon}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}} &= \sin\Delta \\ \text{und} \qquad \frac{n^2 - p^2}{\sqrt{(n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2}} &= \cos\Delta. \end{aligned}\right\} \tag{84}$$

Dann wird

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2p\varepsilon}{n^2 - p^2}. \tag{85}$$

Aber nach Formel (82) ist die vorhergehende Wurzel nichts anderes als $\sqrt{R}$.

Also haben wir

$$S = -\cos\alpha \cdot S_1 + \sin\alpha \cdot S_2 = \gamma e^{\varepsilon t} \frac{1}{\sqrt{R}} \cdot \sin(\beta - \Delta).$$

Führt man diesen Ausdruck in die Formel (76) ein und ersetzt α und β durch ihre Werte aus den Formeln (73), so erhält man schließlich

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t] + \frac{A}{\sqrt{R}} \sin(pt + \delta - \Delta) \tag{86}$$

Diese Formel kann man umgestalten und auf eine für die Rechnung bequemere Form bringen, wenn man die Dämpfungskonstante einführt

$$\mu^2 = 1 - h^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2}.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir für

$$\varepsilon = nh = n\sqrt{1 - \mu^2}. \tag{87}$$

Bezeichnet man die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung mit T, wo

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

ist, und das Verhältnis der Periode der seismischen Welle T_p zur Periode des Pendels T mit u, so ergibt sich

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p} \tag{88}$$

Die Größe u spielt in der Theorie eine wichtige Rolle.

Mit Rücksicht auf diese Bezeichnungen wollen wir jetzt die Ausdrücke für R und $\operatorname{tg}\Delta$ umgestalten.

Der Formel (82) gemäß haben wir

$$R = (n^2 - p^2)^2 + (2p\varepsilon)^2 = p^4\left[(u^2 - 1)^2 + 4\frac{\varepsilon^2}{p^2}\right]$$
$$= p^4\left[(u^2 - 1)^2 + 4\frac{n^2}{p^2}(1 - \mu^2)\right]$$

Digitized by Google

oder

$$R = p^4[(1 + u^2)^2 - 4\mu^2 u^2]$$

und

$$\sqrt{R} = p^2(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2\left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2}.$$

Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2, \tag{89}$$

dann ist

$$\sqrt{R} = p^2(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}. \tag{90}$$

Andererseits ist

$$\operatorname{tg}\Delta = \frac{2\frac{\varepsilon}{p}}{u^2 - 1} = \sqrt{1 - \mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2 - 1}$$

oder

$$\Delta = \operatorname{arc\,tg}\left\{\sqrt{1 - \mu^2}\cdot\frac{2u}{u^2 - 1}\right\}. \tag{91}$$

Setzt man noch

$$\tau = \frac{\Delta}{p} \tag{92}$$

und setzt diese Ausdrücke für $\sqrt{R}$ und $\Delta = p\tau$ in die Formel (86) ein, unter Berücksichtigung, daß

$$A = \frac{p^2}{l}\cdot x_m$$

ist, so ergibt sich schließlich

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t]$$

$$+ \frac{x_m}{l}\cdot\frac{1}{(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}}\sin\{p(t - \tau) + \delta\}. \tag{93}$$

Dieses ist die Gleichung der Bewegung des Pendels unter dem Einflusse von horizontalen Bodenverschiebungen.

Die Konstanten Γ_1 und Γ_2 lassen sich aus den Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmen.

Die Gleichung zeigt uns, daß die Bewegung des Pendels sich aus zwei Teilen zusammensetzt.

Der erste Teil

$$e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t]$$

stellt die Eigenbewegung des Pendels dar. Sie entspricht einer gedämpften Sinuslinie mit der Periode $T' = \frac{2\pi}{\gamma}$.

Der zweite Teil ist durch die harmonische Bodenbewegung bedingt. Er liefert eine einfache Sinuslinie mit derselben Periode T_p, wie bei der betreffenden seismischen Welle, aber zwischen den beiden Bewegungen — des Pendels und des Bodens — besteht eine Phasendifferenz, d. h. das Pendel

Digitized by Google

verspätet sich etwas in seiner Bewegung gegen die seismische Welle, denn die Zeitdifferenz τ ist immer positiv.

Auch aus den Formeln (92), (91) und (84) ergibt sich schon, daß, wenn u in den Grenzen von ∞ bis 0 variiert, Δ in den Grenzen von 0 bis π variiert.

Obwohl die Bodenbewegung nach der Voraussetzung eine sehr einfache war, nämlich eine harmonische und ungedämpfte, so ist doch die Bewegung des Pendels schon einigermaßen kompliziert, denn sie besteht aus zwei Sinusbewegungen, einer gedämpften und einer einfachen, die sich übereinander lagern. Aus der Aufzeichnung eines solchen Apparates kann man infolgedessen nicht sofort die gesuchte wahre Bodenbewegung absondern.

Wenn die wahre Bodenbewegung der Summe der verschiedenen Sinusbewegungen entsprechen würde, z. B.

$$f(t) = \Sigma x_m \sin(pt + \delta),$$

wo für eine jede einzelne Welle, x_m, p und δ verschieden sind, so wäre der allgemeine Integralausdruck für θ, da unsere Grunddifferentialgleichung (64) linear ist, der folgende:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t]$$
$$+ \frac{1}{l}\sum \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau)+\delta\}. \tag{94}$$

In dieser Summe sind u und τ auch verschieden für verschiedene seismische Wellen.

Diese letzte Formel (94) ist allgemein gültig.

Die Formel (93) weist darauf hin, wie man zu verfahren hat, damit das Pendel möglichst getreu die wahre Bodenbewegung wiedergibt.

Man hat nämlich zu diesem Zweck die Dämpfung des Apparates zu verstärken, d. h. den Koeffizienten ε zu vergrößern. Dann werden die ersten zwei Glieder, die den Faktor $e^{-\varepsilon t}$ enthalten und von der Eigenbewegung des Apparates abhängen, mit der Zunahme von t schnell verschwinden und es bleibt nur der zweite Teil der Formel, welcher durch die Bodenbewegung bedingt ist, übrig.

In diesem Falle braucht man die Anfangsbedingungen der Bewegung gar nicht zu bestimmen, die Werte von Γ_1 und Γ_2 also nicht aufzusuchen, denn sie sind für nicht zu kleine Werte von t zu vernachlässigen.

Dann haben wir

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau)+\delta\}. \tag{95}$$

Das Pendel wird also eine einfache Sinusbewegung aufzeichnen, deren Periode genau der Periode der entsprechenden seismischen Welle gleich ist. Es ist also T_p bekannt. Entnimmt man aus der Kurve die maximale Amplitude des Pendelausschlages, so kann mit Hilfe der bekannten Größen

l, μ^2 und $u = \frac{T_p}{T}$ die maximale Amplitude der Bodenbewegung x_m in einfacher Weise ermittelt werden.

Die vorstehenden Ausführungen zeigen uns klar, daß es vorteilhaft ist, die Seismographen mit starker Dämpfung zu versehen, da sich dann in sehr einfacher Weise bei harmonischen Bodenschwingungen der Einfluß der Eigenbewegung des Apparates eliminieren läßt.

Nach der Theorie ist es vorteilhaft, die Dämpfung so weit zu erhöhen, daß die Schwingungen des Pendels aperiodisch verlaufen.

In diesem Falle ist $\varepsilon = n$ und $\mu^2 = 0$. Dann ist

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{1+u^2} \sin\{p(t-\tau)+\delta\}. \tag{96}$$

Diese Formel ist sehr einfach.

Um die Bedeutung starker Dämpfung zu erkennen, wollen wir untersuchen, was sich ergeben haben würde, wenn das Pendel ganz ungedämpft wäre.

In diesem Falle ist

$$\varepsilon = 0$$

$$\mu^2 = 1$$

und nach Formel (91)

$$\tau = 0.$$

Außerdem ist

$$(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)} = \sqrt{(1+u^2)^2 - 4u^2} = u^2 - 1 \quad \text{(Form. (89))}.$$

Dann folgt aus den Formeln (93) und (94)

$$\theta = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2-1} \sin(pt+\delta). \tag{97}$$

Um diese Bewegung zu analysieren, müssen die Anfangsbedingungen der Bewegung angegeben werden.

Zur Vereinfachung der Ableitung nehmen wir noch an, daß $\delta = 0$ ist, d. h. wir beginnen die Zeitzählung in dem Moment, in dem die seismische Welle den Beobachtungsort erreicht hat.

Wir wollen voraussetzen, daß bei $t = 0$

$$\theta = 0$$

ist.

In diesem Moment gibt die Bodenbewegung dem Pendel eine anfängliche Geschwindigkeit θ_0' relativ zum Pendelgestell.

Zur Bestimmung von θ_0' benutzen wir die Grunddifferentialgleichung (25). Wir haben dann

$$\theta'' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0.$$

Wir integrieren gliedweise diese Gleichung in den Grenzen von $t = 0$ bis $t = \tau_0$, wo τ_0 eine sehr kleine Größe ist.

Dann erhalten wir

$$\theta_0' + n^2 \int_0^{\tau_0} \theta \, dt + \frac{x_0'}{l} = 0,$$

wo x_0' die anfängliche Geschwindigkeit der Bodenbewegung im Moment $t = 0$ ist, denn an der Grenze ist τ_0 gleich Null.

Da die Integrationsgrenzen fast einander gleich sind, so werden wir einfach haben

$$\theta_0' = -\frac{x_0'}{l} \tag{98}$$

Diese Formel zeigt ohne weiteres, daß, wenn die Erdoberfläche einen Impuls erfährt, der ihr eine anfängliche Geschwindigkeit x_0' z. B. nach rechts verleiht, das im Abstande l von der Drehungsachse liegende Schwingungszentrum infolge seiner Trägheit im ersten Moment an derselben Stelle bleibt; folglich ist die Winkelgeschwindigkeit der relativen Bewegung des Pendels nach links gerichtet, wobei offenbar $\theta_0' = -\frac{x_0'}{l}$ ist.

Aus der Gleichung der Bewegung des Bodens (bei $\delta = 0$)

$$x = x_m \sin pt$$

erhalten wir

$$x' = p x_m \cos pt;$$

folglich

$$x_0' = p x_m$$

und

$$\theta_0' = -\frac{p x_m}{l}. \tag{99}$$

Zur Bestimmung der Konstanten Γ_1 und Γ_2 gehen wir auf die Gleichung (97) zurück und setzen in ihr $\delta = 0$.

Für $t = 0$ ist

$$\theta_0 = 0 = \Gamma_1.$$

Ferner

$$\theta' = n \Gamma_2 \cos nt + \frac{p x_m}{l} \cdot \frac{1}{u_2 - 1} \cos pt.$$

Die zweite Anfangsbedingung gibt uns bei $t = 0$

$$\theta_0' = -\frac{p x_m}{l} = n \Gamma_2 + \frac{p x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1}$$

oder

$$\Gamma_2 = -\frac{p}{n} \cdot \frac{x_m}{l} \left[1 + \frac{1}{u^2 - 1}\right] = -\frac{p}{n} \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{u^2}{u^2 - 1},$$

oder auf Grund der Beziehung (88),

$$\Gamma_2 = -\frac{x_m}{l} \cdot \frac{u}{u^2 - 1}.$$

In diesem Falle wird also die Gleichung der Pendelbewegung

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \cdot [\sin pt - u \sin nt]. \tag{100}$$

Digitized by Google

Diese Gleichung stellt eine doppelte Sinusbewegung mit den Perioden T_p und T dar. Der größte positive Wert θ bei $u > 1$ entspricht einem Wert von t, bei welchem $\sin pt = 1$ und $\sin nt = -1$ ist.

Dann ist

$$\theta_m = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u^2 - 1} \cdot (u + 1) = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{u - 1} \cdot \tag{101}$$

Diese Formel zeigt, daß die Ausschläge des Pendels sehr groß werden können und zwar auch bei ganz unbedeutenden Amplituden der Bodenbewegung x_m, wenn nur u nahezu gleich Eins ist, d. h. in der Nähe der Resonanz, wenn also die Periode der seismischen Welle T_p sich wenig von der Eigenperiode des Pendels T unterscheidet.

Die ungedämpften Pendel geben somit in der Nähe der Resonanz gänzlich falsche Aufzeichnungen, so daß man nicht durch einen einfachen Blick auf das Seismogramm die Größe der wahren Bodenverschiebung beurteilen kann. Hierzu ist eine sorgfältige Analyse der Aufzeichnungen erforderlich.

Wir können also bei kleinem x_m sehr große Ausschläge des Pendels erhalten, und es können umgekehrt bei bedeutenden Größen von x_m, wenn u groß ist, T_p also bedeutend größer ist als T, die Amplituden der Ausschläge sehr klein werden.

Gewiß hat die Größe u auch bei aperiodischen Pendeln einen gewissen Einfluß auf die Amplitude des Ausschlages, wie aus der Formel (96) zu ersehen ist, und diesen Einfluß muß man bei der Berechnung der Größe x_m aus den Beobachtungen berücksichtigen, aber die Erscheinung der Resonanz spielt hier keine Rolle mehr, so daß ein von einem aperiodischen Pendel aufgezeichnetes Seismogramm im allgemeinen den Charakter der wahren Bodenbewegung ziemlich getreu wiedergibt.

Wir wollen nun untersuchen, was bei strenger Resonanz, d. h. wenn $u = 1$ ist, geschehen wird.

In diesem Falle nimmt bei $n = p$ Formel (100) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ an.

Wir setzen nun

$$\frac{n}{p} = u = 1 + \xi,$$

wo ξ eine sehr kleine Größe ist und gehen zur Grenze über, indem wir $\xi = 0$ setzen

$$\sin nt = \sin(pt + p\xi t) = \sin pt \cdot \cos p\xi t + \sin p\xi t \cdot \cos pt;$$

entwickelt man in eine Reihe nach Potenzen von ξ, so wird

$$\sin nt = \sin pt\left[1 - \frac{1}{2} p^2\xi^2 t^2\right] + \cos pt \cdot (p\xi t)\left[1 - \frac{p^2\xi^2 t^2}{6}\right].$$

Folglich

$$\sin pt - u \sin nt = \sin pt - \sin pt\left[1 + \xi - \frac{1}{2} p^2\xi^2 t^2\right]$$
$$- \cos pt \cdot p\xi t\left[1 + \xi - \frac{p^2\xi^2 t^2}{6}\right],$$

oder bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\sin pt - u \sin nt = -\xi\left[1 - \frac{1}{2}p^2\xi t^2\right]\sin pt - p\xi t(1+\xi)\cos pt.$$

Andererseits ist

$$u^2 - 1 = 1 + 2\xi + \xi^2 - 1 = \xi(2+\xi);$$

folglich

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(2+\xi)}\left[-\left(1 - \frac{1}{2}p^2\xi t^2\right)\sin pt - pt(1+\xi)\cos pt\right].$$

Gehen wir nun zur Grenze über ($\xi = 0$), so ist

$$\theta = -\frac{1}{2}\frac{x_m}{l}[\sin pt + pt\cos pt]. \tag{102}$$

Aus dieser Formel folgt, daß bei $t = 0$, $\theta = 0$ und $\theta' = -\frac{px_m}{l}$ ist, wie es auch sein soll.

Da aber die Zeit t als Faktor vor der trigonometrischen Funktion steht, so müssen die Ausschläge des Pendels mit der Zeit fortwährend zunehmen.

In der Praxis gibt es für eine solche fortlaufende Zunahme von θ gewiß eine Grenze, denn zunächst sind die Pendel schon wegen des Widerstandes der Luft nie ganz ungedämpft und es verwandelt sich daher, wenn μ^2 etwas kleiner ist als 1, der Ausdruck $(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}$, den der Nenner der Formel (93) enthält, niemals in 0, und ferner können wir nicht unsere Ableitung auf sehr große Werte von θ anwenden, denn alle unsere Formeln sind abgeleitet worden in der Voraussetzung, daß θ sehr klein ist, so daß wir setzen konnten $\sin\theta = \theta$ und $\cos\theta = 1$.

Aus dem vorstehenden geht klar hervor, welche theoretischen Vorzüge die gedämpften Pendel vor den ungedämpften besitzen. Die Aufzeichnungen der letzteren sind wenig brauchbar für die Bestimmung der Elemente der wahren Bodenbewegung, wenn nicht eine komplizierte Analyse des Seismogramms vorgenommen wird.

Mit den gedämpften Pendeln ist eine solche Bestimmung dagegen verhältnismäßig leicht zu erreichen, wie wir noch weiterhin sehen werden.

Leider arbeitet noch heutigentags eine große Zahl von seismischen Stationen mit ungedämpften Pendeln, was den Wert des gesammelten seismometrischen Materials in hohem Maße vermindert, wenn es sich um die Untersuchung des Charakters der wahren Bodenbewegung bei Beben handelt.

Je stärker die Dämpfung ist, desto weniger beeinflußt die Eigenbewegung des Apparates die Aufzeichnung der Beben. Deshalb hat die Russische Permanente Seismologische Zentral-Kommission angeordnet, daß alle russischen seismischen Stationen mit gedämpften Pendeln zu versehen sind, wobei man die Dämpfung auf den Stationen ersten Ranges, an denen empfindliche Pendel mit Zöllnerscher Aufhängung und galvanometrischer Registrierung aufgestellt werden, bis nahe zur Aperiodizität führt.

Die Richtigkeit des obenerwähnten kann man anschaulich durch Versuche mit einer beweglichen Plattform nachweisen, die mittels einer exzen-

Digitized by Google

trischen Welle nach dem Gesetze der harmonischen Schwingungen hin- und herbewegt werden kann, und auf welcher ein einfaches, wenig empfindliches Horizontalpendel, etwa nach dem System Bosch, aufgestellt ist, das seine Bewegung mechanisch auf einer rotierenden Walze, die auf derselben beweglichen Plattform aufgestellt ist, registriert.

Fig. 107 stellt die Kurve der Eigenbewegung des Pendels selbst dar, wenn es fast ungedämpft ist.

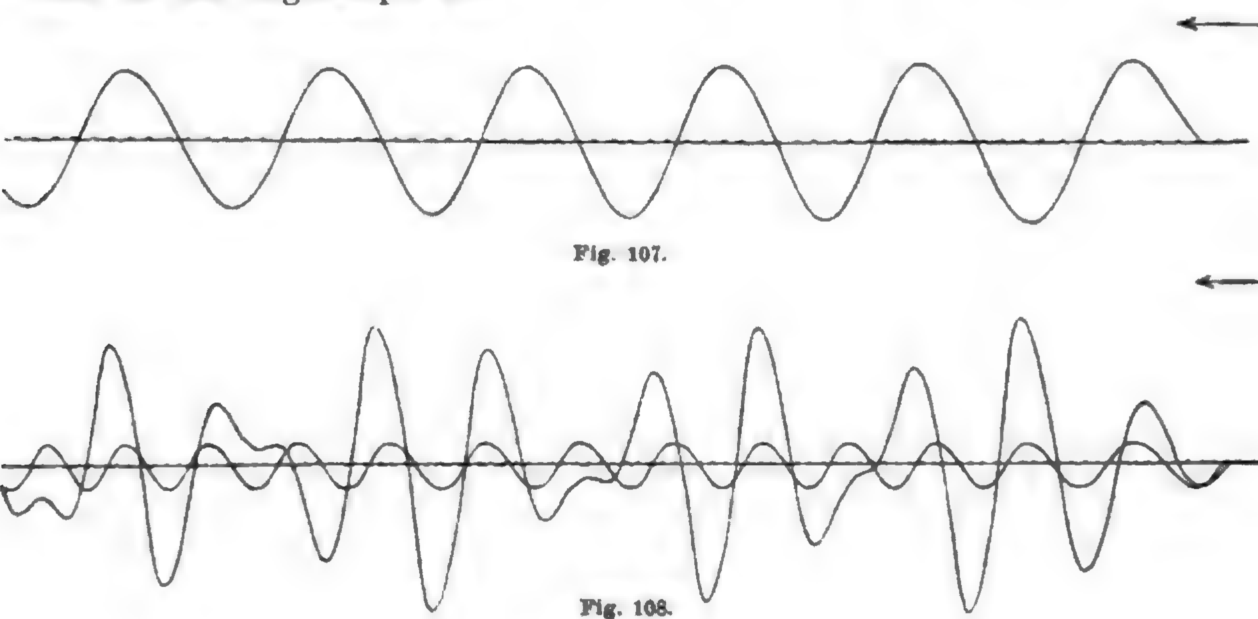


Fig. 107.

Fig. 108.

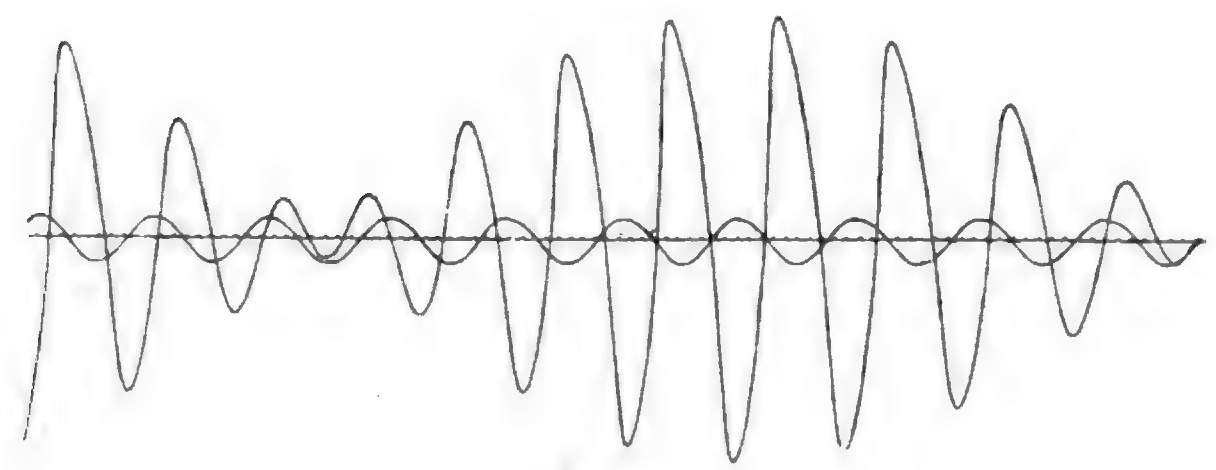


Fig. 109.

Auf derselben Figur ist auch die Zeitskala mit den Sekundenmarken aufgetragen. Die Eigenperiode des Pendels T war bei diesem Versuch 10,8 Sek.

Die folgenden Fig. 108 und 109 geben die Kurven, die von dem Pendel bei einer sinusartigen Bewegung der Plattform, wie sie durch die innere, regelmäßige Wellenkurve dargestellt ist, aufgezeichnet worden sind.

Im ersten Falle (Fig. 108) war die Eigenperiode des Pendels T gleich 10,6 Sek. und die Periode der Plattform $T_p = 7{,}1$ Sek., folglich

$$u = \frac{T_p}{T} = 0{,}67.$$

Digitized by Google

Im zweiten Falle (Fig. 109) war $T = 8{,}8$ Sek. und $T_p = 9{,}3$ Sek., folglich $u = 1{,}06$.

Diese Kurven zeigen, daß bei einer sinusartigen Bewegung der Plattform, welche die der Erdoberfläche beim Durchgang einer regelmäßigen seismischen Welle nachahmt, das Pendel eine viel kompliziertere Aufzeichnung gibt, die eine Reihe sekundärer Maxima und Minima aufweist, und daß mit der Annäherung der Perioden T_p und T die Ausschläge des Pendels wachsen.

Aus solchen Aufzeichnungen des Pendels kann man natürlich keine direkten Schlüsse auf die Amplitude und die Periode der entsprechenden seismischen Welle ziehen.

Wir wollen nun das Pendel mit starker magnetischer Dämpfung ver-

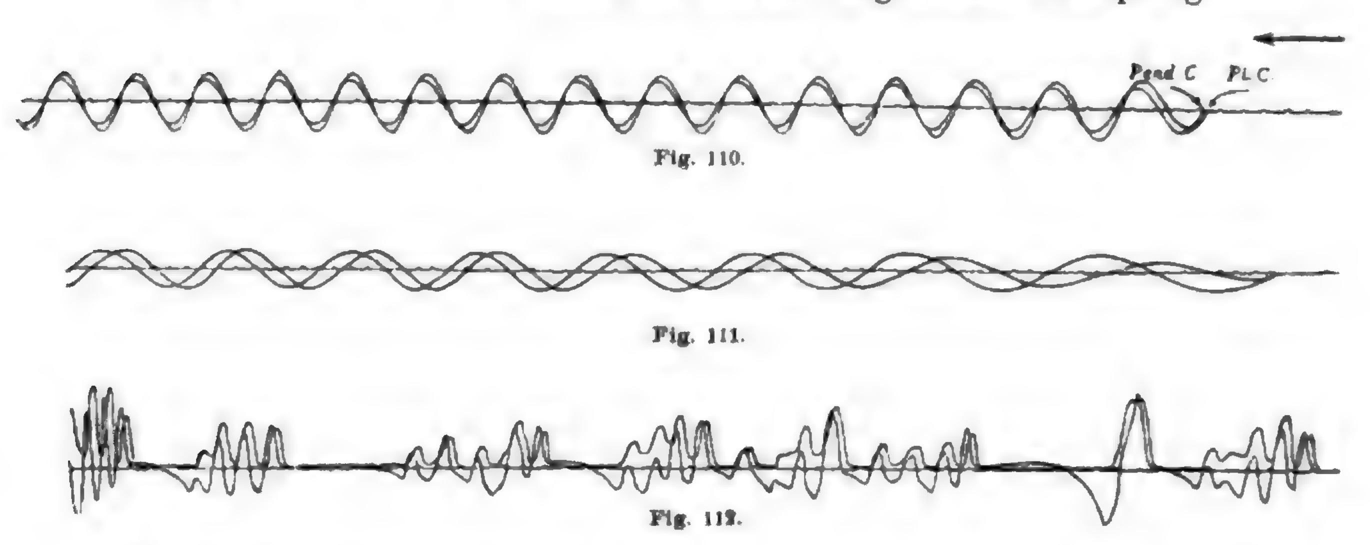


Fig. 110.

Fig. 111.

Fig. 112.

sehen. Jetzt wird die Kurve der Eigenbewegung des Pendels die in Fig. 87 dargestellte Form haben und angenähert aperiodisch sein.

Die vorstehenden Fig. 110 und 111 geben die Aufzeichnung eines solchen nahezu aperiodischen Pendels auf der bewegten Plattform. Im ersten Falle ist die Periode der Plattformbewegung $T_p = 3{,}6$ Sek. und im zweiten 7,5 Sek.

Die Kurven zeigen, daß schon jetzt das Pendel eine vollständig regelmäßige Sinuslinie zeichnet, die vollständig der sinusartigen Bewegung der Plattform entspricht, wobei die Perioden der beiden Sinuslinien genau gleich sind. Unbedeutende Unregelmäßigkeiten entstehen nur am Anfange der Kurve, wo die Bewegung der Plattform noch keinen regelmäßigen sinusartigen Charakter angenommen hat.

Dieselben Figuren zeigen, daß beide Sinuslinien etwas gegeneinander verschoben sind, d. h. zwischen den beiden Bewegungen — der des Pendels und der der Plattform — besteht eine Phasendifferenz, wie es auch die Theorie fordert. Was aber das Verhältnis der maximalen Amplituden des Pendels und der der Plattform anlangt, so hängt dieses sowohl von den Instrumentalkonstanten des Pendels als auch von der Periode der Bewegung der Plattform ab; es charakterisiert die Vergrößerung des Seismographen, die wir im folgenden Paragraphen betrachten werden.

Digitized by Google

Wir finden also, daß die Aufzeichnung eines aperiodischen Pendels fast genau den Charakter der Plattformbewegung wiedergibt; der fälschende Einfluß der Eigenbewegung des Pendels, der die Aufzeichnung der ungedämpften Pendel so sehr verwirrt, ist hier somit fast ganz eliminiert.

Fig. 112 gibt schließlich die Bewegung des nahezu aperiodischen Pendels an, wenn der Plattform mit der Hand ganz willkürliche, unregelmäßige Bewegungen gegeben werden.

Auch in diesem Falle geben die Aufzeichnungen des Pendels im allgemeinen ziemlich richtig den Charakter der Plattformbewegung wieder.

§ 4. Bestimmung der maximalen Amplitude der Bodenverschiebung. Vergrößerung des Pendels.

Wir werden im folgenden voraussetzen, daß das Pendel hinreichend stark gedämpft ist, so daß man den Einfluß der Eigenbewegung vernachlässigen kann.

Dann kann die Bewegung des Pendels bei einer harmonischen Bodenbewegung

$$x = x_m \sin(pt + \delta),$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p}$$

ist, durch folgende Gleichung ausgedrückt werden

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\}. \tag{95}$$

Diese Bewegung kann man mechanisch oder optisch registrieren.

Bezeichnet man mit L die Entfernung der auf dem berußten Papier registrierenden Feder von der Drehungsachse des Pendels und mit y den Ausschlag der Feder auf der Trommel von ihrer normalen Lage beim Gleichgewichtszustande des Pendels aus gerechnet, so ergibt sich für kleine Werte des Winkels θ

$$\theta = \frac{y}{L}.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formel (95) ein, so erhält man

$$y = \frac{L}{l} \cdot x_m \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\}. \tag{103}$$

Im Falle der optischen Registrierung ist L, wie wir früher gesehen haben (Formel (23) des IV. Kap.), die doppelte Entfernung A des in der Nähe der Drehungsachse des Pendels befestigten Spiegels von der Oberfläche, wenn der Strahl normal auffällt.

$$L = 2A. \tag{104}$$

Digitized by Google

Die optische Registrierung hat, wie wir wissen, folgende Vorzüge vor der mechanischen:

1. die Hebellänge verdoppelt sich,
2. die Hebellänge kann man nach Belieben vergrößern,
3. die Bewegung des Lichtpunktes geschieht fast streng normal zur Zeitachse,
4. sie ist reibungslos.

Der zuletzt genannte Umstand ist am wesentlichsten, denn der Hauptmangel der mechanischen Registrierungsart besteht darin, daß bei ihr die Reibung der Schreibfeder an dem berußten Papier hinzutritt. Infolgedessen muß man in die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels einige Korrektionsglieder einführen.

Wir werden nun im weiteren voraussetzen, daß die Bewegung des Pendels optisch registriert wird, wobei wir unter L die doppelte Entfernung A verstehen wollen.

Die Formel (103) zeigt uns, daß bei harmonischer Bodenbewegung das Pendel auch eine einfache Sinuslinie mit der Periode T_p, die der Periode der entsprechenden seismischen Welle gleich ist, beschreibt. Diese Periode kann daher unmittelbar aus dem Seismogramm entnommen werden.

Wir bezeichnen die maximale Amplitude der Ausschläge des Pendels mit y_m. Dann haben wir

$$y_m = \frac{L}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} x_m \tag{105}$$

oder

$$x_m = \frac{l}{L} \cdot (1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)} \cdot y_m . \tag{106}$$

Diese letzte Formel dient als Grundlage für die Bestimmung der maximalen Amplitude der Bodenbewegung x_m.

Dazu müssen wir noch folgende vier Pendelkonstanten kennen:

1. die reduzierte Pendellänge l,
2. die Hebellänge L,
3. die Dämpfungskonstante μ^2 und
4. die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung $T = \frac{2\pi}{n}$.

Die letzte Größe ist zur Bestimmung von $u = \frac{T_p}{T}$ nötig.

Entnimmt man T_p und y_m aus den Seismogrammen, so kann man x_m bestimmen.

Zur Erleichterung dieser Berechnungen gibt es verschiedene Hilfstabellen („Seismometrische Tabellen“); es genügt, die Berechnungen mit vierstelligen Logarithmen auszuführen.

Tabelle II der S. T. gibt die Größen u für verschiedene Werte von T, von $T = 10{,}1$ Sek. bis $T = 30{,}0$ Sek., für ein jedes Zehntel der Sekunde, und für verschiedene Werte von T_p, von $T_p = 1$ Sek. bis $T_p = 40$ Sek.

Die Korrektionen für die Zehntel von T_p werden durch Interpolation bestimmt, wozu die Hilfstabelle XVII der Proportionalteile dient. Es genügt,

Digitized by Google

die Perioden T und T_p mit einer Genauigkeit von einer Einheit der ersten Dezimale der Sekunde anzugeben.

Tabelle III gibt die Größen $\log(1+u^2)$ und Tabelle IV die Größen $\log f(u) = \log\left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2$ (Formel (89)), von $u = 0{,}01$ an bis $u = 4{,}00$.

Zur weiteren Erleichterung der Berechnungen ist noch die Tabelle V da, die die Größen $\log U$

$$U = (1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)} \tag{107}$$

für verschiedene Werte von u gibt, nämlich von $u = 0{,}01$ an bis $u = 2{,}00$ und für verschiedene Werte von μ^2.

Im ersten Teile der Tabelle sind die Werte von μ^2 gegeben, von $\mu^2 = -0{,}10$ bis $\mu^2 = +0{,}20$, und im zweiten von $\mu^2 = 0{,}60$ bis $\mu^2 = 0{,}90$, und zwar für jedes Hundertstel.

Die ersten Zahlen entsprechen den stark gedämpften Pendeln, wobei die negativen Werte von μ^2 und $\mu^2 = 0$ den aperiodischen Apparaten entsprechen; für $\mu^2 = +0{,}20$ ist das Dämpfungsverhältnis $v = 536$.

Die im zweiten Teile gegebenen Zahlen entsprechen den Pendeln mit schwächerer Dämpfung, die hauptsächlich in Deutschland angewandt werden, nämlich (Tabelle I „Seismometrische Tabellen")

für $\mu^2 = 0{,}60$

$$v = 13{,}0$$

und für $\mu^2 = 0{,}90$

$$v = 2{,}85.$$

Mit Hilfe dieser Tabellen ist die Bestimmung der maximalen Amplitude der wahren Bodenbewegung x_m aus den Seismogrammen sehr einfach und bietet keinerlei Schwierigkeiten.

Die Interpolation für die dritte Dezimale der Werte v geschieht mit Hilfe derselben Tabellen XVII. Es genügt, μ^2 mit einer Genauigkeit bis auf die zweite Dezimale zu kennen.

Ist das Pendel genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt, so ist $\mu^2 = 0$ und die Formel (106) nimmt folgende sehr einfache Form an:

$$x_m = \frac{l}{L}(1+u^2)\cdot y_m. \tag{108}$$

Ist diese Grenze überschritten, so ist $\varepsilon > n$ und nach den Formeln (56) und (57) $h > 1$ und $\mu^2 < 0$.

Es entsprechen folglich die negativen Werte μ^2 dem Falle einer aperiodischen Eigenbewegung des Pendels, wo θ nicht durch eine trigonometrische, sondern eine Exponentialfunktion ausgedrückt ist (Formel (28), wo α_1 und α_2 reell sind).

Auch in diesem Falle ist die Formel (106) gültig, nur soll hier anstatt $-\mu^2$ gesetzt werden $+\mu^2 = h^2 - 1 = \left(\frac{\varepsilon}{n}\right)^2 - 1$.

Man kann sich leicht davon überzeugen, wenn man alle Ableitungen des § 3 unter der Voraussetzung, daß die Eigenbewegung des Pendels aperiodisch ist, wiederholt.

Digitized by Google

Viel einfacher kann man jedoch die Richtigkeit des gesagten wie folgt beweisen.

Wir setzen voraus, daß in Formel (27) und (28) $\varepsilon > n$ ist.

Setzt man

$$h = \frac{\varepsilon}{n} \cdots \text{(Formel (56))},$$

so hat man

$$\alpha_1 = \varepsilon + n\sqrt{h^2 - 1},$$

$$\alpha_2 = \varepsilon - n\sqrt{h^2 - 1},$$

oder

$$\alpha_1 = \varepsilon + ni\sqrt{1 - h^2},$$

$$\alpha_2 = \varepsilon - ni\sqrt{1 - h^2},$$

und

$$\theta = A_1 e^{-\alpha_1 t} + A_2 e^{-\alpha_2 t}.$$

Führt man folgende rein algebraische Bezeichnung ein

$$n\sqrt{1 - h^2} = \gamma, \tag{109}$$

so kann θ folgendermaßen ausgedrückt werden:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t].$$

Wir haben also θ auf die Form (37) gebracht, von der wir bei unserer Analyse der Pendelbewegung unter dem Einflusse von Bodenverschiebungen ausgegangen sind.

Nach der Beziehung (58) ist

$$\frac{\gamma^2}{n^2} = \mu^2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel (109), so findet man

$$1 - h^2 = \mu^2$$

oder

$$\mu^2 = -(h^2 - 1) \tag{110}$$

Im Falle der aperiodischen Bewegung des Pendels ist also μ^2 negativ, wenn $h > 1$ ist; die Schlußfolgerung wird dadurch nicht geändert, wenn man in die Formel (106) statt $\mu^2 = 1 - h^2$ (für periodische Pendelbewegungen) einsetzt $-\mu^2 = h^2 - 1$ (für aperiodische Bewegungen).

Folglich ist die Formel (106) eine allgemeine und bewahrt ihre Gültigkeit, ganz gleich, ob die Eigenbewegung des Pendels eine periodische ist, oder nicht, d. h. ob μ^2 positiv oder negativ ist. Man muß nur bei der Benutzung dieser Formel μ^2 immer mit dem zugehörigen Zeichen einführen.

Es lassen sich also aus einem von einem gedämpften Pendel aufgezeichneten Seismogramm sehr leicht die Elemente der wahren harmonischen Bodenbewegung T_p und x_m bestimmen.

Wenn die Elemente (T_p und x_m) der seismischen Wellen längere Zeit konstant wären, so würde die Anwendung starker Dämpfung gar nicht erforderlich sein, denn Formel (106) bleibt für kleine und große Werte von μ^2 gültig.

Die seismischen Wellen behalten jedoch selten ihre Form mehrere Perioden lang hintereinander bei, so daß deswegen eine starke Dämpfung anzuwenden ist. Wir erreichen dadurch ja, daß der Einfluß der Eigenbewegung des Apparates sich weniger geltend macht und die Glieder mit dem Faktor $e^{-\varepsilon t}$ in der Formel (93) schneller auch schon bei kleinen Werten der Zeit t verschwinden.

Es ist jedoch nicht notwendig, zu negativen Werten von μ^2 überzugehen, d. h. ε größer als n zu machen, denn unter sonst gleichen Bedingungen vermindert die starke Dämpfung die Empfindlichkeit des Apparates. Es genügt, $\mu^2 = 0$ zu setzen, d. h. das Pendel auf die Grenze der Aperiodizität einzustellen; es sind auch die verschiedenen Formeln und die Berechnungen selbst bedeutend einfacher.

Dieser Bedingung wird möglichst Genüge zu leisten versucht durch die Typen von Seismographen mit galvanometrischer Registrierung, die auf der seismischen Station in Pulkovo aufgestellt sind.

Mißt man die Amplitude y_m irgendeines Maximums M auf dem Seismogramm und die entsprechende Periode der seismischen Welle T_p, so kann man auch den entsprechenden Moment t_m (für M) bestimmen. Diese Größe wird auch unmittelbar aus dem Seismogramm entnommen.

Nach der Formel (95) entspricht dieser Moment dem Falle

$$\sin\{p(t_m - \tau) + \delta\} = \pm 1;$$

die maximale Verschiebung x_m aber entspricht dem Momente t_{x_m}, wenn

$$\sin(p t_{x_m} + \delta) = \pm 1.$$

Folglich existiert immer zwischen den beiden Momenten eine Differenz τ. Also

$$t_{x_m} = t_m - \tau, \tag{111}$$

wo τ, wie wir gesehen haben, immer positiv ist.

Unter Berücksichtigung, daß $p = \frac{2\pi}{T_p}$ ist, haben wir aus den Formeln (91) und (92)

$$\frac{\tau}{T_p} = \frac{1}{2\pi} \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2 - 1}\right\}. \tag{112}$$

Die Verspätung τ hängt also nicht nur von der Periode der seismischen Welle T_p ab, sondern auch von den Konstanten des Seismographen selbst, also von μ^2 und T, denn es ist $u = \frac{T_p}{T}$.

Man erhält deswegen mit verschiedenen seismischen Apparaten auch verschiedene Momente t_m, wenn auch der Moment t_{x_m} für alle Apparate

Digitized by Google

derselbe war, und es folgt daraus, daß man bei der Vergleichung der Momente des Einsatzes irgendeines Maximums auf den Seismogrammen, das von verschiedenen Stationen oder auf derselben Station von verschiedenen Apparaten aufgezeichnet wurde, nicht unmittelbar die Momente t_m untereinander vergleichen kann, sondern daß man immer zu den Momenten t_{x_m} des Maximums der wahren Bodenverschiebung übergehen muß und nur diese Momente vergleichen kann. Sonst würde man sehr leicht bei der Untersuchung der Fragen nach der Fortpflanzung der seismischen Wellen zu ganz falschen Folgerungen und Schlüssen kommen, besonders dann, wenn die Stationen nicht weit voneinander entfernt liegen.

Leider wird diese Korrektion für die Verspätung der Aufzeichnung des Apparates bisher (1911) nur in Pulkovo berücksichtigt, obwohl sie in der Mehrheit der Fälle nicht zu vernachlässigen ist. Denn es beträgt z. B. für ein Pendel mit der Eigenperiode $T = 30$ Sek., bei schwacher Dämpfung $\mu^2 = 0{,}90$ und für eine Periode der seismischen Welle $T_p = 24^s{,}1$ die Größe $\tau = 8^s{,}4$ (Maximum).

Eine solche Korrektion darf bei der gegenwärtigen Genauigkeit der seismometrischen Beobachtungen nicht mehr außer acht gelassen werden, und es wäre angebracht, in den seismischen Berichten zugleich mit den Größen T_p und x_m nicht die Momente t_m der Maxima auf den Seismogrammen, sondern die Momente der Maxima der wahren Bodenverschiebung t_{x_m} anzugeben.

Die Korrektion $\frac{\tau}{T_p}$ kann sehr einfach mittels der Größen μ^2 und u nach der Formel (112) berechnet werden.

Zur Erleichterung der Bestimmung der Korrektion τ ist in den „Seismometrischen Tabellen" die Tabelle VI gegeben, aus der die Größe $\frac{\tau}{T_p}$ entnommen werden kann. Diese Tabelle hat zwei Argumente μ^2 und u, die in Zehnteln fortschreiten, und zwar μ^2 von $-0{,}2$ bis $+0{,}9$ und u von 0,1 bis 4,0.

Multipliziert man die gefundene Größe $\frac{\tau}{T_p}$ mit T_p, so erhält man sogleich die gesuchte Korrektion τ.

Die Vergrößerung des Pendels.

Unter der Vergrößerung eines jeden Seismographen versteht man das Verhältnis der maximalen Amplitude der Aufzeichnung des Seismographen zu der entsprechenden maximalen Amplitude der wahren Bodenverschiebung. Diese Vergrößerung bezeichnet man gewöhnlich mit $\mathfrak{V}$.

Dieser Definition gemäß haben wir nach den Formeln (106) und (107)

$$\mathfrak{V} = \frac{y_m}{x_m} = \frac{L}{l} \cdot \frac{1}{U}. \tag{113}$$

Je größer $\mathfrak{V}$ ist, desto empfindlicher ist der Seismograph.

Digitized by Google

Es ist ferner nach Formel (107)

$$U = (1 + u^2) \cdot \sqrt{1 - \mu^2 f(u)}. \tag{107}$$

Bei $T_p = 0$ oder $u = 0$, d. h. für unendlich kurze seismische Wellen ist $f(u) = 0$ (Formel (89)) und $U = 1$. Die entsprechende Größe $\mathfrak{V}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}_0$. Dann ist

$$\mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l}. \tag{114}$$

Diese Vergrößerung $\frac{L}{l}$ heißt die normale Vergrößerung des Pendels. Sie entspricht sehr schnellen Bodenschwingungen, für die man annehmen kann, daß das Schwingungszentrum des Pendels nahezu unbeweglich bleibt. In diesem Falle ist, wie wir früher gesehen haben (Formel (3) § 2 Kap. IV und Fig. 45) die Vergrößerung des Apparates, d. h. das Verhältnis der Ausschlagsamplitude des Pendels auf der Registriertrommel zu der wahren Bodenverschiebung gleich $\frac{L}{l}$. Die Fig. 45 bezog sich allerdings auf ein einfaches Vertikalpendel, offenbar bleibt sie jedoch auch für Horizontalpendel gültig.

Um die normale Vergrößerung des Apparates zu erhöhen, hat man also entweder L zu vergrößern oder die reduzierte Pendellänge l zu verkleinern.

Die Formel (113) zeigt uns, daß die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ des Apparates überhaupt keine konstante Größe ist, sondern sie erscheint bei einer gegebenen Größe der Dämpfungskonstante μ^2 als eine Funktion von u, d. h. die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ variiert zugleich mit der Periode T_p der entsprechenden seismischen Welle. Diese Abhängigkeit der Vergrößerung von der Periode T_p stellt zweifellos einen Mangel des Horizontalpendels dar, aber dieser Mangel ist allen Typen von Seismographen, die eine bestimmte Eigenperiode haben, eigen und nicht zu vermeiden. Kennt man die Konstanten des Apparates, so ist dieser Umstand leicht zu berücksichtigen, und es ist dann in einfacher Weise möglich, bei der Bearbeitung der Seismogramme die Vergrößerung, die der betreffenden Periode der seismischen Welle entspricht, zu bestimmen.

Die Veränderlichkeit von $\mathfrak{V}$ wird durch den Gang der Funktion U bedingt. $\mathfrak{V}$ ist Maximum, wenn U Minimum (U_m) ist. Wir wollen U_m aufsuchen.

Berücksichtigt man die Beziehung (89), nach welcher

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2$$

ist, so hat man

$$U = \sqrt{(u^2 + 1)^2 - 4\mu^2 u^2} \tag{115}$$

oder

$$U = \sqrt{(u^2 - 1)^2 + 4(1 - \mu^2)u^2}. \tag{116}$$

Digitized by Google

Wir bilden nun $\frac{\partial U}{\partial u}$ und setzen es dann gleich Null.

$$\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{2(u^2-1)u + 4(1-\mu^2)u}{\sqrt{(u^2-1)^2+4(1-\mu^2)u^2}} = \frac{2u}{\sqrt{(u^2-1)^2+4(1-\mu^2)u^2}}[u^2+1-2\mu^2]. \quad (117)$$

Bezeichnen wir die Wurzel der Gleichung $\frac{\partial U}{\partial u} = 0$ mit u_m, so haben wir

$$u_m = \sqrt{2\mu^2-1}. \quad (118)$$

Folglich

$$u_m^2 + 1 = 2\mu^2$$

und nach der Formel (115)

$$U_m = \sqrt{4\mu^4 - 4\mu^2(2\mu^2-1)}$$

oder

$$U_m = 2\mu\sqrt{1-\mu^2}. \quad (119)$$

Die Formel (118) zeigt uns, daß die Funktion U ein Minimum und folglich auch ein Maximum nur in den Fällen haben kann, wenn

$$\mu^2 \geqq \tfrac{1}{2}.$$

Dem kritischen Wert $\mu^2 = \frac{1}{2}$ entspricht nach der Tabelle I der „Seismometrischen Tabellen" folgender Wert für das Dämpfungsverhältnis:

$$v = 23{,}1.$$

In diesem Falle ist

$$u_m = 0$$

und

$$U_m = \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} = 1.$$

Bei den Werten $\mu^2 < \frac{1}{2}$, d. h. bei einer stärkeren Dämpfung, ist die Derivierte $\frac{\partial U}{\partial u}$ nach Formel (117) immer positiv, und $\mathfrak{V}$ nimmt deswegen mit der Zunahme von u stetig ab.

Bei den Werten $\mu^2 > \frac{1}{2}$, d. h. bei den Apparaten mit einer schwächeren Dämpfung, geht $\mathfrak{V}$ durch ein Maximum $\mathfrak{V}_m$, wobei

$$\mathfrak{V}_m = \frac{\mathfrak{V}_0}{2\mu\sqrt{1-\mu^2}} \quad (120)$$

ist. Je näher μ^2 der Einheit ist, d. h. je schwächer die Dämpfung ist, desto größer wird $\mathfrak{V}_m$.

An der Grenze, bei $\mu^2 = 1$, wenn also der Apparat völlig ungedämpft ist, wird $\mathfrak{V}_m = \infty$.

In diesem Falle ist der Formel (118) gemäß

$$u_m = 1.$$

Digitized by Google

Dieser Fall entspricht voller Resonanz.

Da bei $u = 0$, $f(u) = 0$ ist, so ist außerdem nach Formel (115) bei sehr kurzen Wellen $U = 1$ und $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0$ für beliebige Werte der Dämpfungskonstante μ^2.

Die Formel (115) zeigt uns noch, daß U bei der angegebenen Größe von u mit der Abnahme von μ^2, d. h. mit der Vergrößerung der Dämpfung, zunimmt und folglich $\mathfrak{V}$ abnimmt. Bei negativen Werten von μ^2, d. h. bei aperiodischen Pendeln, wird $\mathfrak{V}$ noch kleiner sein. Folglich sind unter sonst gleichen Bedingungen, d. h. bei gleichen Werten L, l und T und bei derselben Periode der seismischen Welle T_p, die stark gedämpften Pendel weniger empfindlich.

Das ist eine Schattenseite der starken Dämpfung, die aber, da die starke Dämpfung, wie wir gesehen haben, so viele unbestreitbare theoretische und praktische Vorteile besonders hinsichtlich der schnellen Eliminierung des Einflusses der Eigenbewegung des Apparates bietet, nicht so sehr ins Gewicht fällt. Wendet man bei dem Horizontalpendel die galvanometrische Registrierungsart an, so kompensiert sich der Verlust an Empfindlichkeit, der von der starken Dämpfung verursacht worden ist, völlig, da man sogar bei voller Aperiodizität des Instrumentes sehr große Werte für die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ erreichen kann. Hierauf werden wir noch im folgenden Kapitel zurückkommen.

Um die Abhängigkeit der Vergrößerung $\mathfrak{V}$ von der Dämpfungskonstante μ^2 wie auch von der Periode der seismischen Welle T_p zu erläutern, wollen wir den konkreten Fall eines Pendels mit der Eigenperiode (ohne Dämpfung) T von 12 Sek. betrachten, und die Änderung $\mathfrak{V}$ mit der Änderung T_p von 1 Sek. an bis 40 Sek. feststellen bei den folgenden fünf Werten von μ^2, denen die angeführten Größen des Dämpfungsverhältnisses v entsprechen.

μ^2	v
0,90	2,85
0,79	5,05
0,67	9,07
0,50 (kritischer Wert)	23,1
0 (aperiodisches Pendel)	∞.

Da $\mathfrak{V}$ noch von dem Verhältnis $\frac{L}{l}$ abhängt, so ist es zweckmäßig, unmittelbar die Größen $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_0}$ oder $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ zu vergleichen, wo $\mathfrak{V}_1$ den Wert von $\mathfrak{V}$ für $T_p = 1$ Sek. darstellt. Den entsprechenden Wert U bezeichnen wir mit U_1 (für $T_p = 1$ Sek.).

Dann haben wir auf Grund der Formel (113)

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = \frac{U_1}{U}.$$

Digitized by Google

U_1 unterscheidet sich sehr wenig von 1, wie aus den folgenden Zahlen hervorgeht, die $T_p = 1$ Sek. bei $T = 12$ Sek. entsprechen.

μ^2	U_1
0,90	0,995
0,79	0,996
0,67	0,997
0,50	1,000
0	1,007.

Die größten möglichen Werte des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$ und die zugehörigen $(T_p)_m$ werden nach den Formeln für U_m und u_m bestimmt, wo $u = \frac{T_p}{12}$ ist (Formel (119) und (118)).

Führt man die Berechnungen aus, so erhält man folgende Zahlen:

μ^2	$\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$	$(T_p)_m$
0,90	1,658	10,7 Sek.
0,79	1,223	9,1
0,67	1,060	7,0
0,50	1,000	1
0	1,000	1

In der folgenden Tabelle VI sind verschiedene Werte des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ für 40 verschiedene Werte von T_p aufgeführt. Diese Tabelle zeigt anschaulich, wie die Vergrößerung des Apparates sich mit der Periode der seismischen Welle und der Größe der Dämpfungskonstante μ^2 verändert.

In Fig. 113 sind diese Zahlen graphisch dargestellt; außerdem ist noch die dem Fall $\mu^2 = 1$ (ungedämpftes Pendel) entsprechende Kurve beigefügt.

Es ergibt sich hiernach folgendes:

Bei sehr kleinen Werten von T_p ist die Empfindlichkeit der Pendel mit verschiedener Dämpfung gleich groß ($\mathfrak{V}_1$ kann man fast als gleich für verschiedene Werte von μ^2 annehmen (siehe die vorhergehenden Werte U_1)).

Mit der Zunahme von T_p nimmt die Empfindlichkeit der Pendel mit schwacher Dämpfung (bei $\mu^2 > \frac{1}{2}$) zu, erreicht ein Maximum und nimmt dann allmählich wieder ab, wobei mit der Abnahme von μ^2 von 1 bis zu $\frac{1}{2}$ die Lage dieses Maximums von $u_m = 1$ bis $u_m = 0$, wo es im wesentlichen schon verschwindet (der kritische Wert des Dämpfungsverhältnisses $v = 23{,}1$), sich verlagert.

Bei stärkerer Dämpfung, d. h. bei $\mu^2 \leqq \frac{1}{2}$, nimmt die Empfindlichkeit des Apparates mit der Zunahme von T_p allmählich ab.

Bei großen Werten von T_p unterscheiden sich die Werte der Vergrößerung der Pendel mit verschiedener Dämpfung sehr wenig voneinander; es ist dann die Empfindlichkeit der Pendel überhaupt bedeutend geringer und die Dämpfungsstärke beeinflußt hier weniger die Vergrößerung $\mathfrak{V}$.

Digitized by Google

Tabelle VI.

$\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}$.

T_p μ^2	0,90	0,79	0,67	0,50	0,00
1 Sek.	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2	1,017	1,012	1,006	1,000	0,980
3	1,046	1,032	1,017	0,998	0,948
4	1,088	1,060	1,030	0,994	0,906
5	1,146	1,094	1,044	0,985	0,858
6	1,222	1,134	1,056	0,970	0,806
7	1,314	1,173	1,060	0,947	0,752
8	1,426	1,206	1,054	0,914	0,697
9	1,539	1,222	1,031	0,872	0,644
10	1,635	1,210	0,992	0,822	0,594
11	1,652	1,164	0,936	0,765	0,547
12	1,573	1,087	0,868	0,707	0,504
13	1,406	0,989	0,794	0,649	0,463
14	1,213	0,883	0,719	0,593	0,427
15	1,023	0,780	0,647	0,539	0,393
16	0,866	0,688	0,581	0,491	0,363
17	0,737	0,605	0,521	0,446	0,335
18	0,634	0,536	0,468	0,406	0,310
19	0,550	0,476	0,422	0,371	0,287
20	0,480	0,425	0,382	0,339	0,266
21	0,425	0,381	0,346	0,310	0,248
22	0,378	0,344	0,315	0,285	0,231
23	0,338	0,311	0,288	0,263	0,215
24	0,305	0,288	0,264	0,243	0,201
25	0,277	0,259	0,243	0,225	0,189
26	0,252	0,237	0,224	0,208	0,177
27	0,231	0,219	0,207	0,194	0,166
28	0,212	0,202	0,192	0,181	0,156
29	0,196	0,187	0,179	0,169	0,147
30	0,181	0,174	0,167	0,158	0,139
31	0,168	0,162	0,156	0,148	0,131
32	0,157	0,151	0,146	0,139	0,124
33	0,146	0,142	0,137	0,131	0,118
34	0,137	0,133	0,129	0,124	0,112
35	0,129	0,125	0,121	0,117	0,106
36	0,121	0,118	0,114	0,110	0,101
37	0,114	0,111	0,108	0,105	0,096
38	0,108	0,105	0,102	0,099	0,091
39	0,102	0,099	0,097	0,094	0,087
40	0,096	0,094	0,092	0,090	0,083

Bei den Pendeln mit keiner oder sehr schwacher Dämpfung hängt die Vergrößerung $\mathfrak{B}$ für alle Werte T_p in hohem Grade von der Periode der seismischen Welle ab, was sehr unbequem ist, denn die wahre Bodenbewegung kommt dadurch nur sehr verzerrt im Seismogramm zur Darstellung; es kommt noch hinzu, daß auch die Eigenbewegung verwirrend wirkt, so daß man bei einer kurzen Betrachtung des Seismogrammes kaum irgendwelche Schlüsse über die Amplituden der wahren Bodenverschiebung ziehen kann.

Digitized by Google

Wir wollen noch ein verhältnismäßig schwach gedämpftes Pendel ($v = 5{,}05$ oder $\mu^2 = 0{,}79$) mit einem aperiodischen, für welches $v = \infty$ und $\mu^2 = 0$ ist, vergleichen.

Die Zahlen der vorhergehenden Tabellen zeigen uns, daß im ungünstigsten Falle die Empfindlichkeit des aperiodischen Pendels beispiels-

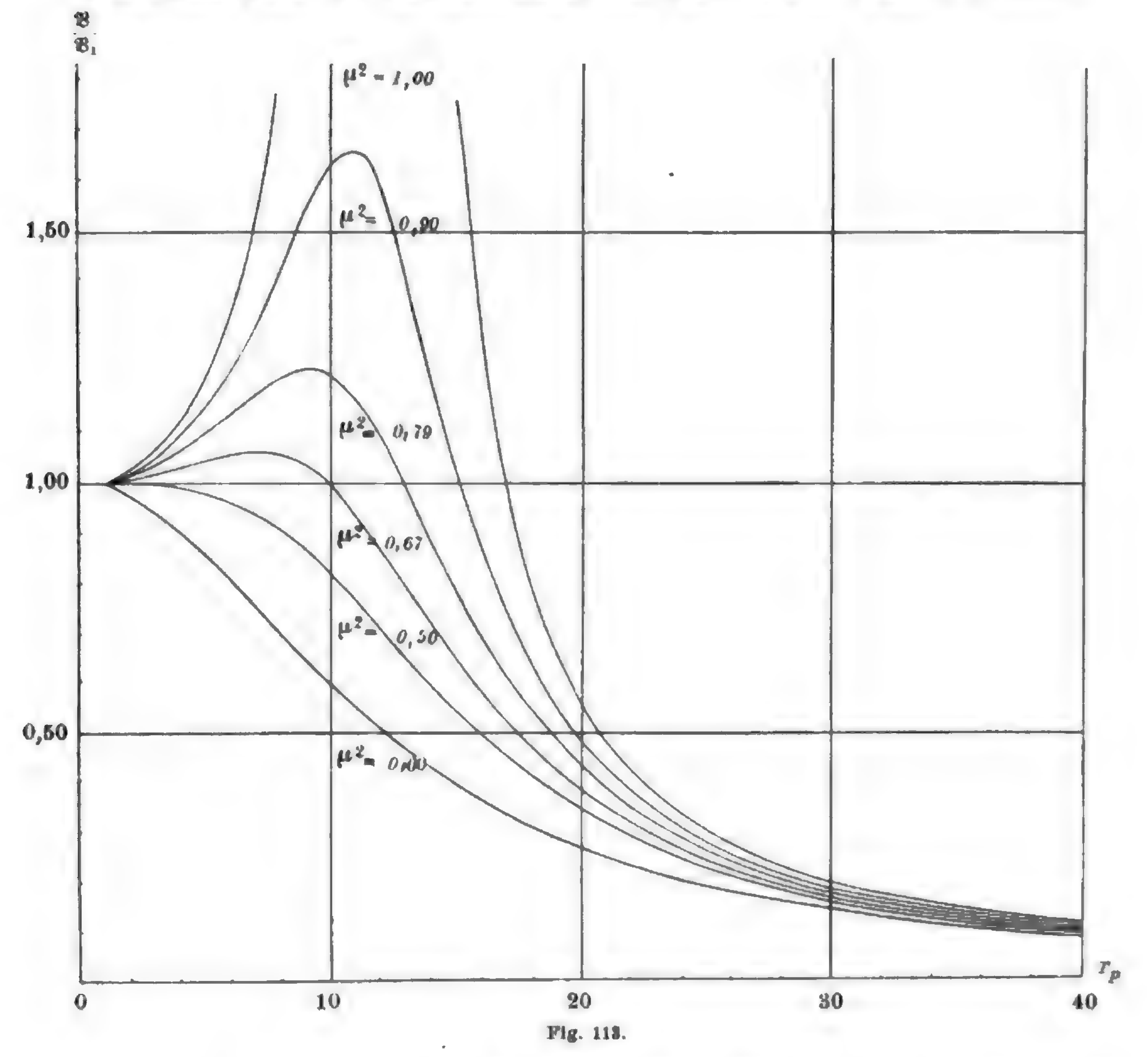


Fig. 113.

weise nur zweimal kleiner als die des schwachgedämpften ist, daß aber bei großen Werten von T_p der Unterschied in der Empfindlichkeit sehr unbedeutend ist; es ist nämlich bei $T_p = 30$ Sek. die Empfindlichkeit des zweiten Pendels 1,25-mal und bei $T_p = 40$ Sek. nur 1,13-mal kleiner als die des ersten.

Man kann überhaupt nicht allgemein behaupten, wie es zuweilen geschieht, daß die aperiodischen Pendel weniger empfindlich als die periodischen sind. Alles hängt von der Größe der Eigenperiode T des Apparates ohne Dämpfung ab.

Vergleichen wir z. B. ein Pendel mit der Eigenperiode T von 12 Sek.

Digitized by Google

bei $v = 5{,}05$ mit einem aperiodischen, für welches T (ohne Dämpfung) gleich 25 Sek. ist, was ungefähr dem Falle der Pulkovoer Horizontalseismographen entspricht und berechnen wir für den letzteren die Größen $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ für einige Werte von T_p.

Wir erhalten folgende Werte:

T_p	$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ (bei $T = 25$ Sek.)
16 Sek.	0,711
20	0,611
25	0,501
30	0,410
35	0,338
40	0,281.

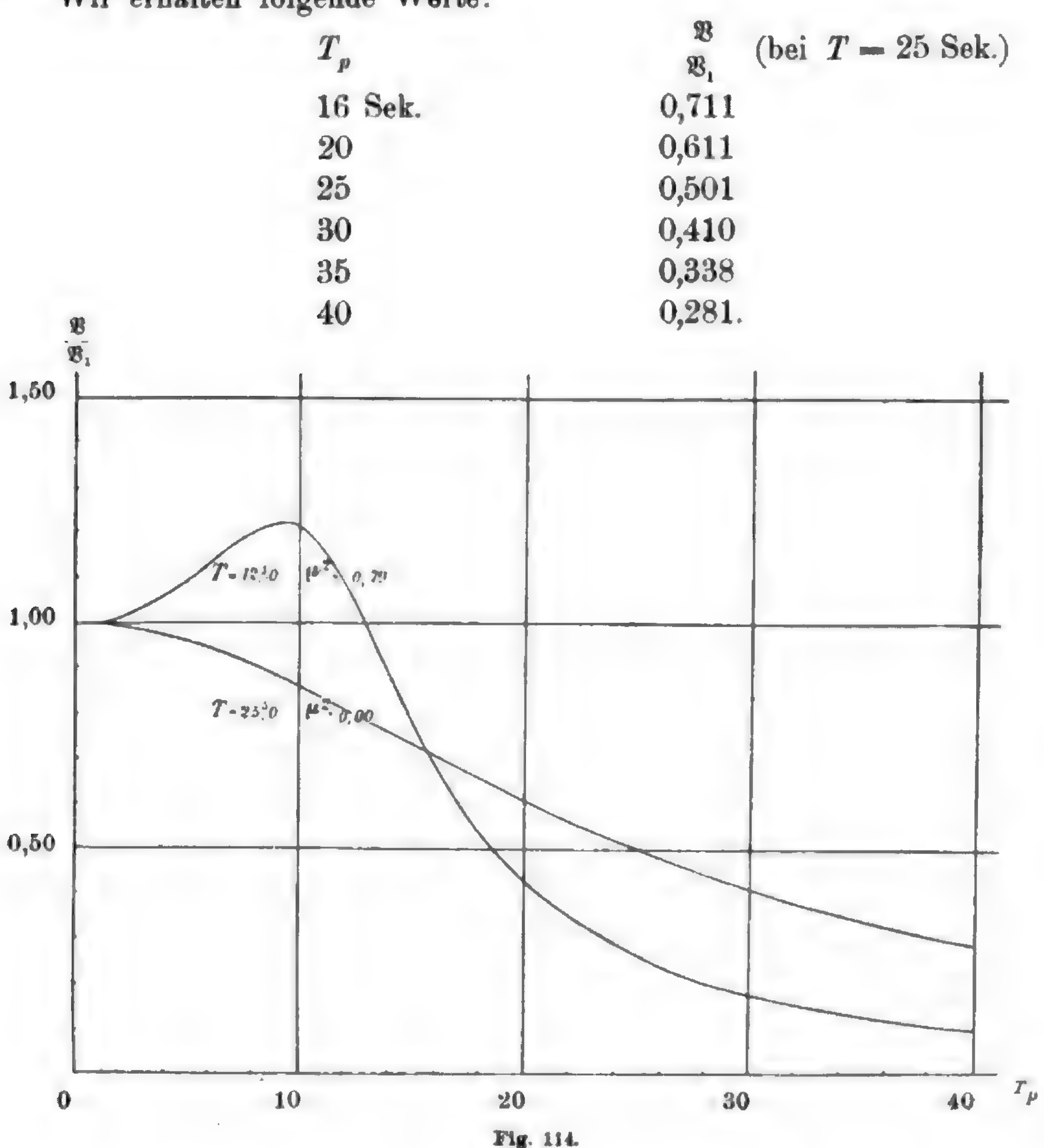


Fig. 114.

Der Gang der Veränderlichkeit $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ mit T_p ist für diese beiden Pendel ($T = 25$ Sek. und $v = \infty$, und $T = 12$ Sek. und $v = 5{,}05$ Sek.) in Fig. 114 graphisch dargestellt.

Diese Kurven wie auch die Vergleichung der eben angeführten Zahlen mit den Zahlen der dritten Kolumne der VI. Tabelle (für $\mu^2 = 0{,}79$) zeigen uns anschaulich, daß z. B. von der Periode $T_p = 16$ Sek. an das aperiodische Pendel bei $T = 25$ Sek. empfindlicher wird, als das verhältnismäßig schwach gedämpfte bei $T = 12$ Sek. Bei $T_p = 25$ Sek. ist seine Empfindlichkeit fast zweimal und bei $T_p = 40$ Sek. sogar dreimal größer.

Digitized by Google

Daraus geht klar hervor, daß man, wenn man starke Dämpfung einführen will, was in theoretischer und praktischer Hinsicht sehr zweckmäßig ist, dafür sorgen muß, daß die Eigenperiode des Apparates T vergrößert wird.

Zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir noch folgende Frage betrachten.

Wir haben soeben gesehen, daß die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ mit der Größe $u = \frac{T_p}{T}$ sich ändert, wobei in einigen Fällen diese Änderung sehr bedeutend ist.

Wir wollen nun den Wert der Dämpfungskonstanten μ^2 aufsuchen, bei dem $\mathfrak{V}$ zwischen den angegebenen Grenzen für u, z. B. zwischen $u = 0$ und $u = u_0$, wo u_0 vorläufig willkürlich ist, am wenigsten Änderungen unterworfen ist.

Bei $u = 0$, ist $\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_0 = \frac{L}{l}$ (Formel (114)).

Nach der Formel (113) ist

$$\mathfrak{V} = \frac{\mathfrak{V}_0}{U}.$$

Folglich

$$\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0 = \mathfrak{V}_0\left(\frac{1}{U} - 1\right),$$

wo

$$U = \sqrt{(u^2 + 1)^2 - 4\mu^2 u^2} \quad \text{(Formel (115))}.$$

Da wegen der Abhängigkeit von der Größe u die Differenz $\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0$ positiv oder negativ sein kann, so kommt die Frage darauf hinaus, denjenigen Wert von μ^2 zu finden, bei dem zwischen den angegebenen Grenzen $u = 0$ und $u = u_0$, die Summe

$$S = \Sigma(\mathfrak{V} - \mathfrak{V}_0)^2 \cdot \Delta u$$

ein Minimum wird.

Geht man nun von der Summe zum Integral über, so erhält man auf Grund des vorhergehenden

$$S = \mathfrak{V}_0^2 \int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right]^2 du.$$

Dieses Integral läßt sich nicht in endlicher Form angeben, da es auf elliptische Integrale führt.

Damit S ein Minimum wird, ist es notwendig, daß

$$\frac{\partial}{\partial \mu^2} \cdot \int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right]^2 du = 0$$

wird.

Aus dieser Bedingung ergibt sich

$$2\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \cdot \frac{-\frac{\partial U}{\partial \mu^2}}{U^2}\, du = 2\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \frac{2u^2}{U^3}\, du = 0$$

Digitized by Google

oder

$$\int_0^{u_0} \left[\frac{1}{U} - 1\right] \frac{u^2}{U^3}\, du = 0.$$

Dieses Integral läßt sich ebenfalls nicht in endlicher Form angeben, aber man kann für gegebene Werte von u_0 durch Quadratur den Wert des Integrals für verschiedene Werte von μ^2 bestimmen und dann durch einfache Interpolation zwischen zwei benachbarten Werten von μ^2 den Wert finden, für welchen das Integral sich in Null verwandelt.

Führt man die Berechnungen aus, so findet man folgende Werte von μ^2 und v, für welche S Minimum ist.

Grenzen für u	μ^2	v
0 u. $u_0 = 1{,}5$	0,765	5,7
0 u. $u_0 = 1$	0,665	9,3
0 u. $u_0 = 0{,}5$	0,547	17,4.

Der günstigste Wert für μ^2 hinsichtlich der Stetigkeit von $\mathfrak{V}$ hängt also ganz und gar von den gegebenen Integrationsgrenzen ab.

Sechstes Kapitel.

Die galvanometrische Registriermethode.

§ 1. Theorie des Galvanometers.

Zur Vergrößerung der Empfindlichkeit der Seismographen für die Untersuchung der schwachen Fernbeben besonders bei Anwendung aperiodischer Apparate ist es zweckmäßig, die galvanometrische Registriermethode zu benutzen. Worin diese Methode besteht und welches ihre Vorzüge vor den anderen Registriermethoden sind, haben wir schon im § 3 des IV. Kapitels auseinandergesetzt. Jetzt wollen wir eingehender die Theorie dieser Registriermethode betrachten.

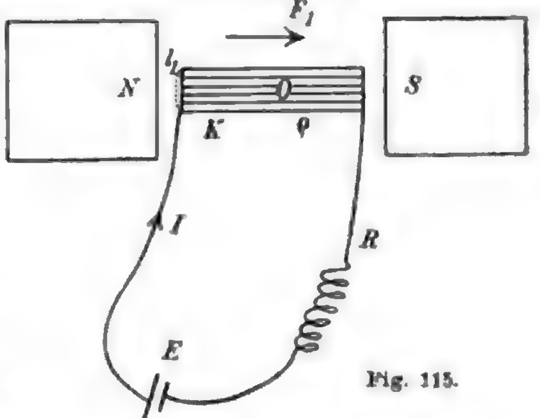
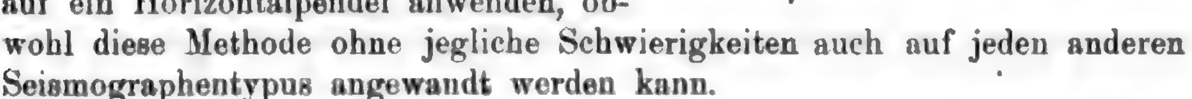


Fig. 115.

Wir werden diese Theorie wiederum auf ein Horizontalpendel anwenden, obwohl diese Methode ohne jegliche Schwierigkeiten auch auf jeden anderen Seismographentypus angewandt werden kann.



Für die galvanometrische Registrierung werden die sehr empfindlichen Drehspulengalvanometer benutzt. Die Einrichtung eines solchen Galvanometers ist in Fig. 115 schematisch dargestellt (Ansicht von oben).

Digitized by Google

Zwischen den Polen N und S eines starken hufeisenförmigen permanenten Magneten, der ein ziemlich stationäres Magnetfeld gibt, dessen Kraft wir mit F_1 bezeichnen, ist in 0 an einem dünnen Draht oder an einer schmalen, sehr dünnen Lamelle ein beweglicher Rahmen K mit einer großen Zahl von Windungen dünnen, isolierten Drahtes aufgehängt; ein solcher Rahmen stellt also ein kurzes Solenoid dar. Ist kein Strom vorhanden, so ist die Fläche der Windungen parallel zu den Kraftlinien.

Bezeichnen wir die Länge dieses Solenoids mit l_1, die Fläche einer Windung mit S_1, die Zahl der Windungen mit N_1, die Stärke des durch die Spule gehenden Stroms mit I. Ein solches Solenoid kann, wie aus der Theorie des Elektromagnetismus bekannt ist, aufgefaßt werden als ein Magnet, bei dem die magnetischen Massen an den Enden des Solenoids (die Magnetpole) konzentriert sind, wobei die magnetische Masse M_1 in jedem solchen Pol dem Produkte aus der Stromstärke mit der Fläche einer Windung und der Anzahl der Windungen, auf die Längeneinheit gerechnet, gleich ist, d. h.

$$M_1 = I S_1 \frac{N_1}{l_1}.$$

Das magnetische Moment $\mathfrak{M}_1$ eines solchen Solenoids oder eines gleichbedeutenden Magneten ist $M_1 l_1$ oder

$$\mathfrak{M}_1 = N_1 S_1 I. \tag{1}$$

Hat der Rahmen K eine größere Zahl von Windungen, so versteht man unter S_1 die Durchschnittsfläche einer Windung und unter N_1 die Gesamtzahl der Windungen.

Die Enden des Drahtes der Drehspule sind mit dem äußeren Stromkreis mittels sehr dünner Metallstreifen verbunden.

Bezeichnet man den Widerstand der Spule mit ϱ, den Widerstand des äußeren Stromkreises mit R, die äußere elektromotorische Kraft (z. B. eines galvanischen Elementes) mit E und die entsprechende Stromstärke im Kreise mit I, so ist

$$I = \frac{E}{R + \varrho}. \tag{2}$$

Unter dem Einflusse des elektrischen Stromes dreht sich die Spule um einen Winkel φ, und der Gleichgewichtszustand tritt dann ein, wenn das Moment der elektromagnetischen Kräfte dem Drehungsmomente des Fadens das Gleichgewicht hält.

Bezeichnen wir die Drehungskonstante des Fadens mit D und berücksichtigen, daß für die Drehungskräfte das Moment der drehenden Kräfte dem Drehungswinkel proportional ist, so haben wir für das entsprechende Moment den Ausdruck $D\varphi$.

Aus der Fig. 116 sieht man, daß das ablenkende Moment der elektromagnetischen Kräfte, die auf die Drehspule oder den ihr entsprechenden Magneten einwirken, dessen positiver Pol sich in M_1 befindet, ist

$$F_1 M_1 l_1 \cos\varphi = F_1 \mathfrak{M}_1 \cos\varphi. \tag{3}$$

Digitized by Google

Beschränkt man sich auf kleine Ausschlagswinkel φ, so kann man setzen

$$\cos\varphi = 1.$$

Vergleicht man die beiden Momente, so ergibt sich

$$F_1 \mathfrak{M}_1 = D\varphi$$

oder wenn man $\mathfrak{M}_1$ durch seinen Ausdruck aus der Formel (1) ersetzt

$$I = \frac{D}{F_1 N_1 S_1} \cdot \varphi.$$

Die Kombination der vor φ stehenden Größen nennt man die Konstante des Galvanometers. Wir bezeichnen sie mit C:

$$C = \frac{D}{F_1 N_1 S_1}. \tag{4}$$

Dann ist

$$I = C\varphi. \tag{5}$$

Kennt man C, so kann aus dem Ausschlagswinkel φ die Stromstärke I bestimmt werden.

C kann sehr leicht ermittelt werden, indem man durch das Galvanometer einen Strom bestimmter Stärke schickt, wobei man zweckmäßig für die Schwächung der Stromstärke einen Shunt benutzt. Je kleiner C ist, d. h. je kleiner D und je größer F_1, N_1 und S_1 sind, desto empfindlicher ist das Galvanometer.

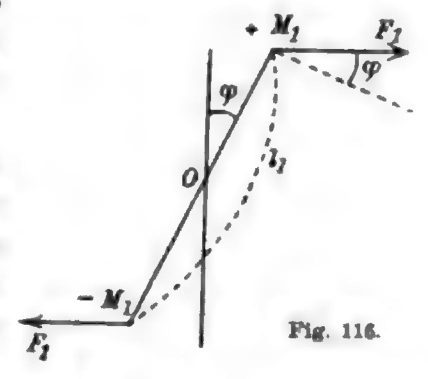


Fig. 116.

Solche Drehspulgalvanometer besitzen bei passender Wahl der in dem Ausdruck C enthaltenen Größen eine sehr große Empfindlichkeit, so daß sich ihre Verwendung bei der galvanometrischen Registrierung der Bewegung der Seismographen sehr empfiehlt.

Nachdem wir die Bedingung des Gleichgewichts des Galvanometers untersucht haben, wollen wir jetzt die Gleichung seiner Bewegung ableiten.

Ein solches Galvanometer bildet ein festes System, das eine bestimmte (vertikale) Drehungsachse besitzt. Wir können auf dasselbe daher das Grundtheorem der Mechanik anwenden (Formel (4) des vorhergehenden Kapitels), nach dem das Trägheitsmoment des Systems, multipliziert mit der Winkelbeschleunigung dem Momente aller auf das System einwirkenden Kräfte gleich ist.

Bezeichnet man das Trägheitsmoment der Drehspule in bezug auf die Drehungsachse mit K_1 und das Moment aller Kräfte mit $\mathfrak{M}$, so hat man

$$K_1 \varphi'' = \mathfrak{M}. \tag{6}$$

Der Ausdruck $\mathfrak{M}$ enthält zunächst das durch die äußere elektromotorische Kraft E bedingte Moment $F_1 \mathfrak{M}_1$. Auf Grund der Formel (1) und (2) haben wir

$$F_1 \mathfrak{M}_1 = F_1 N_1 S_1 \frac{E}{R + \varrho}. \tag{7}$$

Dieses Moment ist positiv, weil es die Winkelgeschwindigkeit φ' zu vergrößern strebt.

Weiter enthält der Ausdruck das Drehungsmoment des Fadens $D\varphi$, das immer negativ ist, denn es strebt die Spule in die Gleichgewichtslage zurückzubringen.

Außerdem enthält das vollständige Moment $\mathfrak{M}$ noch ein anderes negatives Glied.

Ist die Spule von ihrer Gleichgewichtslage um den Winkel φ abgelenkt, so ist der Strom Q_1 der magnetischen Kraft F_1 des permanenten Magneten des Galvanometers, welche die Spule durchdringt, gleich dem Produkte der gesamten Fläche der Spule $N_1 S_1$ mit der Projektion der Kraft F_1 auf die Richtung senkrecht zu den Flächen S_1.

Aus der Fig. 117 sieht man, daß

$$Q_1 = F_1 N_1 S_1 \sin\varphi.$$

Aus dem Grundtheorem der Theorie der elektromagnetischen Induktion wissen wir, daß, wenn in irgendeinem geschlossenen Kreise der Kraftstrom, der irgendeinen Teil seiner Fläche durchdringt, sich ändert, in diesem Kreise dann eine elektromotorische Kraft E_1 auftritt, die der Geschwindigkeit der Änderung dieses Stromes, also der ersten Derivierten von Q_1 nach der Zeit proportional ist, wobei nach dem Lenzschen Gesetz der entsprechende Induktionsstrom I_1 so gerichtet ist, daß er den Ursachen, welche ihn veranlassen, entgegenwirkt, oder anders ausgedrückt, die Arbeit des Induktionsstroms und das entsprechende Drehungsmoment sind immer negativ.

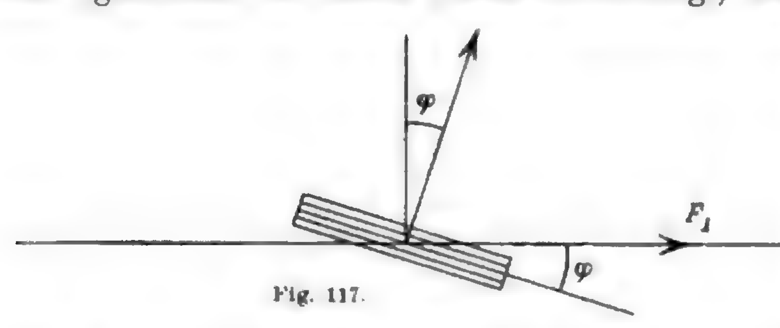


Fig. 117.

$$I_1 = -\frac{E_1}{R+\varrho} = -\frac{\frac{\partial Q_1}{\partial t}}{R+\varrho}$$

oder wenn man $\cos\varphi = 1$ setzt

$$I_1 = -\frac{F_1 N_1 S_1}{R+\varrho}\cdot\varphi'.$$

Das entsprechende Moment eines neuen Induktionsstromes kann also auf Grund der Formeln (1) und (3) ($\cos\varphi = 1$) auf folgende Form gebracht werden

$$-F_1^2\frac{[N_1 S_1]^2}{R+\varrho}\cdot\varphi'.$$

Dies Moment ist zu der Winkelgeschwindigkeit φ' streng proportional. Folglich ist das gesamte Drehungsmoment

$$\mathfrak{M} = F_1 N_1 S_1 \frac{E}{R+\varrho} - D\varphi - F_1^2\frac{[N_1 S_1]^2}{R+\varrho}\varphi'.$$

Digitized by Google

Zu diesem Moment sind noch das Moment anderer Widerstandskräfte, so der Reibung und des Luftwiderstandes hinzuzufügen, die für kleine Geschwindigkeiten von φ' als proportional zu diesem angenommen werden können.

Dieses stets negative Moment ist jedenfalls in dem Vergleich zu dem Momente der anderen wirkenden Kräfte sehr klein. Wir setzen es gleich

$$-b_0\varphi',$$

wo b_0 eine konstante Größe ist.

Nachdem wir den Ausdruck für das Moment $\mathfrak{M}$ durch dieses neue Glied ergänzt haben, setzen wir $\mathfrak{M}$ in die allgemeine Formel (6) ein und erhalten unter Vernachlässigung der Selbstinduktion, deren Einfluß unbedeutend ist, folgende Grundgleichung:

$$K_1\varphi'' = F_1 N_1 S_1 \frac{E}{R+\varrho} - D\varphi - \left[b_0 + F_1^2\frac{(N_1 S_1)^2}{R+\varrho}\right]\varphi'.$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Galvanometers.

Nun dividieren wir diese Gleichung durch K_1 und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$n_1^2 = \frac{D}{K_1} \tag{8}$$

$$c_0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{b_0}{K_1} \tag{9}$$

$$c = \frac{1}{2}\cdot\frac{F_1^2}{K_1}[N_1 S_1]^2 \tag{10}$$

und

$$\varepsilon_1 = c_0 + \frac{c}{R+\varrho}. \tag{11}$$

Dann erhalten wir schließlich

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = \frac{F_1 N_1 S_1}{K_1}\cdot\frac{E}{R+\varrho}. \tag{12}$$

Die Differentialgleichung der Bewegung des Galvanometers ist hiermit auf die bekannte kanonische Form gebracht.

Im Gleichgewichtszustand, d. h. wenn $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ ist, gibt die Formel (12)

$$\frac{E}{R+\varrho} = I = \frac{n_1^2 K_1}{F_1 N_1 S_1}\varphi = \frac{D}{F_1 N_1 S_1}\varphi,$$

d. h. wir kommen zu derselben Formel für I, die wir schon früher gehabt hatten (Formel (4) und (5)).

Wir wollen nun voraussetzen, daß keine äußere elektromotorische Kraft E vorhanden und daß das Galvanometer durch einen äußeren Kreis mit dem Widerstande R kurz geschlossen ist.

Dann haben wir

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = 0. \tag{13}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Eigenbewegung des Galvanometers; sie ist identisch mit der Differentialgleichung der Eigenbewegung des Horizontalpendels. Wir können folglich die Folgerungen und Formeln des vorhergehenden Kapitels direkt benutzen, nämlich:

ist $\varepsilon_1 > n_1$, so ist die Bewegung des Galvanometers aperiodisch,

ist $\varepsilon_1 < n_1$, so ist die Bewegung periodisch mit Dämpfung (eine gedämpfte Sinusoide),

ist $\varepsilon_1 = n_1$, so befindet sich das Galvanometer streng auf der Aperiodizitätsgrenze.

Bezeichnet man die Eigenperiode des Galvanometers ohne Dämpfung mit T_1, so ergibt sich

$$T_1 = \frac{2\pi}{n_1}. \tag{14}$$

Die Dämpfungskonstante ε_1 hängt nicht nur von den Werten der Konstanten c_0 und c, sondern auch von dem Gesamtwiderstand des Kreises $R + \varrho$ ab.

Es können somit die Eigenschaften des Galvanometers durch drei konstante Größen T_1, c_0 und c, die man durch Versuch bestimmen muß und durch die Größe des Gesamtwiderstandes des Kreises $R + \varrho$ charakterisiert werden.

§ 2. **Bestimmung der Konstanten des Galvanometers.**

Für die Registrierung der Bewegung der Drehspule des Galvanometers nach der gewöhnlichen oben beschriebenen optischen Methode, oder auch für direkte Beobachtungen ist ein kleiner Spiegel an dem beweglichen Rahmen des Galvanometers befestigt.

Zum Zweck der Bestimmung der Konstanten des Galvanometers stellt man diesem Spiegel gegenüber ein Fernrohr mit horizontaler, hell beleuchteter Skala auf, deren Nullpunkt in der Mitte der Skala über dem Objektiv des Fernrohres sich befindet. Der Bequemlichkeit halber stellt man die Skala genau in einer Entfernung von 1 m vor dem Spiegel auf und stellt das Fernrohr so ein, daß in der Gleichgewichtslage des Apparates, wenn also keine Ströme die Spule durchlaufen, der Nullstrich der Skala gerade auf den vertikalen Faden im Okular des Fernrohrs fällt.

Ist nun die Spule des Galvanometers von ihrer Ruhelage um den Winkel φ abgelenkt worden, so liest man im Fernrohr den m-ten Strich der Skala ab. Die Ablesung m muß mit einer Genauigkeit von 0,1 mm geschehen; die Zehntel werden hierbei wie üblich durch Schätzung bestimmt.

Die Abhängigkeit zwischen m und φ läßt sich sehr leicht nach Fig. 118 bestimmen.

Bezeichnen wir im allgemeinen Falle die Entfernung des Spiegels von der Skala mit D, so haben wir

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{m}{D}.$$

Digitized by Google

Ist φ klein, so kann einfach gesetzt werden

$$\varphi = \frac{m}{2D}. \tag{15}$$

Im allgemeinen Falle aber ist

$$\varphi = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{m}{D}.$$

Entwickelt man den arctg einer kleinen Größe nach der bekannten Formel in eine Reihe

$$\varphi = \frac{1}{2}\left[\frac{m}{D} - \frac{1}{3}\frac{m^3}{D^3} + \frac{1}{5}\frac{m^5}{D^5} - \frac{1}{7}\frac{m^7}{D^7} + \cdots\right]$$

und bezeichnet dann mit Δm folgende Größe:

$$\Delta m = \frac{1}{3}\frac{m^3}{D^2} - \frac{1}{5}\frac{m^5}{D^4} + \frac{1}{7}\cdot\frac{m^7}{D^6} \tag{16}$$

so können wir setzen

$$\varphi = \frac{m - \Delta m}{2D}. \tag{17}$$

Um die wahre Größe von φ zu erhalten, müssen wir also von der Ablesung m die Korrektion Δm abziehen; die Δm sind in Tabelle VIII der „Seismometrischen Tabellen" für $m = 50$ mm bis $m = 400$ mm gegeben und zwar für $D = 1000$ mm.

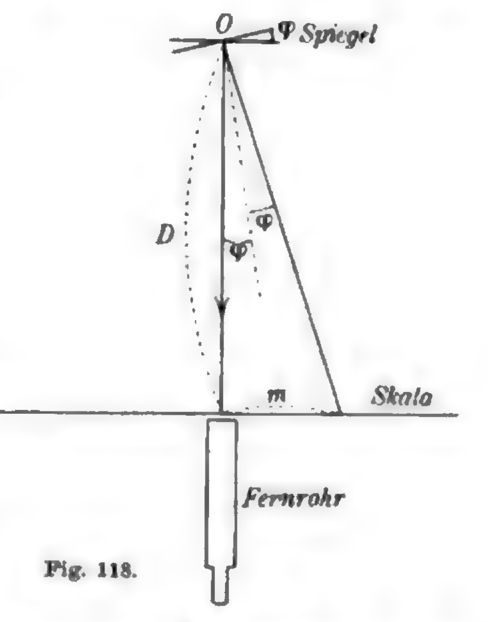


Fig. 118.

Die Korrektion wird nur von $m = 54$ mm ab, wo $\Delta m = 0{,}1$ mm ist, merklich; bei $m = 400$ mm beträgt sie jedoch schon 19,5 mm. Es ist daher zu empfehlen, sich bei den Messungen wenn möglich auf solche Werte von m zu beschränken, die 300 mm nicht übersteigen (bei $D = 1$ m).

Wir wollen nun voraussetzen, daß bei dem Galvanometer $\varepsilon_1 < n_1$ ist, seine Eigenbewegung somit eine gedämpfte Sinusoide liefert.

Um in diesem Falle, wenn also Dämpfung vorhanden ist, die Periode T_1' des Galvanometers und das entsprechende logarithmische Dekrement Λ_1 zu bestimmen, erteilt man der Drehspule einen Anstoß und bestimmt mit einem guten Sekundenzähler, dessen Korrektion genau bekannt ist, die volle Periode der Schwingungen des Galvanometers, indem man eine gewisse Anzahl seiner Durchgänge durch die Gleichgewichtslage beobachtet. Setzt man bei dem ersten Durchgang des Nullpunktes der Skala durch den Faden des Fernrohres den Sekundenzähler in Gang und hält ihn bei dem k-ten Durchgang und zwar bei der Bewegung nach derselben Seite an, dividiert die verlaufene Zeit durch die Zahl k, so ergibt sich die Eigenperiode

der Schwingungen des Galvanometers T_1' bei schwacher Dämpfung mit hinreichender Genauigkeit.

Beobachtet man zugleich eine Reihe maximaler Ausschläge des Galvanometers rechts und links, so kann man daraus die entsprechende Größe des logarithmischen Dekrements Λ_1 ermitteln. Eine jede Ablesung m muß um die zugehörige Größe Δm korrigiert werden. Im folgenden sind unter den Größen m die korrigierten Ablesungen der Skala verstanden.

Wir nehmen die absoluten Werte irgend zweier aufeinander folgender Winkelausschläge φ_k und φ_{k+1} des Galvanometers.

Dann ist

$$\Lambda_1 = \log \frac{\varphi_k}{\varphi_{k+1}} = \log \frac{m_k}{m_{k+1}}.$$

Bei der Bestimmung Λ_1 durch den Versuch verfährt man besser folgendermaßen.

Aus

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \frac{m_{k+1}}{m_{k+2}} = \frac{m_{k+2}}{m_{k+3}} = \cdots = \text{konst.}$$

haben wir

$$\frac{m_k}{m_{k+1}} = \frac{m_k + m_{k+1}}{m_{k+1} + m_{k+2}}$$

und

$$\Lambda_1 = \log(m_k + m_{k+1}) - \log(m_{k+1} + m_{k+2}). \tag{18}$$

Nimmt man die Summe der absoluten Werte benachbarter Ausschläge rechts und links, so ist damit der etwaige Fehler in der unrichtigen Annahme des Nullpunktes eliminiert, denn $m_k + m_{k+1}$ ist ja nichts anderes, als der volle Ausschlag des Instrumentes von seiner äußersten Lage rechts bis zur äußersten Lage links; in diesem Falle ist es also gar nicht nötig, daß die Gleichgewichtslage des Galvanometers dem Nullstrich der Skala entspricht.

Hat man eine Reihe aufeinander folgender Werte von m_k beobachtet, so berechnet man nach der Formel (18) die entsprechenden Größen von Λ_1, aus denen man dann das Mittel bildet. Diese Methode der Bestimmung des logarithmischen Dekrements Λ_1 ist auch deswegen bequem, weil man aus der Übereinstimmung der einzelnen Größen Λ_1 ein Urteil über die Genauigkeit der Beobachtungen gewinnt.

Man kann aber auch mit derselben Genauigkeit des Resultates allein die erste und letzte Summe berücksichtigen und hieraus Λ_1 ermitteln.

Setzen wir nämlich voraus, daß wir s verschiedene Ausschläge beobachtet haben, so haben wir

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &= \log(m_1 + m_2) - \log(m_2 + m_3) \\
\Lambda_1 &= \log(m_2 + m_3) - \log(m_3 + m_4) \\
\Lambda_1 &= \log(m_3 + m_4) - \log(m_4 + m_5) \\
&\vdots \\
\Lambda_1 &= \log(m_{s-2} + m_{s-1}) - \log(m_{s-1} + m_s).
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Bildet man nun die Summe, so ergibt sich

$$\Lambda_1 = \frac{\log(m_1 + m_2) - \log(m_{s-1} + m_s)}{s-2}. \tag{19}$$

Dies kommt also auf dasselbe hinaus, wie im ersten Falle, da sich in diesem bei der Bildung des arithmetischen Mittels alle zwischenliegenden Werte von Λ_1 gegenseitig aufheben; hier haben wir aber kein Kriterium zur Beurteilung der Übereinstimmung der einzelnen Beobachtungen.

Um dem Galvanometer einen Anstoß zu erteilen und es zum Schwingen zu bringen, kann man die folgende einfache Vorrichtung benutzen (Fig. 119).

G stellt das Galvanometer dar, K_1 und K_2 sind seine äußeren Klemmen, an denen die Enden des verbindenden Drahtes mit dem Widerstande R befestigt werden.

Zwischen denselben Klemmen legt man einen Nebenschlußkreis $K_1 A B K_2$ mit einer flachen Spule AB und einem Unterbrecher M an.

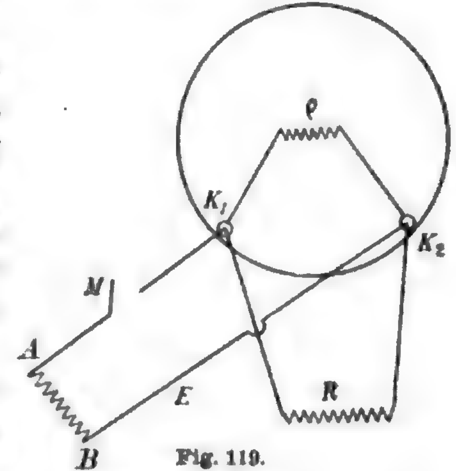


Fig. 119.

Man schließt M, legt auf die Spule AB den Pol irgendeines stabförmigen Stahlmagneten. Dann geht durch die Windungen des Galvanometers ein Induktionsstrom hindurch, welcher die Spule aus der Gleichgewichtslage bringt. Danach öffnet man den Unterbrecher M; der Widerstand des äußeren Kreises ist nach wie vor gleich R.

Wenn wir die Bestimmung des Dekrementes vorgenommen haben und dann M schließen und den Magneten wegnehmen, so erhält das Galvanometer einen Anstoß in entgegengesetzter Richtung.

Man kann aber noch einfacher verfahren.

Man läßt die flache Spule AB und den Unterbrecher M weg und führt in denselben Nebenschlußkreis, z. B. in E irgendeine elektromotorische Kraft ein, etwa ein Trockenelement; die Enden A und B läßt man frei. Faßt man diese mit den Fingern an, so geht durch das Galvanometer ein schwacher Strom hindurch, weil der Widerstand des menschlichen Körpers überaus groß ist. Die Stärke dieses Stromes kann man in gewissem Grade regulieren, indem man die Drahtenden stärker oder schwächer preßt, so daß man in dieser Weise den gewünschten anfänglichen Winkelausschlag des Galvanometers erhält. Hierauf läßt man die Enden A und B los.

So kann man T_1' und Λ_1 ermitteln. Die Beobachtungen werden in der folgenden Reihenfolge ausgeführt.

Man öffnet zuerst den äußeren Stromkreis. Dann ist $R = \infty$.

Bezeichnen wir die entsprechende Größe der Dämpfungskonstante ε_1 mit ε_0, und das logarithmische Dekrement mit Λ_0, dann ist nach der Formel (11).

$$\varepsilon_0 = c_0.$$

Digitized by Google

Sind aus dem Versuch die entsprechenden Größen T_1' und Λ_0 bestimmt worden, so finden wir nach den Formeln (52) und (54) des vorhergehenden Kapitels

$$T_1 = \frac{T_1'}{\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda_0^2}} \tag{20}$$

und

$$\varepsilon_0 = c_0 = 4{,}6052 \cdot \frac{\Lambda_0}{T_1'}. \tag{21}$$

Die zwei Galvanometerkonstanten T_1 und c_0 sind also bekannt; Λ_0 ist gewöhnlich so klein, daß T_1 sich von T_1' fast gar nicht unterscheidet.

Danach schließt man den äußeren Stromkreis durch einen bekannten Widerstand R und bestimmt nun das entsprechende logarithmische Dekrement Λ_1, weil die Eigenperiode des Galvanometers ohne Dämpfung $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ schon bestimmt worden ist. Dann haben wir nach Formel (55) des vorhergehenden Kapitels

$$\varepsilon_1 = 4{,}6052 \cdot \frac{1}{T_1} \cdot \frac{\Lambda_1}{\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda_1^2}}. \tag{22}$$

Aus dieser Formel läßt sich ε_1 bestimmen. Wir erhalten dann aus der Gleichung (11)

$$c = (\varepsilon_1 - c_0)(R + \rho). \tag{23}$$

Da der Widerstand ρ des Galvanometers bekannt ist, etwa aus Bestimmungen mit der Wheatstoneschen Brücke, so kann die dritte Galvanometerkonstante c auch nach der Formel (23) gefunden werden.

Bei diesen Beobachtungen muß eventuell auch der Widerstand der Zuleitungsdrähte berücksichtigt werden.

Zur Erleichterung dieser Rechnungen ist in den „Seismometrischen Tabellen" die Tabelle IX gegeben mit dem $\log\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}$ für $\Lambda = 0{,}001$ bis $\Lambda = 0{,}800$, was dem Dämpfungsverhältnis $v = 6{,}3$ ($\log v = \Lambda$) entspricht.

Λ (oder Λ_1) soll aus dem Versuch bis auf eine Einheit der vierten Dezimale berechnet werden. Man bestimmt deshalb die Korrektion für die vierte Dezimale des Wertes von Λ_1 durch Interpolation mit Hilfe von Tabelle XVII der Proportionalteile.

c soll für verschiedene Werte R oder ε_1 berechnet werden; aus den erhaltenen Werten bildet man dann das Mittel.

Bei der Wahl von R muß man so vorgehen, daß das Dämpfungsverhältnis v_1 ($\Lambda_1 = \log v_1$) nicht zu klein und auch nicht zu groß ausfällt, sonst wird die Bestimmung von c ungenau. Man wählt für v_1 am besten Werte etwa zwischen 1,5 und 6.

Sind die beiden Konstanten c_0 und c einmal bestimmt, so kann man sofort den Widerstand R_a des äußeren Stromkreises berechnen, für welchen das Galvanometer genau auf der Grenze der Aperiodizität sich befindet.

Digitized by Google

In diesem Falle ist

$$\varepsilon_1 = n_1 = \frac{2\pi}{T_1}.$$

Dann haben wir aus der Formel (23)

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \varrho. \quad (24)$$

Bei der galvanometrischen Registriermethode soll man immer das Galvanometer genau auf die Grenze der Aperiodizität einstellen, was in der Praxis sehr leicht zu bewerkstelligen ist, denn die ganze Frage beruht nur auf der Wahl des passenden äußeren Widerstands R_a.

In diesem Falle ist die Dämpfung des Galvanometers sehr stark und der Einfluß der Eigenbewegung auf die Aufzeichnung ist fast ausgeschlossen; außerdem werden dann die Formeln sehr einfach.

Erfahrungsgemäß werden die Galvanometerkonstanten n_1, c_0 und c sehr wenig von Temperaturänderungen beeinflußt. Was den Widerstand der Kupferdrähte anbelangt, so wächst derselbe etwas mit dem Steigen der Temperatur t, wobei der Temperaturkoeffizient für praktische Zwecke gleich 0,004 gesetzt werden kann. Der Widerstand bei der Temperatur t ist also mit dem Widerstande R_0 bei 0° C durch folgende Beziehung verbunden:

$$R_t = R_0(1 + 0{,}004\, t). \quad (25)$$

Bei der Auswahl der Drähte für den Widerstand R_a muß man den Temperatureinfluß berücksichtigen, und zwar muß der Widerstand für die mittlere Temperatur des Raumes, wo der Seismograph aufgestellt werden soll, berechnet sein.

Wenn wir außer den Konstanten n_1 und c aus dem Versuch noch unsere Galvanometerkonstante C (Formel (5)) bestimmt hätten, indem wir durch das Galvanometer einen Strom von bestimmter Stärke hindurchschicken, so könnten wir mittels dieser drei Größen auch das Trägheitsmoment der Drehspule K_1 und die Drehungskonstante D bestimmen.

Denn die Formeln (4), (8) und (9) geben uns:

$$C = \frac{D}{F_1 N_1 S_1} \quad (4)$$

$$n_1^2 = \frac{D}{K_1} \quad (8)$$

$$c = \frac{F_1^2}{2K_1} \cdot [N_1 S_1]^2. \quad (10)$$

Erhebt man C zum Quadrat und multipliziert es mit dem Ausdruck (10), so ergibt sich

$$C^2 c = \frac{D^2}{2K_1}.$$

Aber nach Formel (8) ist

$$D = n_1^2 K_1;$$

Digitized by Google

folglich

$$C^2 c = \frac{n_1^4 K_1}{2}$$

oder

$$K_1 = \frac{2cC^2}{n_1^4} \tag{26}$$

und

$$D = \frac{2cC^2}{n_1^2}. \tag{27}$$

Kennen wir schließlich noch die Gesamtfläche der einzelnen Windungen der Drehspule $N_1 S_1$, so können wir nach den Formeln (4) und (27) die magnetische Feldstärke F_1 des Galvanometers berechnen

$$F_1 = \frac{2cC}{n_1^2 (N_1 S_1)}. \tag{28}$$

Zur Erläuterung der Bestimmung der Galvanometerkonstanten T_1, c_0 und c führen wir folgende Zahlenbeispiele an, die Galvanometer Nr. VI, das mit einem aperiodischen Horizontalpendel verbunden in Paris aufgestellt ist und weiter Galvanometer Nr. VII in Pulkovo betreffen.

Galvanometer Nr. VI.

I) $R = \infty$.

m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	A_0	m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	A_0
mm	mm			mm	mm		
133,9				51,4			
	258,1	2,4118			98,4	1,9930	
124,2			0,0301	47,0			0,0292
	240,8	2,3817			92,0	1,9638	
116,6			0,0305	45,0			0,0293
	224,5	2,3512			86,0	1,9345	
107,9			0,0300	41,0			0,0309
	209,5	2,3212			80,1	1,9036	
101,6			0,0300	39,1			0,0297
	195,5	2,2912			74,8	1,8739	
93,9			0,0297	35,7			0,0294
	182,6	2,2615			69,9	1,8445	
88,7			0,0298	34,2			0,0303
	170,5	2,2317			65,2	1,8142	
81,8			0,0295	31,0			0,0289
	159,3	2,2022			61,0	1,7853	
77,5			0,0296	30,0			0,0294
	148,8	2,1726			57,0	1,7559	
71,3			0,0296	27,0			0,0300
	139,0	2,1430			53,2	1,7259	
67,7				26,2			
Im Mittel $A_0 = 0{,}0299$.				Im Mittel $A_0 = 0{,}0297$.			

Das Gesamtmittel gibt

$$A_0 = 0{,}0298, \quad v_1 = 1{,}07 \quad [v_1 = \log A_0].$$

Digitized by Google

Außerdem ergibt sich

$$T_1' = 24^s{,}69.$$

Folglich

$$\left.\begin{aligned} T_1 &= 24^s{,}68 \\ n_1 &= 0{,}2546 \\ \varepsilon_0 = c_0 &= 0{,}00556 \end{aligned}\right\}\ \text{(Formeln (20), (14) und (21)).}$$

und

II) $R = 160\,\Omega$.

m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1	m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
mm	mm			mm	mm		
207,7				222,5			
	327,2	2,5148			350,9	2,5452	
119,5			0,2399	128,4			0,2394
	188,3	2,2749			202,2	2,3058	
68,8			0,2391	73,8			0,2389
	108,6	2,0358			116,65	2,0669	
39,8			0,2385	42,85			0,2395
	62,7	1,7973			67,20	1,8274	
22,9			0,2410	24,35			0,2414
	36,0	1,5563			38,55	1,5860	
13,1				14,2			
Im Mittel 0,2396.				Im Mittel 0,2398.			

Das Gesamtmittel ist

$$\Lambda_1 = 0{,}2397,\ v_1 = 1{,}74.$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}04406.$$

III) $R = 80\,\Omega$.

m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1	m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
mm	mm			mm	mm		
134,2				352,9			
	182,2	2,2606			476,2	2,6778	
48,0			0,4544	123,3			0,4546
	64,0	1,8062			167,2	2,2232	
16,0				43,9			0,4560
					58,5	1,7672	
Im Mittel 0,4544.				14,6			
319,8				Im Mittel 0,4553.			
	432,1	2,6356					
112,3			0,4558				
	151,3	2,1798					
39,0			0,4555				
	53,0	1,7243					
14,0							
Im Mittel 0,4557.							

Das Gesamtmittel

$$\Lambda_1 = 0{,}4551,\ v_1 = 2{,}85.$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}08056.$$

Digitized by Google

IV) $R = 50\,\Omega$.

m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1	m_k (korrigiert)	$m_k + m_{k+1}$	$\log\{m_k + m_{k+1}\}$	Λ_1
mm	mm			mm	mm		
302,9				80,3			
	357,9	2,5538			95,9	1,9818	
55,0			0,7483	15,6			0,7413
	63,9	1,8055			17,4	1,2405	
8,9				1,8			
332,2				354,0			
	390,5	2,5916			418,1	2,6213	
58,3			0,7453	64,1			0,7462
	70,2	1,8463			75,0	1,8751	
11,9				10,9			

Das Gesamtmittel ist

$$\Lambda_1 = 0{,}7453, \quad v_1 = 5{,}56.$$

$$\varepsilon_1 = 0{,}1220.$$

Der Widerstand des Galvanometers war $\varrho = 4{,}12\,\Omega$ (bei 19° C).

Auf Grund dieser Angaben ergeben sich nach der Formel (23) folgende Werte der Konstante c.

$R + \varrho$	Λ_1	ε_1	c
164,12 Ω	0,2897	0,04406	6,320
84,12	0,4551	0,08056	6,310
54,12	0,7453	0,1220	6,300

Im Mittel

$$c = 6{,}310.$$

Da außerdem

$$c_0 = 0{,}00556$$

und

$$n_1 = 0{,}2546$$

ist, so erhalten wir für den Wert des äußeren Widerstandes R_a, bei welchem das Galvanometer genau an der Grenze der Aperiodizität sich befinden wird, also $\varepsilon_1 = n_1$ ist,

$$R_a = 21{,}22\,\Omega \quad \text{(bei 19° C)}.$$

Wäre das Galvanometer in sich kurz geschlossen, so wäre es stark aperiodisch mit bedeutender Dämpfung.

Denn für $R = 0$ ist

$$\varepsilon_1 = 1{,}5371,$$

folglich

$$h_1 = \frac{\varepsilon_1}{n_1} = 6{,}037.$$

Digitized by Google

Für das andere Galvanometer Nr. VII ergaben sich folgende Zahlen:

$$c_0 = 0{,}00538$$

$$T_1 = 24^s{,}59$$

$$n_1 = 0{,}2556$$

$$\varrho = 4{,}12\,\Omega \text{ (bei } 19^0 \text{ C)}.$$

$R+\varrho$	A_1	ε_1	c
164,12 Ω	0,2490	0,04589	6,648
114,12	0,3507	0,06362	6,647
84,12	0,4765	0,08428	6,638
54,12	0,7917	0,1283	6,653

Im Mittel ist

$$c = 6{,}647.$$

Hieraus finden wir

$$R_a = 22{,}44\,\Omega \text{ (bei } 19^0 \text{ C)}.$$

Wir sehen also, daß die Bestimmung der Galvanometerkonstanten in der Praxis keine Schwierigkeiten bietet.

Für seismometrische Zwecke ist es hinreichend, die Eigenperiode des Galvanometers T_1 (ohne Dämpfung) bis auf $0^s{,}1$ zu kennen.

§ 3. Theorie der galvanometrischen Registrierung.

Die folgende Fig. 120 zeigt uns die für die galvanometrische Registrierung bei den Horizontalpendeln benutzte instrumentelle Einrichtung (Ansicht von oben).

G ist die Masse des Horizontalpendels, *H* die Kupferplatte für die magnetische Dämpfung, *J* ein Rahmen aus Zelluloid mit vier Induktions-

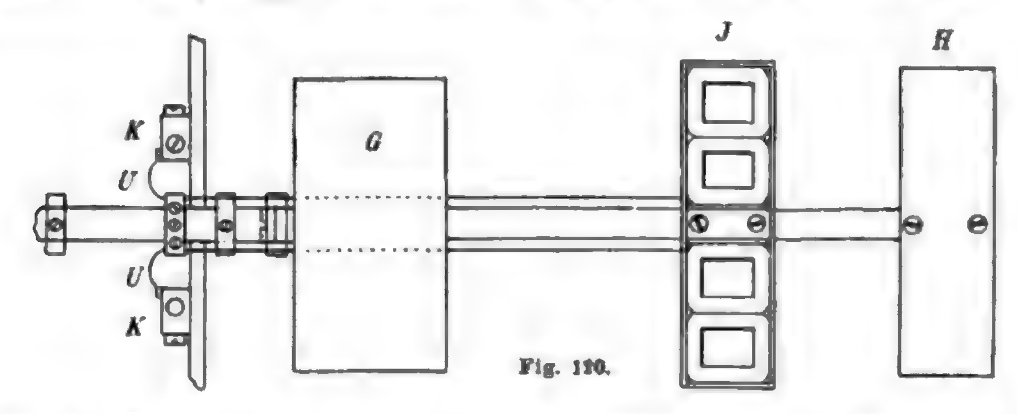


Fig. 120.

spulen, bei *K* befinden sich weiter die äußeren Klemmstellen, bei *U* dünne Silberblättchen, die die Drahtenden der Induktionsspulen mit den starren Klemmen *K* verbinden. Die Magnete sind nicht gezeichnet.

Über den Induktionsspulen sind die Pole der permanenten Magnete so angeordnet, wie Fig. 121 für eine Spule zeigt, beim Gleichgewichtszustand des Pendels spielt nämlich die Hälfte einer jeden Spule in einem mehr oder minder permanenten magnetischen Felde, dessen Stärke wir mit F bezeichnen wollen, während die andere Hälfte sich außerhalb des Feldes befindet.

In Fig. 121 (Ansicht von oben) ist $ABCD$ ein Pol des mit dem Pendelgestell verbundenen hufeisenförmigen Magneten, $A_1B_1C_1D_1$ die bewegliche Induktionsspule. G ist die Pendelmasse und O die Drehungsachse.

Setzen wir für einen Augenblick voraus, daß wir nur eine viereckige Windung des Drahtes $A_1B_1C_1D_1$ haben. Die Breite $A_1D_1 = B_1C_1$ bezeichnen wir mit a und die Entfernung OO_1 mit L_1.

Dreht sich nun das Pendel nach rechts um einen sehr kleinen Winkel θ, so nimmt der magnetische Kraftstrom Q, der durch die Windung fließt, um die Größe

$$FaL_1\theta$$

zu. Wenn wir uns auf kleine Winkelausschläge θ beschränken, so können wir sagen, daß, wenn wir aus der anfänglichen Lage des Pendels herausgehen,

$$dQ = FaL_1 d\theta$$

oder

$$\frac{dQ}{dt} = FaL_1\theta'$$

Fig. 121.

ist. Ist die Zahl der Windungen N, so ist

$$\frac{dQ}{dt} = F \cdot NaL_1\theta',$$

wo unter a die mittlere Breite einer Windung verstanden ist, wenn der Draht in vielen Reihen aufgespult ist.

Unter dem Einflusse der Änderung des Kraftstromes wird in der betreffenden Spule nach den Gesetzen der elektromagnetischen Induktion eine elektromotorische Kraft erregt $E = -\frac{dQ}{dt}$.

Es sind vier solche Induktionsspulen vorhanden. Wenn diese so hintereinander geschaltet sind, daß die Induktionsströme in dem äußeren Stromkreise sich gegenseitig verstärken, d. h. wenn sie in einer und derselben Richtung fließen, so wird die totale elektromotorische Kraft

$$E = -4\frac{dQ}{dt} = -4 \cdot FNaL_1\theta'. \tag{29}$$

Wir bezeichnen nun den Gesamtwiderstand aller Induktionsspulen, d. h. den Widerstand des Drahtes zwischen den Klemmen K in der Richtung der Spulen, mit R_s, wobei die Spulen je nach den Bedingungen hinterein-

Digitized by Google

ander oder parallel, oder teils hintereinander und teils parallel geschaltet sind. Den Widerstand der Zuleitungsdrähte zwischen den Klemmen des Pendels und des Galvanometers bezeichnen wir mit r. Dann ist der äußere Widerstand in bezug auf das Galvanometer

$$R = R_s + r, \tag{30}$$

und der Gesamtwiderstand des Kreises des mit dem Galvanometer gekoppelten Pendels

$$R + \varrho.$$

Unter dem Einflusse der Pendelbewegung geht durch das Galvanometer ein Strom, dessen elektromotorische Kraft der Winkelgeschwindigkeit der Pendelbewegung proportional ist.

Setzen wir nun den Ausdruck für E aus der Formel (29) in die allgemeine Differentialgleichung der Bewegung des Galvanometers (12) ein und führen zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein

$$k = 4 \cdot \frac{F F_1 N a N_1 S_1 L_1}{K_1 (R + \varrho)}, \tag{31}$$

so erhalten wir für das Galvanometer folgende Differentialgleichung:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1 \varphi' + n_1^2 \varphi + k\theta' = 0. \tag{32}$$

Der Koeffizient k heißt der Übertragungsfaktor; er läßt sich sehr leicht durch den Versuch bestimmen. Aus der Formel (32) ersieht man, daß k in betreff seiner Dimensionen umgekehrt proportional der Zeit ist.

Denn es ist

$$\varphi'' = \left[\frac{1}{T^2}\right],$$

$$\theta' = \left[\frac{1}{T}\right],$$

folglich ist

$$k = \left[\frac{1}{T}\right].$$

Die Formel (31) zeigt uns anschaulich, von welchen Größen der Übertragungsfaktor abhängt. Je größer k ist, desto empfindlicher wird die Registrierung.

Die Größe von k kann man sehr einfach regulieren, indem man die Pole der Magnete bei den Induktionsspulen nähert oder entfernt, d. h. indem man die Feldstärke F variiert.

Im folgenden werden wir den Übertragungsfaktor k immer positiv annehmen.

Wir wollen nun die Integration der Gleichung (32) ausführen in der Voraussetzung, daß die Bodenverschiebungen x dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leisten

$$x = x_m \sin(pt + \delta),$$

Digitized by Google

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p}.$$

Wir setzen ferner voraus, daß das Pendel stark gedämpft ist. Dann kann die Gleichung der Pendelbewegung für nicht sehr kleine Werte von t durch die Formel (95) des vorhergehenden Kapitels ausgedrückt werden:

$$\theta = \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau)+\delta\}.$$

Wir wollen nun die Derivierte von dieser Funktion nach der Zeit nehmen und sie in die vorige Gleichung (32) einsetzen.

Dann ergibt sich

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = -kp \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cos\{p(t-\tau)+\delta\}.$$

Da aber

$$-\cos\{p(t-\tau)+\delta\} = \sin\left\{p(t-\tau)+\left(\delta-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

ist, so kann die Gleichung in folgender Form niedergeschrieben werden:

$$\varphi'' + 2\varepsilon_1\varphi' + n_1^2\varphi = \frac{p^2 x_m}{l_1} \sin\{pt+\delta_1\}, \tag{33}$$

wo

$$\frac{1}{l_1} = \frac{k}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \tag{34}$$

und

$$\delta_1 = \delta - p\tau - \frac{\pi}{2}. \tag{35}$$

Für die Integration der Gleichung (33) gehen wir genau in derselben Weise vor wie im vorhergehenden Kapitel.

Für die Bewegung des Horizontalpendels bei harmonischen Bodenverschiebungen hatten wir folgende Differentialgleichung der Bewegung (Formel (72) und (71) des V. Kap.):

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta = \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \sin(pt+\delta), \tag{36}$$

deren allgemeines Integral folgende Gestalt hatte:

$$\theta = e^{-\varepsilon t}[\Gamma_1 \cos\gamma t + \Gamma_2 \sin\gamma t] + \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \sin\{p(t-\tau)+\delta)\} \text{ (Form. (39) Kap. V)},$$

wo

$$\gamma = +\sqrt{n^2-\varepsilon^2},$$

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2},$$

$$u = \frac{T_p}{T} \quad \left(T = \frac{2\pi}{n}\right),$$

$$f(u) = \left[\frac{2u}{1+u^2}\right]^2$$

und

$$\tau = \frac{1}{p}\operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\right\}.$$

(Formel (36), (56), (57), (88), (89), (91) und (92) Kap. V).

Digitized by Google

Auf Grund dieser Angaben kann, wenn nur bei dem Galvanometer $n_1 > \varepsilon_1$ ist, das allgemeine Integral der Gleichung (33) folgendermaßen ausgedrückt werden, wobei wir statt τ_1 schreiben τ_2:

$$\varphi = e^{-\varepsilon_1 t}[\Gamma_1 \cos \gamma_1 t + \Gamma_2 \sin \gamma_1 t]$$

$$+ \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1+u_1^2)} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\mu_1^2 f(u_1)}} \cdot \sin\{p(t-\tau_2)+\delta_1\}, \tag{37}$$

wo

$$\gamma_1 = +\sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2},$$

$$\mu_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{n_1^2},$$

$$u_1 = \frac{T_p}{T_1} \qquad \left(T_1 = \frac{2\pi}{n_1}\right), \tag{38}$$

$$f(u_1) = \left[\frac{2u_1}{1+u_1^2}\right]^2$$

und

$$\tau_2 = \frac{1}{p} \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu_1^2} \cdot \frac{2u_1}{u_1^2-1}\right\}. \tag{39}$$

Hier bedeuten Γ_1 und Γ_2 zwei neue willkürliche Konstanten, welche aus den Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt werden.

Die Gleichung (37) zeigt uns, daß die Bewegung des Galvanometers aus zwei Teilen besteht. Die zwei ersten Glieder, vor denen der Faktor $e^{-\varepsilon_1 t}$ steht, hängen von der Eigenbewegung des Galvanometers ab (eine gedämpfte Sinusoide), das letzte Glied aber ist ausschließlich durch die Pendelbewegung oder, was auf dasselbe hinauskommt, durch die Bodenbewegung bedingt. Es stellt an sich eine einfache Sinusoide dar, deren Periode genau der Periode der seismischen Welle T_p entspricht.

Um den Einfluß der Eigenbewegung des Galvanometers zu eliminieren, soll auch hier wie für das Pendel die Dämpfung erhöht werden. Dann verschwinden die ersten zwei Glieder in der Formel (37) schon bei verhältnismäßig kleinen Werten von t, und wir brauchen die Bestimmung der Konstanten Γ_1 und Γ_2 nicht auszuführen, d. h. die Anfangsbedingungen der Bewegung haben dann keine Bedeutung.

Am günstigsten ist es, das Galvanometer genau auf die Grenze der Aperiodizität einzustellen; dann ist $\mu_1^2 = 0$ und die entsprechenden Formeln lassen sich bedeutend vereinfachen. Ferner soll man den äußeren Widerstand des Galvanometers so wählen, daß die folgende Gleichung befriedigt ist

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \varrho \text{ (Formel (24))}.$$

Der Widerstand der Induktionsspulen R_s muß daher jedenfalls kleiner als R_a sein.

Ist r der Widerstand der Zuleitungsdrähte und r_1 der Zusatzwiderstand, der in den Kreis des Galvanometers eingeführt wird und der ebenso

wie der Widerstand r aus induktionsfrei aufgespultem Draht hergestellt ist, so haben wir r_1 so zu wählen, daß die folgende Bedingung befriedigt wird, was sich in der Praxis leicht erreichen läßt,

$$R_s + r + r_1 = R_a. \tag{40}$$

Dann ist

$$\varepsilon_1 = n_1$$

und

$$\mu_1^2 = 0.$$

Vernachlässigt man in diesem Falle die ersten zwei Glieder der Formel (37), so ergibt sich folgender Ausdruck für φ:

$$\varphi = \frac{x_m}{l_1} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)} \cdot \sin\{p(t - \tau_2) + \delta_1\}. \tag{41}$$

Für $\mu_1^2 = 0$

$$\tau_2 = \frac{1}{p} \operatorname{arctg}\left\{\frac{2 u_1}{u_1^2 - 1}\right\}. \tag{42}$$

Setzen wir nun in die Formel (41) die Werte l_1 und δ_1 aus den Formeln (34) und (35) ein, dann ist

$$\varphi = k\frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \cdot \sin\left\{p(t - \tau_2) + \delta - p\tau - \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Führen wir folgende Bezeichnung ein:

$$\tau_1 = \tau_2 + \frac{1}{p}\,\frac{\pi}{2};$$

dann ergibt sich

$$\varphi = k\frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t - \tau - \tau_1) + \delta\}.$$

Da

$$p = \frac{2\pi}{T_p},$$

so haben wir (Formel (42))

$$\tau_1 = T_p\left[\frac{\operatorname{arctg}\left\{\frac{2 u_1}{u_1^2 - 1}\right\}}{2\pi} + \frac{1}{4}\right] \tag{43}$$

und

$$\varphi = k\frac{T_p}{2\pi} \cdot \frac{x_m}{l} \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t - \tau - \tau_1) + \delta\}. \tag{44}$$

Zur Registrierung der Bewegung des Galvanometers benutzt man die gewöhnliche optische Registriermethode, wobei man bei der Größe des Übertragungsfaktors k den Registrierapparat ziemlich nahe am Galvanometer aufstellen kann; die Kurven gewinnen dadurch sehr an Deutlichkeit.

Wenn wir die Entfernung des Galvanometerspiegels von der Fläche der Registrierwalze in der Richtung des normal auf die Walze fallenden Strahles mit A_1 bezeichnen (am besten macht man $A_1 = 1$ m) und den

Ausschlag des Lichtpunktes auf der Trommel von seiner Ruhelage mit y_1, so haben wir für kleine Winkelausschläge φ

$$\varphi = \frac{y_1}{2 A_1}.$$

Setzt man diese Größe in die vorige Formel (44) ein, so erhält man folgenden endgültigen Ausdruck:

$$y_1 = \frac{k A_1}{\pi l} \cdot T_p x_m \cdot \frac{1}{(1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t - \tau - \tau_1) + \delta\}. \quad (45)$$

Da unsere Differentialgleichungen linear sind, so können wir, wenn die Bodenbewegung aus einer Superposition von Sinuslinien besteht, bei der galvanometrischen wie bei der einfachen optischen Registrierung die einzelnen Werte für y_1 summieren. Wir erhalten so auch eine Superposition von Sinuslinien mit denselben Perioden, aber mit anderen Amplituden und anderen Anfangsphasen.

Die Formel (45) zeigt, daß bei der harmonischen Bodenbewegung die Kurve der Bewegung des Galvanometers ebenfalls eine völlig regelmäßige Sinuslinie darstellt, deren Periode genau der Periode T_p der entsprechenden seismischen Welle gleich ist. Diese Größe kann also unmittelbar aus dem galvanometrischen Seismogramm entnommen werden, ebenso wie die zugehörige maximale Amplitude y_m. Haben wir T_p und y_m bestimmt, so können wir damit die maximale Amplitude der Bodenverschiebung x_m ausrechnen.

Setzt man in der Formel (45) $\sin\{p(t - \tau - \tau_1) + \delta\} = 1$ und führt zur Einfachheit folgende Bezeichnung ein

$$C_1 = \frac{\pi l}{k A_1}, \quad (46)$$

so ergibt sich

$$x_m = C_1 (1 + u_1^2)(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)} \cdot \frac{y_m}{T_p}. \quad (47)$$

C_1 ist eine Konstante des betreffenden Seismographen, die vorher bestimmt wird.

$u = \frac{T_p}{T}$ und $u_1 = \frac{T_p}{T_1}$ sind bekannt, weil das Seismogramm uns unmittelbar die Größe T_p gibt, T und T_1, d. h. die Eigenperioden des Pendels und des Galvanometers ohne Dämpfung sind uns ebenso wie die Dämpfungskonstante μ^2 bekannt.

Die Formel (47) ist die Grundformel, welche zur Bestimmung der maximalen Bodenverschiebungen für regelmäßige harmonische seismische Wellen bei der Anwendung der galvanometrischen Registriermethode dient.

Die Rechnungen nach Formel (47) gestalten sich sehr einfach, wenn man die früher erwähnten Tabellen II, III und IV der „Seismometrischen Tabellen“ benutzt.

Digitized by Google

Aus der Tabelle II finden wir die Größen u und u_1, aus der Tabelle III $\log[1 + u_1^2]$, und aus der Tabelle V die Größe

$$\log U = \log\left[(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}\right].$$

Wir sehen also, daß ein empfindliches aperiodisches Galvanometer in Koppelung mit einem Horizontalpendel direkt zur Registrierung der Bodenbewegung dienen kann.

Diese Registrierungsart ist sehr einfach und bequem. Man kann hierbei den Übertragungsfaktor k immer so groß wählen, daß die Empfindlichkeit sehr groß wird; diese große Empfindlichkeit ist dabei in sehr einfacher Weise zu erreichen, und zwar ohne Anwendung komplizierter Vergrößerungshebel.

Die Größe der Dämpfungskonstante μ^2 wird natürlich von dem geschlossenen Kreise des Galvanometers beeinflußt; deswegen sind bei der Bestimmung von μ^2 durch Versuche zuerst die Magnetpole bei den Induktionsspulen auf die gewünschte Entfernung einzustellen, und es ist dann μ^2 bei geschlossenem Galvanometerkreise zu bestimmen.

Eine Reihe von Versuchen und Beobachtungen hat gezeigt, daß die Formel (47) zu richtigen Resultaten führt und daß auch verschiedene Pendel, wenn sie nur gedämpft sind, innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler völlig gleiche Größen für die wahren Amplituden der Bodenverschiebung x_m gaben.

Infolge der sehr hohen Empfindlichkeit dieser Registriermethode erhält man manche interessante Details der Bodenbewegung, die bei den anderen Registriermethoden häufig nicht mehr bemerkbar sind.

Bei der Bestimmung von x_m nach einem galvanometrischen Seismogramm hat man noch die Richtung, in welcher die Bodenbewegung vor sich ging, zu beachten.

Wir wollen die Bodenverschiebungen nach Nord und Ost als positiv und nach Süd und West als negativ bezeichnen. Um nun festzustellen, welche Bewegung des Lichtpunktes auf dem Seismogramm einer jeden Richtung der Bodenverschiebung entspricht, verfahren wir folgendermaßen.

Nehmen wir an, daß wir ein Pendel für die Registrierung der Meridiankomponente der Bodenverschiebung haben. Bei plötzlicher Bodenverschiebung nach Norden bleibt das Schwingungszentrum des Pendels an seiner Stelle, und der Pendelarm rückt in bezug auf das Gestell nach Süden. Man braucht also für die Bestimmung der positiven Richtung der Ordinate y das Pendel nur künstlich nach Süden zu stoßen (wozu man ein Papierstreifchen benutzt) und sich die Richtung, in welcher der Lichtpunkt auf der Trommel sich bewegt hat, zu merken. Zur Bequemlichkeit einer schnellen Orientierung in den Richtungen der Bodenverschiebung koppelt man das Pendel mit dem Galvanometer in der Weise, daß bei einer positiven Bodenverschiebung der Lichtpunkt sich nach oben bewegt.

Wir haben früher gesehen, daß bei der direkten optischen Registrierung der Bodenbewegung die maximale Amplitude des Ausschlages auf

Digitized by Google

dem Seismogramm sich um τ Sekunden gegen das entsprechende Maximum der Bodenbewegung verspätet, wobei die Größe τ aus der Tabelle VI der „Seismometrischen Tabellen" (Formel (112) Kap. V) ermittelt werden kann. Die Formel (45) sagt aber, daß bei der galvanometrischen Registriermethode noch eine Zusatzphasendifferenz auftritt, d. h. daß das Maximum in der Kurve des Galvanometers noch um τ_1 Sekunden später auftritt.

Ist also t_m der Moment irgendeines Maximums, das aus dem galvanometrischen Seismogramm entnommen ist, und tx_m der Moment des entsprechenden Maximums der wahren Bodenbewegung, so ist

$$tx_m = t_m - \tau - \tau_1, \tag{48}$$

wo τ_1 nach der Formel (43) bestimmt wird. Zur Bestimmung der Korrektion τ_1 dient Tabelle VII in den „Seismometrischen Tabellen", in der die Größen des Verhältnisses $\frac{\tau_1}{T_p}$ für verschiedene Werte u_1, von $u_1 = 0{,}1$ an bis $u_1 = 4{,}0$ angeführt sind.

Aus den erwähnten Gründen sollte man in den seismischen Berichten als Resultat der Analyse der Seismogramme zugleich mit den Elementen der seismischen Wellen T_p und x_m auch die entsprechenden Momente des Maximums der wahren Bodenverschiebung tx_m angeben und nicht etwa die Momente der Maxima auf dem Seismogramm t_m.

Den Größen x_m sollte immer das Zeichen + oder — hinzugefügt werden, je nachdem die Bodenverschiebung in dem betreffenden Moment eine positive oder negative war.

§ 4. **Die Vergrößerung.**

Wir wollen zum Schluß noch die Frage nach der Vergrößerung des Seismographen bei der Anwendung der galvanometrischen Registriermethode betrachten.

Es ist schon früher darauf hingewiesen, daß man unter der Vergrößerung $\mathfrak{V}$ das Verhältnis des maximalen Ausschlages des Lichtpunktes auf der Trommel y_m zu der entsprechenden maximalen Bodenverschiebung x_m versteht. Aus den Formeln (46) und (47) folgt, daß

$$\mathfrak{V} = \frac{kA_1}{\pi l} \cdot \frac{T_p}{(1+u_1^2)(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}}. \tag{49}$$

Bei stark gedämpften Pendeln, die wir nur betrachten, ist μ^2 sehr klein und es unterscheidet sich deshalb die Wurzelgröße sehr wenig von 1. Zur Vereinfachung der weiteren Folgerungen setzen wir voraus, daß das Pendel genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt, d. h. $\mu^2 = 0$ ist.

Außerdem setzen wir noch voraus, daß die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung T der Periode des entsprechenden Galvanometers T_1 gleich ist. Dafür hat man immer zu sorgen, da dann die Bestimmung des Azimuts eines Epizentrums nach den ersten maximalen Ausschlägen zweier

Digitized by Google

senkrecht zueinander aufgestellten Pendel bei dem Einsatz der ersten longitudinalen seismischen Welle in sehr einfacher Weise ausgeführt werden kann.

Ist $T = T_1$, so ist $u = u_1$.

Berücksichtigt man noch, daß

$$T_p = T \cdot u,$$

ist, so ergibt sich

$$\mathfrak{V} = \frac{k A_1}{\pi l} \cdot T \frac{u}{(1 + u^2)^2}. \tag{50}$$

In dieser Formel erscheint folgende Funktion s als variable Größe:

$$s = \frac{u}{(1 + u^2)^2}. \tag{51}$$

Um $\mathfrak{V}$ zu vergrößern, muß der Übertragungsfaktor k durch Annäherung der Magnete an die Induktionsspulen vergrößert werden, oder man muß die Entfernung A_1 des Spiegels von der Registriertrommel größer machen.

Die Formel (50) zeigt, daß für sehr kurze seismische Wellen, wenn T_p ein Bruchteil der Sekunde ist, u sehr klein und die Empfindlichkeit der galvanometrischen Registriermethode nicht groß ist; aber solche Wellen kommen bei Fernbeben fast niemals vor. Mit dem Zunehmen von u_1 wächst $\mathfrak{V}$ anfangs rasch an, dann erfolgt das Anwachsen von $\mathfrak{V}$ langsamer: schließlich erreicht $\mathfrak{V}$ ein Maximum $\mathfrak{V}_m$ bei $u = u_m$ und nimmt dann langsam ab.

Das Maximum von $\mathfrak{V}$ oder s (s_m) läßt sich aus folgender Bedingung bestimmen

$$\frac{ds}{du} = 0$$

oder

$$\frac{(1 + u^2)^2 - 2u(1 + u^2) \cdot 2u}{(1 + u^2)^4} = \frac{1 + u^2 - 4u^2}{(1 + u^2)^3} = 0.$$

Hieraus finden wir

$$u_m = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}577$$

und

$$s_m = \frac{3\sqrt{3}}{16} = 0{,}3248.$$

Wir wollen im folgenden ein konkretes Beispiel behandeln, das der Wirklichkeit nahezu entspricht.

Wir setzen

$$T = 25 \text{ Sek.}$$

$$l = 118 \text{ mm}$$

$$k = 55,$$

und wählen

$$A_1 = 1000 \text{ mm}.$$

Digitized by Google

Dann ergibt sich für $T_p = 1$ Sek. $u = u_1 = 0{,}040$, $s = s_1 = 0{,}0399$ und die entsprechende Vergrößerung $\mathfrak{V}_1$ nach der Formel (50)

$$\mathfrak{V}_1 = 148.$$

Sogar in dem ungünstigsten Falle, der selten in der Praxis vorkommt, daß nämlich $T_p = 1$ Sek. ist, ist die Vergrößerung immer noch genügend.

Wählt man den Abstand A_1 zu 1351 mm, so ist die Vergrößerung für $T_p = 1$ schon 200. Es ist dieses die Vergrößerung, die das schwere astatische Wiechertsche Pendel gewöhnlich bei $T_p = 1$ Sek. hat.

Bei der Anwendung der galvanometrischen Registrierung hat man keine Veranlassung, den Anfangswert von $\mathfrak{V}_1$ zu vergrößern, weil $\mathfrak{V}$ von selbst sehr schnell zugleich mit u anwächst.

Wir wollen nun ebenfalls für die direkte optische Registrierung die Abhängigkeit des Verhältnisses $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ von der Periode der seismischen Welle T_p feststellen.

Auf Grund der oben gemachten Angaben erhalten wir aus der Formel (50) bei $T = 25$ Sek.

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = 25{,}1 \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2}. \tag{52}$$

In diesem Falle tritt das Maximum $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ ein, bei

$$T_p = 25 \times 0{,}577 = 14{,}4 \text{ Sek.},$$

wobei

$$\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1} = 25{,}1 \times 0{,}3248 = 8{,}15,$$

oder für den gegebenen anfänglichen Wert von $\mathfrak{V}_1 = 148$

$$\mathfrak{V}_m = 1206$$

wird. Das ist schon eine sehr starke Vergrößerung, die aber in einfachster Weise erreicht werden kann.

Hätten wir statt $T = 25$ Sek. $T = 12$ Sek. genommen, so hätten wir in derselben Weise erhalten

$$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1} = 12{,}2 \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2}. \tag{53}$$

$\mathfrak{V}$ wird Maximum bei $T_p = 12 \times 0{,}577 = 6{,}9$ Sek., wobei

$$\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1} = 12{,}2 \times 0{,}3248 = 3{,}96$$

ist.

In der folgenden Tabelle VII sind die Größen $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ für verschiedene Werte T_p von 1 Sek. bis 40 Sek. angeführt für die beiden Fälle $T = 25$ Sek. und $T = 12$ Sek. Die Zahlen der zweiten Kolumne sind nach der Formel (52) berechnet und die der dritten nach der Formel (53).

Digitized by Google

Tabelle VII.

$\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$.

T_p \ T	25s,0	12s,0	T_p \ T	25s,0	12s,0
1 Sek.	1,00	1,00	21 Sek.	7,25	1,29
2	1,98	1,93	22	7,01	1,18
3	2,93	2,70	23	6,77	1,07
4	3,82	3,29	24	6,53	0,98
5	4,64	3,69	25	6,28	0,89
6	5,39	3,90	26	6,02	0,81
7	6,04	3,96	27	5,78	0,75
8	6,61	3,90	28	5,53	0,69
9	7,08	3,75	29	5,29	0,63
10	7,46	3,54	30	5,06	0,58
11	7,75	3,30	31	4,83	0,54
12	7,96	3,05	32	4,62	0,49
13	8,09	2,80	33	4,41	0,46
14	8,15	2,55	34	4,20	0,42
15	8,15	2,32	35	4,01	0,39
16	8,09	2,11	36	3,83	0,37
17	7,98	1,91	37	3,65	0,34
18	7,84	1,73	38	3,48	0,32
19	7,66	1,57	39	3,32	0,30
20	7,47	1,42	40	3,17	0,28

In der folgenden Fig. 122 ist der Gang dieser Zahlen graphisch dargestellt.

Aus den obenstehenden aus der Theorie sich ergebenden Zahlen ist zu ersehen, daß, wenn auch das Pendel und das Galvanometer der Voraussetzung nach auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt sind, die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ doch immer ein Maximum besitzt.

Bei der gewöhnlichen optischen Registrierung der Pendelbewegung ist ein Maximum für die Vergrößerung $\mathfrak{V}$ nur bis $\mu^2 > \frac{1}{2}$ vorhanden. Ist aber $\mu^2 < \frac{1}{2}$, wie bei den stark gedämpften Pendeln, so verschwindet dieses Maximum.

Die Zahlen der Tabelle VII zeigen uns noch, daß für kleine Werte von T_p die Größe $\mathfrak{V}$ sehr schnell mit T_p wächst. Nach dem Maximum geht die Abnahme von $\mathfrak{V}$ viel langsamer vor sich, was bei dem Pendel mit der Periode von 25 Sek. besonders deutlich ist. In diesem Falle ist $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ für $T_p = 40$ Sek. noch gleich 3,17, d. h. es ist noch 0,39 der maximalen Größe $\frac{\mathfrak{V}_m}{\mathfrak{V}_1}$.

Für $T = 12$ Sek. geht die Abnahme $\frac{\mathfrak{V}}{\mathfrak{V}_1}$ viel schneller vor sich.

Wir sehen somit, daß es bei der Anwendung der galvanometrischen Registrierung sehr vorteilhaft ist, das Pendel auf eine lange Periode einzu-

Digitized by Google

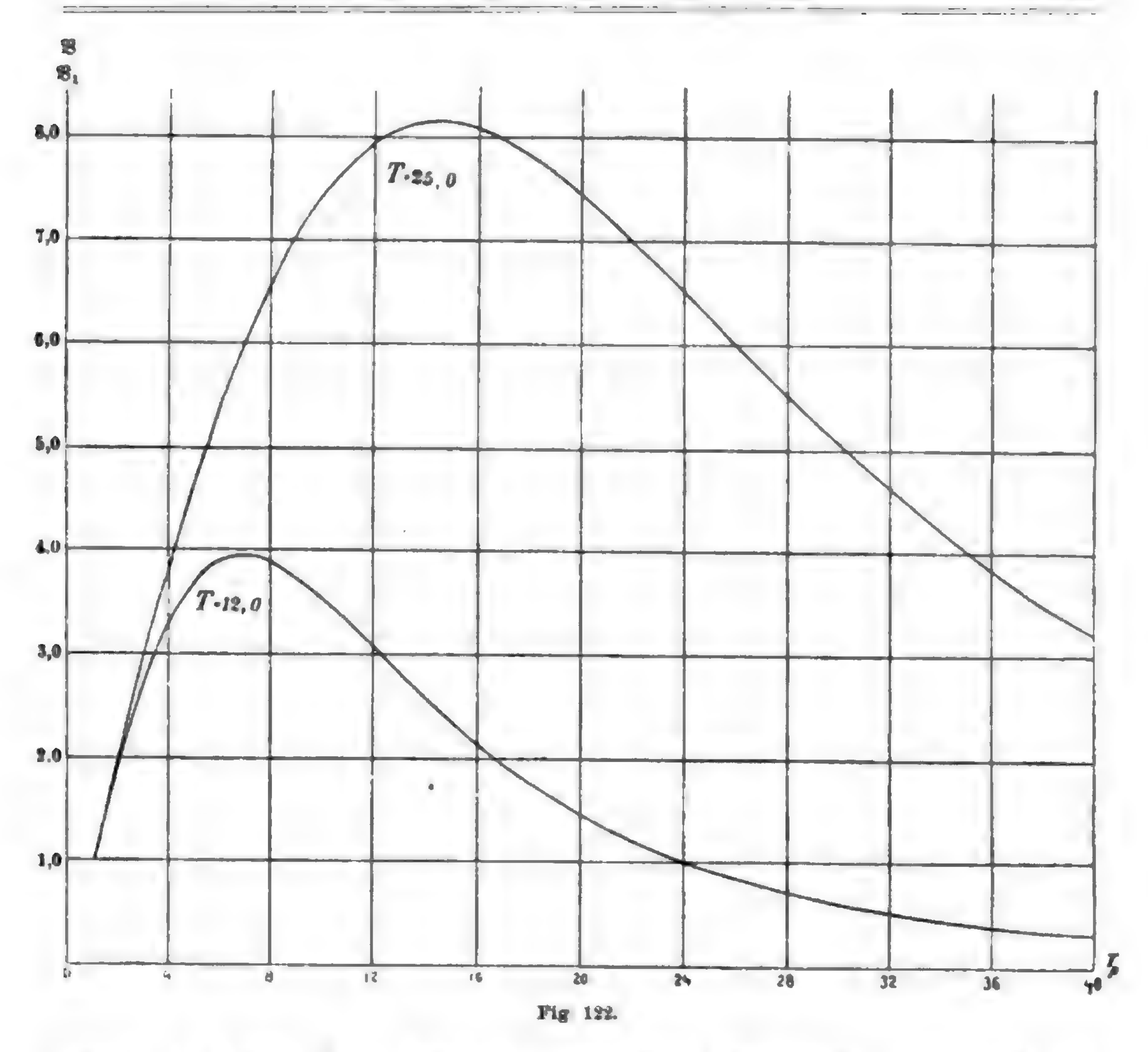


Fig 122.

stellen. In diesem Falle wird der Seismograph außerordentlich empfindlich, wobei für große Werte T_p die relative Veränderung verhältnismäßig langsam erfolgt.

Es sei noch bemerkt, daß die hier angeführten theoretischen und praktischen Vorzüge der galvanometrischen Registrierung durch vieljährige Beobachtungen der Pulkovoer seismischen Station bestätigt sind und daß daher die Russische Seismische Kommission diese Registriermethode auf allen russischen Stationen ersten Ranges eingeführt hat.

Digitized by Google

Siebentes Kapitel.

Bestimmung der Konstanten des Seismographen.

§ 1. **Bestimmung der Pendelkonstanten n und l.**

Die Konstante n, die in der nachstehenden Grunddifferentialgleichung der Bewegung des Seismographen enthalten ist (vgl. Formel (25), § 1, Kap. V)

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0,$$

läßt sich aus der Eigenperiode der Schwingungen des Pendels T' bestimmen; es dient hierzu die Formel (53) des V. Kapitels:

$$n = \frac{2\pi}{T'} \cdot \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}. \tag{1}$$

Um diese Bestimmung auszuführen muß man die Dämpfung soweit als möglich vermindern, d. h. die Magnetpole von der Kupferplatte entfernen und den Galvanometerkreis öffnen. Es ist empfehlenswert, zur Abschwächung des magnetischen Feldes die Pole mit einer Eisenplatte in sich zu schließen.

Die Periode T' und das logarithmische Dekrement Λ werden so bestimmt, wie es früher bei der Bestimmung der Galvanometerkonstanten angegeben worden ist. Man erteilt zu diesem Zwecke dem Pendel mit einem Papierstreifen einen leichten Stoß.

Zu dieser Bestimmung dient ein kleiner, am Pendelarm in der Nähe der Drehungsachse befestigter Spiegel. Diesem Spiegel gegenüber stellt man in 1 m Entfernung ein Fernrohr mit Skala auf. Die Korrektionen Δm der Ablenkungen der Skala entnimmt man aus der Tabelle VIII, und die Wurzelgröße der Formel (1) aus Tabelle IX der „Seismometrischen Tabellen".

Ist nun n bestimmt worden, so findet man die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung T aus der Formel

$$T = \frac{2\pi}{n}. \tag{2}$$

Bei der endgültigen Aufstellung des Pendels für seismometrische Zwecke muß man bei der galvanometrischen Registriermethode möglichst die Periode T des Pendels der Periode T_1 des entsprechenden Galvanometers gleich machen; zu diesem Zwecke dient auch die vordere Fußschraube am Pendelgestell, durch die man die Neigung der Drehungsachse variieren und eine vorläufige Synchronisation des Pendels und des Galvanometers erzielen kann, was sowohl die Bestimmung des Azimuts eines Epizentrums, wie auch die Bestimmung der Pendelkonstanten μ^2 und k vereinfacht.

Digitized by Google

Dabei muß jedoch folgendes beachtet werden.

Wenn nach der Bestimmung von T starke Dämpfung eingeführt wird, indem man die Pole der Magnete einander nähert, so kann die Konstante n oder $T = \frac{2\pi}{n}$ sich ändern. Man muß daher bei der Bearbeitung der Seismogramme den Wert von n oder T benutzen, welcher der endgültigen Stellung der Magnete entspricht, wenn dieselben also schon einander genähert sind.

Man kann jedoch die Konstante n nicht mehr direkt aus den Beobachtungen der Periode des Pendels T' bestimmen, wenn das Pendel nahezu aperiodisch ist, denn an der Grenze der Aperiodizität hat das Pendel ja eigentlich keine Eigenperiode der Schwingungen. In diesem Falle muß man sich eines besonderen Verfahrens bedienen, das gute Resultate gibt und das im folgenden § 2 eingehend besprochen wird. Die Eigentümlichkeit dieser Methode besteht darin, daß sie ermöglicht, die Eigenperiode T für das ungedämpfte Pendel zu bestimmen, wenn dasselbe schon aperiodisch gemacht worden ist.

Gehen wir jetzt zur Bestimmung der reduzierten Pendellänge l über.

Im V. Kapitel haben wir erfahren (Formel (10)), daß die reduzierte Pendellänge das Verhältnis des Trägheitsmoments des beweglichen Systems K zum Produkte aus der ganzen Masse M des Systems mit der Entfernung r seines Schwerpunktes von der Drehungsachse ist

$$l = \frac{K}{Mr_0}. \tag{3}$$

Nach dieser Formel kann l stets bestimmt werden, wenn die verschiedenen einzelnen Bestandteile des beweglichen Systems eine regelmäßige geometrische Form haben. Zu diesem Zweck bedient man sich bei der Berechnung von r_0 des bekannten Momentensatzes, und bei der Berechnung von K der Formel (5) des V. Kapitels, nach der $K = K_0 + Md^2$ ist, wo K_0 das Trägheitsmoment des gegebenen Körpers in bezug auf die parallel zur Drehungsachse durch den Schwerpunkt gehende Achse, und d der Abstand zwischen den Achsen ist. Für Körper von regelmäßiger geometrischer Form ist K_0 bekannt.

In der Formel (3) stellt K die Summe der Trägheitsmomente der einzelnen Bestandteile des Pendels dar. Für das früher besprochene schwere Horizontalpendel, das kein Stativ besitzt, sondern unmittelbar an der Wand befestigt wird, muß man l durch Berechnungen bestimmen. Wo es möglich ist, ist es jedoch vorzuziehen, l direkt durch Versuche zu bestimmen.

Dazu kann man drei verschiedene Methoden anwenden.

Die eine Methode besteht darin, daß man die Drehungsachse des Pendels horizontal stellt. Ist dann die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels ohne Dämpfung T_0, so ergibt sich

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

Digitized by Google

und folglich

$$l = \frac{T_0^2}{4\pi^2} \cdot g.$$

Aber eine solche Aufhängung des Pendels ist in der Praxis nicht immer ohne weiteres möglich und man wird deshalb in vielen Fällen die folgenden zwei Methoden für die Bestimmung von l bevorzugen.

In der Theorie des Horizontalpendels hatten wir folgende zwei Relationen (Formel (17) und (23), Kap. V):

$$\alpha = \frac{\psi}{i} \tag{4}$$

und

$$n^2 = \frac{gi}{l}, \tag{5}$$

wo i der Neigungswinkel der Drehungsachse des Pendels gegen die Vertikale, g die Beschleunigung der Schwerkraft und α der Winkelausschlag des Pendels bei der Neigung des Stativs um den Winkel ψ, bezogen auf die horizontale Achse parallel zum Pendelarm ist.

Wir werden zuerst dem Pendel eine sehr schwache Dämpfung geben (die Magnete bei der Kupferplatte auseinander schieben), damit es bequemer wird, nach Formel (1) wiederholt die Größe n zu bestimmen.

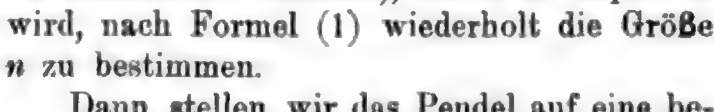


Fig. 123.

Dann stellen wir das Pendel auf eine besondere kleine Plattform, welche auf drei Schrauben A, B und C (Fig. 123) gelagert ist, von denen C eine Meßschraube mit Teilung ist.

Die Plattform ist also nichts anderes als ein gewöhnlicher Niveauprüfer.

Wir bezeichnen die Ganghöhe der Schraube C mit h und die Entfernung der Schraubenspitze C von der Linie AB mit D.

Wir wollen nun voraussetzen, daß die Plattform mit Hilfe einer Libelle genau horizontal aufgestellt und auf ihr der zu untersuchende Horizontalseismograph so aufgestellt ist, daß sein Arm zur Linie AB parallel ist. Bei der Drehung der Schraube C wird die Plattform ihre Neigung ändern, wobei die Drehung um die Achse AB erfolgen wird.

Drehen wir nun die Schraube C um N Umdrehungen, so läßt sich die Größe der Neigung der Plattform ψ nach der folgenden Formel berechnen

$$\psi = \frac{Nh}{D}.$$

Den Winkel ψ könnte man auch mit einer empfindlichen Libelle, deren Parswert bekannt ist, bestimmen. Der entsprechende Winkel der Drehung des Pendels α wird mit Hilfe von Spiegel und Skala bestimmt. Kennt man so ψ und α, so findet man nach der Formel (4) den entsprechenden Neigungswinkel der Achse i:

$$i = \frac{\psi}{\alpha}.$$

Digitized by Google

Setzt man diesen Wert in die Formel (5) ein, so ergibt sich

$$l = \frac{g}{n^2} \cdot i = \frac{g}{n^2} \cdot \frac{\psi}{\alpha}. \tag{6}$$

In dieser Formel ist n aus den Schwingungsbeobachtungen des Pendels bekannt, und wir können daher leicht die gesuchte reduzierte Pendellänge bestimmen.

Diese Methode erfordert aber die Anwendung einer Plattform.

Viel einfacher und bequemer läßt sich l folgendermaßen bestimmen.

Die Formel (6) sagt aus, daß mit dem Wachsen der Neigung i die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels T abnimmt.

Es ist nicht gut möglich, ohne eine Plattform den Winkel i direkt zu bestimmen, aber die Änderung des Winkels i, also Δi kann man sehr genau aus den Beobachtungen mittels Spiegel und Skala feststellen.

Man befestigt hierzu unten am Pendelgestell einen festen Spiegel; ihm gegenüber stellt man in 5—7 m Entfernung ein Fernrohr mit vertikaler Skala auf. Die Entfernung des Spiegels von der Skala bezeichnen wir mit D.

Wir stellen nun das Pendel durch Drehung der Schraube am Stativ auf eine lange Periode von etwa 30—35 Sekunden ein und bestimmen dann die zugehörige Größe n, die wir mit n_0 bezeichnen wollen, nach der Formel (1). Der Neigungswinkel der Achse sei i_0 und die entsprechende Ablesung an der vertikalen Skala h_0. Es ist dies die Stellung des Pendelstativs, von der wir ausgehen.

Dann ergibt sich nach Formel (5):

$$n_0^2 \cdot \frac{l}{g} = i_0. \tag{7}$$

Jetzt verkürzen wir die Eigenperiode des Pendels durch Drehung derselben Schraube. Die zugehörige Größe n, die aus dem Versuch sich ergibt, sei n_1 und die Ablenkung der Skala h_1.

Der neue Neigungswinkel der Achse ist

$$i_1 = i_0 + \Delta_1 i$$

wo

$$\Delta_1 i = \frac{h_1 - h_0}{2D}. \tag{8}$$

Da die Entfernung D groß ist, so sind für die Ausschläge h_1 und h_0 keine Korrektionen erforderlich.

Wir haben also:

$$n_1^2 \cdot \frac{l}{g} = i_0 + \Delta_1 i. \tag{9}$$

Da n_0^2, n_1^2 und $\Delta_1 i$ bekannt sind, so kann man aus den Formeln (7) und (9) die zwei Unbekannten i_0 und l bestimmen, von denen wir eigentlich nur die zweite Größe zu kennen brauchen, denn wenn man l kennt, so kann der entsprechende Neigungswinkel i der Achse aus der Periode des Pendels T (ohne Dämpfung) nach Formel (5) bestimmt werden.

Digitized by Google

In der Praxis empfiehlt es sich, nicht nur aus zwei Größen n zu bestimmen, sondern eine Reihe von Bestimmungen von n^2 und Δi bei abnehmenden Perioden T auszuführen, wobei man jedoch Perioden unter 8 bis 10 Sekunden ausschließt.

Führt man dann die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} x &= i_0 \\ y &= \frac{l}{g} \end{aligned}\right\}, \tag{10}$$

so ergibt sich das folgende Gleichungssystem, aus dem man die Unbekannten x und y ermitteln kann.

$$\left.\begin{aligned} n_0^2 y - x &= 0 \\ n_1^2 y - x &= \Delta_1 i \\ n_2^2 y - x &= \Delta_2 i \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ n_s^2 y - x &= \Delta_s i \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

Wir bestimmen nun aus der ersten und letzten Gleichung die angenäherten Werte für x und y, die wir mit x_0 und y_0 bezeichnen.

Wir setzen dann

und

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 - \xi \\ y &= y_0 + \eta \end{aligned}\right\}. \tag{12}$$

wo ξ und η zwei Korrektionen für x_0 und y_0 sind.

Wir führen dann der Einfachheit halber noch folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a_k &= 1 \\ b_k &= n_k^2 \\ m_k &= \Delta_k i + x_0 - n_k^2 y_0 \end{aligned}\right\}, \tag{13}$$

wo k die Nummer der Reihe ist, und erhalten für die Bestimmung der zwei neuen Unbekannten ξ und η die folgende Gruppe von Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} a_0\xi + b_0\eta &= m_0 \\ a_1\xi + b_1\eta &= m_1 \\ a_2\xi + b_2\eta &= m_2 \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ a_s\xi + b_s\eta &= m_s \end{aligned}\right\}. \tag{14}$$

Die Gesamtzahl der Gleichungen ist $s + 1$ und die Zahl der Unbekannten 2. Außerdem sind in unserem Falle alle Koeffizienten a gleich 1 und m_0 und m_s gleich Null.

Die Bestimmung von ξ und η aus den Gleichungen (14) erfolgt nach der Methode der kleinsten Quadrate, mit der wir uns im folgenden beschäftigen wollen.

Digitized by Google

§ 2. Methode der kleinsten Quadrate.

Bei der experimentellen Bestimmung von Größen erhält man niemals völlig genaue Werte; sie sind immer mit einem Fehler behaftet, der von der Genauigkeit der Beobachtungen selbst abhängt. Wenn man von dem Einfluß der konstanten Fehler der Meßinstrumente u. dgl. absieht, so kann man sagen, daß die Abweichungen der beobachteten und gemessenen Größen von der wahren Größe einen zufälligen Charakter tragen und deswegen positiv oder negativ sein können.

Die Theorie dieser zufälligen Fehler gründet sich auf die Wahrscheinlichkeitstheorie.

Die mathematische Wahrscheinlichkeit p eines einfachen Ereignisses heißt das Verhältnis der Zahl günstiger gleichmöglicher Fälle m zu der Gesamtzahl der Fälle M, d. h. $p = \frac{m}{M}$.

Die Wahrscheinlichkeit, aus einem aus 52 Karten bestehenden Spiel eine schwarze Karte zu ziehen, ist daher gleich $\frac{1}{2}$, denn die Gesamtzahl der schwarzen Karten, also die Zahl der günstigen Fälle ist 26 und die Gesamtzahl der möglichen Fälle ist 52.

Die Wahrscheinlichkeit, eine Coeurkarte zu ziehen, ist gleich $\frac{1}{4}$, die den Pikkönig zu ziehen gleich $\frac{1}{52}$.

Ein zufälliges Ereignis, das aus zwei einfachen besteht, nennt man ein zusammengesetztes Ereignis.

Wenn man z. B. aus einem Spiel die rote Farbe und aus einem anderen gleichzeitig dieselbe Farbe ziehen soll, so ist ein solches Ereignis ein zusammengesetztes. Diese Ereignisse sind vollständig unabhängig voneinander.

Die Wahrscheinlichkeit eines solchen zusammengesetzten Ereignisses kann sehr leicht auf Grund folgender Erwägungen bestimmt werden.

Eine jede rote Karte aus dem ersten Spiel kann man mit einer jeden roten Karte aus dem anderen Spiel kombinieren. Die Zahl solcher Kombinationen ist 26×26, dies ist die gesamte Zahl der gleichmöglichen günstigen Fälle. Die Zahl der verschiedenen Kombinationen aber, d. h. die gesamte Zahl der Fälle ist gleich 52×52. Also ist die Wahrscheinlichkeit dieses zusammengesetzten Ereignisses $\frac{26 \times 26}{52 \times 52} = \frac{1}{4}$.

Allgemein ist, wenn die Wahrscheinlichkeit mehrerer unabhängiger einfacher Ereignisse

$$p_1 = \frac{m_1}{M_1}, \quad p_2 = \frac{m_2}{M_2}, \quad p_3 = \frac{m_3}{M_3} \quad \text{usw.}$$

ist, die Wahrscheinlichkeit eines zusammengesetzten Ereignisses

$$P = p_1 p_2 p_3 \ldots . \tag{15}$$

Die Wahrscheinlichkeit ist also immer ein echter Bruch; ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, so bedeutet das Gewißheit.

Führt man praktisch Versuche aus, so entsprechen die Resultate nicht immer der mathematischen Wahrscheinlichkeit.

Nach der mathematischen Wahrscheinlichkeit sollten wir z. B. unter vier gezogenen Karten eine Coeurkarte haben; in Wirklichkeit wird das jedoch nicht immer zutreffen. Wenn wir jedoch eine sehr große Zahl S mal ziehen und die Zahl der günstigen Fälle s, wenn wir tatsächlich die Coeurfarbe ziehen, zusammenfassen, — wobei selbstverständlich die Karte jedesmal ins Spiel zurückgelegt und dasselbe sorgfältig gemischt wird, damit alle Fälle vollständig unabhängig voneinander und gleichmöglich sind — so werden wir uns überzeugen können, daß das Verhältnis $\frac{s}{S}$ mit der Zunahme von S sich der theoretischen Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ nähert, daß also ist

$$\lim\left(\frac{s}{S}\right) = \frac{1}{4}\cdot$$

Dieses Gesetz, welches experimentell nachgeprüft werden kann, heißt das Gesetz der großen Zahlen. Man kann es auch streng mathematisch beweisen.

Es sind auch die rein zufälligen Erscheinungen gewissen mathematischen Gesetzen unterworfen.

Wir setzen nun voraus, daß wir irgendeine Größe gemessen haben, wobei der zufällige Beobachtungsfehler gleich Δ ist.

Die Wahrscheinlichkeil p, daß der Fehler irgendeiner Ausmessung in den Grenzen zwischen Δ und $\Delta + \partial\Delta$ sich befindet, ist

$$p_\Delta = f(\Delta)\cdot\partial\Delta, \tag{16}$$

wo $f(\Delta)$ eine uns vorläufig unbekannte Funktion von Δ ist.

p_Δ muß zu $\partial\Delta$ proportional sein, denn je kleiner das gegebene Intervall für $\partial\Delta$ ist, desto kleiner wird die entsprechende Wahrscheinlichkeit p_Δ sein; die Wahrscheinlichkeit genau denselben Fehler Δ zu treffen, ist sicher sehr klein.

Wenn wir S mal dieselbe Größe messen und die entsprechenden zufälligen Beobachtungsfehler mit

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3 \text{ usw.}$$

bezeichnen, so wird die Größe

$$\frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots}{S} = \frac{\Sigma\Delta}{S}$$

mit der Zunahme von S jedenfalls der Null sich nähern, da es gleichwahrscheinlich ist, daß die Fehler Δ positiv oder negativ sind.

Also ist

$$\lim\frac{\Sigma\Delta}{S} = 0. \tag{17}$$

Im folgenden wollen wir voraussetzen, daß die Zahl der einzelnen Messungen sehr groß ist.

Digitized by Google

Wir wollen uns nun mit der Bestimmung der Gestalt der Funktion $f(x)$ beschäftigen, eine Aufgabe, die sich in einfacher Weise lösen läßt.

Wir stellen uns eine Zielscheibe vor, wie sie in Fig. 124 abgebildet ist, nach der wir mit einer Pistole schießen, indem wir nach dem Zentrum O zielen.

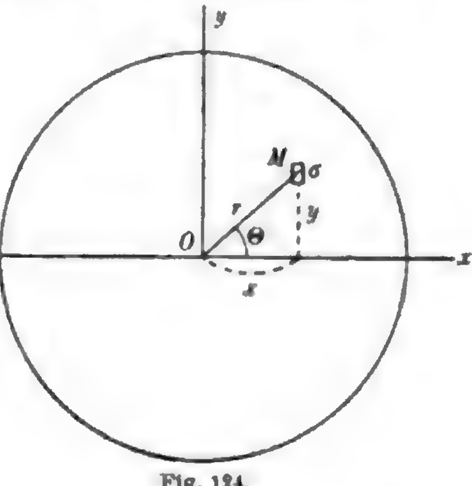


Fig. 124.

Wir nehmen zwei zueinander senkrechte Koordinatenachsen Ox und Oy und irgendeinen Punkt M mit den Koordinaten x und y, um welchen wir uns eine elementare Fläche

$$\sigma = \partial x \cdot \partial y$$

denken.

Die Entfernung MO sei gleich r.

Dann ist

$$r^2 = x^2 + y^2. \qquad (18)$$

Die Wahrscheinlichkeit der Ablenkung der Kugel nach rechts um eine Größe, die zwischen x und $x + \partial x$ eingeschlossen ist, ist

$$p_x = f(x)\partial x,$$

und die Wahrscheinlichkeit der Ablenkung der Kugel nach oben um eine Größe, die zwischen y und $y + \partial y$ eingeschlossen ist, ist

$$p_y = f(y)\partial y.$$

Da die beiden Ablenkungen als unabhängig betrachtet werden müssen, so ist die Wahrscheinlichkeit ihres gemeinschaftlichen Auftretens, d. h. die Wahrscheinlichkeit des Falles, daß die Kugel eben nur die elementare Fläche σ trifft,

$$p_\sigma = f(x) f(y) \cdot \sigma.$$

Wir wollen nun die Koordinatenachsen so drehen, daß die x-Achse mit der Richtung r zusammenfällt.

Dann können wir dieselbe Wahrscheinlichkeit folgendermaßen ausdrücken:

$$p_\sigma = f(r) \cdot f(0) \cdot \sigma.$$

Vergleicht man diese beiden Ausdrücke für p_σ, so ergibt sich folgende Beziehung

$$f(x) f(y) = f(0) f(r). \qquad (19)$$

Dies ist die sogenannte Funktionsgleichung.

Die Frage wird also darauf zurückgeführt, eine Funktion zu finden, die die Bedingung (19) befriedigt.

Um die Gestalt dieser Funktion zu bestimmen, nehmen wir den natürlichen Logarithmus von dem Ausdruck (19)

$$\lg f(x) + \lg f(y) = \lg f(0) + \lg f(r). \qquad (20)$$

Hier haben wir zwei unabhängige Variabeln x und y.

Digitized by Google

Wir bilden die Derivierte vom Ausdruck (19) nach x, indem wir y als konstant betrachten.

Also

$$\frac{\partial \lg f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}$$

oder auf Grund der Formel (18)

$$\frac{\partial \lg f(x)}{\partial x} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{x}{r}.$$

In derselben Weise finden wir

$$\frac{\partial \lg f(y)}{\partial y} = \frac{\partial \lg f(r)}{\partial r} \cdot \frac{y}{r}.$$

Hieraus erhalten wir

$$\frac{\partial \lg f(x)}{x \cdot \partial x} = \frac{\partial \lg f(y)}{y \cdot \partial y} = \frac{\partial \lg f(r)}{r \cdot \partial r} = \text{Const.} \tag{21}$$

Die Größe dieser Konstante bezeichnen wir mit $-\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Naturgemäß muß diese Konstante negativ sein, weil $f(x)$ als eine Wahrscheinlichkeit immer positiv und die Derivierte $\frac{\partial f(x)}{\partial x^2}$ negativ ist, da mit der Zunahme von x^2 die Wahrscheinlichkeit des Treffens in die Fläche σ abnimmt, weil wir doch nur nach dem Zentrum O zielen.

Die Formel (21) gibt uns also

$$\frac{d \lg f(x)}{x \cdot \partial x} = -\frac{1}{\varepsilon^2}.$$

Integriert man diese Gleichung und bezeichnet die Integrationskonstante mit $\lg A$, so ergibt sich

$$\lg f(x) = -\frac{x^2}{2\varepsilon^2} + \lg A$$

oder

$$f(x) = A \cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}. \tag{22}$$

Es erübrigt nur den Wert der Konstanten A zu bestimmen.

Auf Grund der Gleichung (22) ist die Wahrscheinlichkeit des Treffens in die Fläche σ

$$p_\sigma = f(x)f(y)\partial x \partial y = A^2 e^{-\frac{x^2+y^2}{2\varepsilon^2}} \cdot \sigma.$$

Wir führen nun die Polarkoordinaten r und θ ein.

Dann können wir die Größe der Elementarfläche um M folgendermaßen ausdrücken

$$\sigma = r d\theta \cdot dr.$$

Folglich ist

$$p_\sigma = A^2 e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} \cdot r dr \cdot d\theta.$$

Digitized by Google

Wir wollen nun ausdrücken, daß die Wahrscheinlichkeit des Treffens in irgendeinem Punkt der Scheibe von unendlich großen Dimensionen gleich 1 ist.

Um eine unendlich große Fläche zu umfassen, muß man den vorhergehenden Ausdruck nach θ in den Grenzen von $\theta = 0$ bis $\theta = 2\pi$ und nach r von $r = 0$ bis $r = \infty$ integrieren.

Also

$$1 = A^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\infty} e^{-\frac{r^2}{2\varepsilon^2}} r\,dr$$

oder

$$1 = 2\pi A^2 \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2} d\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2\right\}\cdot\{-\varepsilon^2\},$$

oder auch

$$1 = -2\pi A^2\varepsilon^2\left[e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{\varepsilon}\right)^2}\right]_0^{\infty} = 2\pi A^2\varepsilon^2.$$

Hieraus finden wir

$$A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (22) ein, so ergibt sich schließlich

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\varepsilon}\cdot e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon^2}}. \tag{23}$$

Die Funktion $f(x)$ ist damit bestimmt.

Sie enthält, wie wir sehen, x im Quadrat, was man auch a priori erwarten konnte, da der Fehler, der den positiven und negativen Werten von x entspricht, gleich wahrscheinlich ist.

Die Wahrscheinlichkeit, bei der Ausmessung irgendeiner Größe einen Fehler in den Grenzen Δ und $\Delta + \partial\Delta$ zu begehen, ist also gleich

$$p_\Delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\Delta^2}{2\varepsilon^2}}\cdot\frac{\partial\Delta}{\varepsilon}.$$

Wir setzen nun voraus, daß wir irgendeine Größe x gemessen und s gleich zuverlässige Beobachtungen ausgeführt haben, die für x folgende Größen gegeben haben:

$$m_1,\ m_2,\ m_3,\ \ldots,\ m_s.$$

Die Fehler dieser einzelnen Resultate seien

$$\Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \ldots,\ \Delta_s.$$

Dann ist

$$\Delta_1 = m_1 - x,\quad \Delta_2 = m_2 - x,\quad \Delta_3 = m_3 - x,\ \ldots,\ \Delta_s = m_s - x,$$

Digitized by Google

und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten sind

$$p_1 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_1^2}$$

$$p_2 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_2^2}$$

$$p_3 = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_3^2}$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$p_s = \frac{\partial\Delta}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Delta_s^2}.$$

$\partial\Delta$ betrachten wir überall als gleich groß.

Das Auftreten irgendeines Fehlers bei jeder einzelnen Messung können wir als ein einfaches Ereignis auffassen, das keinen Einfluß auf die weiteren Messungen hat, und es hat daher die gemeinschaftliche Existenz der erwähnten Fehler in den s Messungen als zusammengesetztes Ereignis die Wahrscheinlichkeit

$$P = p_1 p_2 p_3 \ldots p_s = \left[\frac{\partial\Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \cdot \frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_s^2]}. \tag{24}$$

Ohne die wahre Größe x zu kennen, können wir verschiedene Voraussetzungen machen, wobei eine jede von ihnen ihr eigenes System von Fehlergrößen Δ gibt und uns zu einer Größe der Wahrscheinlichkeit P führt. Alle diejenigen Voraussetzungen, welche uns zu einer unmöglichen Größe der Wahrscheinlichkeit P führen, müssen natürlich, als der Wirklichkeit nicht entsprechend, wegfallen, da wir x möglichst genau aus den Beobachtungen bestimmen wollen. Die beste Voraussetzung, welche wir in betreff der Größe x machen können, ist die, bei welcher P ein Maximum oder

$$\Sigma\Delta^2 = \Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_s^2$$

ein Minimum wird.

Darin besteht die Grundidee der Methode der kleinsten Quadrate.

Wir müssen folglich aus den einzelnen Messungen die Unbekannte x so ableiten, daß die Summe der Quadrate aller zufälligen Beobachtungsfehler ein Minimum wird.

Diese Bedingung gibt uns

$$\frac{1}{2}\frac{\partial\Sigma\Delta^2}{\partial x} = \Delta_1\frac{\partial\Delta_1}{\partial x} + \Delta_2\frac{\partial\Delta_2}{\partial x} + \Delta_3\frac{\partial\Delta_3}{\partial x} + \cdots + \Delta_s\frac{\partial\Delta_s}{\partial x} = 0.$$

Auf Grund der vorhergehenden Bezeichnungen sind alle Derivierten gleich -1.

Folglich ist

$$\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 + \cdots + \Delta_s = 0$$

oder

$$(m_1 - x) + (m_2 - x) + (m_3 - x) + \cdots + (m_s - x) = 0.$$

Hieraus ergibt sich

$$x = \frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_s}{s}. \tag{25}$$

Wir sehen also, daß der wahrscheinlichste Wert der gemessenen Größe x gleich dem arithmetischen Mittel aus den einzelnen gleich zuverlässigen Beobachtungsresultaten ist.

Die Formel (24) zeigt uns ferner, daß die Wahrscheinlichkeit P eines zusammengesetzten Ereignisses auch von der Größe der Konstanten ε abhängt. Die passendste Größe für ε ist wiederum die, bei der P ein Maximum ist.

Diese Größe wollen wir nun aufsuchen.

Dazu müssen wir

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = 0$$

setzen.

Aus der Formel (24) ergibt sich:

$$\frac{\partial P}{\partial \varepsilon} = \left[\frac{\partial \Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \left[\frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2} \cdot \frac{\Sigma\Delta^2}{\varepsilon^3} - \frac{s}{\varepsilon^{s+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2}\right] = 0$$

oder

$$\left[\frac{\partial \Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \frac{1}{\varepsilon^{s+1}} \cdot e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\Sigma\Delta^2} \cdot \left[\frac{\Sigma\Delta^2}{\varepsilon^2} - s\right] = 0.$$

Hieraus erhalten wir

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{s}. \tag{26}$$

ε^2 ist folglich das Mittel aus den Quadraten aller Fehler der betrachteten Beobachtungsreihe. Deswegen heißt ε der mittlere quadratische Fehler oder kürzer der mittlere Fehler der Messungen. Er dient als Maß der zufälligen Fehler der gegebenen Reihe von Beobachtungen und charakterisiert vollständig die Genauigkeit der letzteren. Es ist also ε der mittlere Fehler einer jeden Bestimmung von x.

Haben wir eine Größe

$$X = \alpha x,$$

wo α ein konstanter Koeffizient ist, so ist der Fehler von X, den wir mit D bezeichnen, jedenfalls gleich $\alpha\Delta$ und der mittlere Fehler von X

$$E = \alpha\varepsilon. \tag{27}$$

Wir wollen nun den mittleren Fehler E für die Summe oder die Differenz X zweier Größen x und x', welche sich aus s und s' unabhängigen Beobachtungen mit den mittleren Fehlern ε und ε' ergeben haben, bestimmen.

Auf Grund des vorhergehenden erhalten wir

$$\varepsilon^2 = \frac{1}{s}[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \Delta_3^2 + \cdots + \Delta_s^2] = \frac{\Sigma\Delta^2}{s}$$

und

$$\varepsilon'^2 = \frac{1}{s'}[\Delta_1'^2 + \Delta_2'^2 + \Delta_3'^2 + \cdots + \Delta_s'^2] = \frac{\Sigma\Delta'^2}{s'}.$$

In der Summe oder Differenz $x \pm x'$ können mit gleicher Wahrscheinlichkeit die verschiedensten Kombinationen der Fehler Δ und Δ' vorkommen, d. h. folgende Fehler D:

$$\begin{array}{cccc}
\Delta_1 \pm \Delta_1', & \Delta_2 \pm \Delta_1', & \Delta_3 \pm \Delta_1', \ldots & \Delta_s \pm \Delta_1' \\
\Delta_1 \pm \Delta_2' & \Delta_2 \pm \Delta_2' & \Delta_3 \pm \Delta_2' \ldots & \Delta_s \pm \Delta_2' \\
\Delta_1 \pm \Delta_3' & \Delta_2 \pm \Delta_3' & \Delta_3 \pm \Delta_3' \ldots & \Delta_s \pm \Delta_3' \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta_1 \pm \Delta_{s'}' & \Delta_2 \pm \Delta_{s'}' & \Delta_3 \pm \Delta_{s'}' \ldots & \Delta_s \pm \Delta_{s'}'.
\end{array}$$

Bildet man nun die Summe der Quadrate dieser Fehler D und dividiert sie durch ihre Gesamtzahl $S = ss'$, so ergibt sich auf Grund des vorhergehenden

$$E^2 = \frac{\Sigma D^2}{S} = \frac{s'\Sigma\Delta^2 \pm 2\Sigma\Delta \cdot \Sigma\Delta' + s\Sigma\Delta'^2}{ss'}$$

$$= \frac{\Sigma\Delta^2}{s} \pm 2\frac{\Sigma\Delta}{s} \cdot \frac{\Sigma\Delta'}{s'} + \frac{\Sigma\Delta'^2}{s'}.$$

Nun ist aber bei den zufälligen Fehlern (Formel (17))

$$\frac{\Sigma\Delta}{s} = 0$$

also auch

$$\frac{\Sigma\Delta'}{s'} = 0;$$

folglich

$$E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2.$$

Wenn wir eine Summe von drei Werten $x + x' + x''$,

$$X = x + x' + x''$$

mit den mittleren Fehlern ε, ε' und ε'' gehabt hätten, so würden wir für den mittleren Fehler des Resultates finden

$$E^2 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 \quad \text{usw.}$$

Ist X eine lineare Funktion vieler Größen x, x', x'' usw. von der Gestalt

$$X = \alpha x + \alpha' x' + \alpha'' x'' + \cdots, \tag{28}$$

wo α, α', α'' usw. konstante Faktoren sind, so erhalten wir auf Grund der Beziehung (27) für den mittleren Fehler des Resultates X folgenden Ausdruck:

$$E^2 = \alpha^2\varepsilon^2 + \alpha'^2\varepsilon'^2 + \alpha''^2\varepsilon''^2 + \cdots, \tag{29}$$

Wir wollen nun annehmen, daß wir eine Unbekannte x und eine Reihe linearer Gleichungen von der Form

$$\left.\begin{aligned} a_1 x &= m_1 \\ a_2 x &= m_2 \\ a_3 x &= m_3 \\ &\cdots\cdots \\ a_s x &= m_s \end{aligned}\right\} \tag{30}$$

haben, wo die Koeffizienten a nicht gleich 1, sondern bestimmte reelle Zahlen sind und die Größen m zufällige Beobachtungsfehler Δ enthalten, wobei der mittlere Fehler eines jeden m gleich ε ist.

Führt man folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \Delta_1 &= m_1 - a_1 x \\ \Delta_2 &= m_2 - a_2 x \\ \Delta_3 &= m_3 - a_3 x \\ &\vdots \\ \Delta_s &= m_s - a_s x \end{aligned}\right\}, \tag{31}$$

wo man unter x den wahren Wert der gesuchten Größe versteht, so erhält man auf Grund der Formel (26)

$$\varepsilon^2 = \frac{\Sigma\Delta^2}{S}.$$

Der wahrscheinlichste Wert von x, den wir vorläufig mit $\bar{x}$ bezeichnen wollen, ergibt sich auf Grund der Methode der kleinsten Quadrate aus der Bedingung, daß $\Sigma\Delta^2$ ein Minimum wird.

$$\Sigma\Delta^2 = (m_1 - a_1 x)^2 + (m_2 - a_2 x)^2 + (m_3 - a_3 x)^2 + \cdots + (m_s - a_s x)^2.$$

Die Bedingung

$$\frac{\partial \Sigma\Delta^2}{\partial x} = 0$$

gibt

$$-a_1(m_1 - a_1 x) - a_2(m_2 - a_2 x) - a_3(m_3 - a_3 x) - \cdots - a_s(m_s - a_s x) = 0$$

oder

$$[a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \cdots + a_s a_s]\bar{x} = [a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \cdots + a_s m_s].$$

Wir führen zur Abkürzung die Gaußschen Bezeichnungen ein:

$$a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 + \cdots + a_s a_s = (aa)$$
$$a_1 m_1 + a_2 m_2 + a_3 m_3 + \cdots + a_s m_s = (am).$$

Digitized by Google

Dann ist

$$\bar{x} = \frac{(am)}{(aa)}. \tag{32}$$

Nach dieser Formel ergibt sich der wahrscheinlichste Wert der gesuchten Größe x.

Die Summe (aa) heißt das Gewicht des Resultates und wird mit g und dem Index x bezeichnet (g_x).

Wir wollen nun den mittleren Fehler ε_x der Größe $\bar{x}$ bestimmen, indem wir den mittleren Fehler eines jeden einzelnen m gleich ε setzen.

Die Formel (32) kann in folgender Gestalt dargestellt werden:

$$\bar{x} = \frac{a_1}{(aa)} \cdot m_1 + \frac{a_1}{(aa)} m_2 + \frac{a_3}{(aa)} m_3 + \cdots + \frac{a_s}{(aa)} m_s.$$

Hieraus erhalten wir auf Grund der Formeln (28) und (29)

$$\varepsilon_x^2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_s^2}{(aa)^2} \cdot \varepsilon^2 = \frac{(aa)}{(aa)^2} \cdot \varepsilon^2$$

oder

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon}{\sqrt{(aa)}}. \tag{33}$$

Setzt man

$$g_x = (aa),$$

so ergibt sich

$$g_x = \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon_x^2}. \tag{34}$$

Diese Formel zeigt uns, daß das Gewicht der Größe x dem Quadrate des entsprechenden mittleren Fehlers ε_x umgekehrt proportional ist.

Für die Bestimmung von ε_x müssen wir ε kennen, das aus der Formel (26) bestimmt werden kann, doch enthält diese Formel die Werte der wahren Fehler Δ, welche uns eigentlich nicht bekannt sind.

Zur Bestimmung von ε verfährt man folgendermaßen.

Man setzt den wahrscheinlichsten Wert $\bar{x}$ aus der Formel (32) in die Gleichung (30) ein und bezeichnet die entsprechenden Differenzen $m - a\bar{x}$ mit v.

$$\left.\begin{array}{l} m_1 - a_1\bar{x} = v_1 \\ m_2 - a_2\bar{x} = v_2 \\ m_3 - a_3\bar{x} = v_3 \\ \vdots \qquad \vdots \\ m_s - a_s\bar{x} = v_s \end{array}\right\}. \tag{35}$$

Die einzelnen Größen v sind uns bekannt.

Die Differenz zwischen der wahrscheinlichsten und der wahren Größe x bezeichnen wir mit ξ:

$$\bar{x} - x = \xi.$$

Also ist

$$x = \bar{x} - \xi.$$

Setzt man diese Größe x in die Formel (31) ein, so ergibt sich unter Berücksichtigung der Gruppe (35)

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= v_1 + a_1 \xi \\ \Delta_2 &= v_2 + a_2 \xi \\ \Delta_3 &= v_3 + a_3 \xi \\ &\vdots \\ \Delta_s &= v_s + a_s \xi. \end{aligned}$$

Folglich ist

$$\Sigma \Delta^2 = \Sigma v^2 + 2\xi \cdot \Sigma a v + (aa)\xi^2.$$

Die Summe $\Sigma a v$ ist nach den Formeln (35) und (32) gleich Null; folglich ist

$$\Sigma \Delta^2 = \Sigma v^2 + (aa)\xi^2,$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (26)

$$s \cdot \varepsilon^2 = \Sigma v^2 + (aa)\xi^2.$$

Der genaue Wert $\xi = \bar{x} - x$ ist uns unbekannt; wir begehen aber keinen großen Fehler, wenn wir statt ξ den mittleren Fehler von x, d. h. ε_x einsetzen.

Dann ergibt sich

$$s \cdot \varepsilon^2 = \Sigma v^2 + (aa)\varepsilon_x^2$$

oder

$$s \cdot \varepsilon^2 = \Sigma v^2 + \varepsilon^2,$$

wo ε_x^2 durch die entsprechende Größe aus der Gleichung (33) ersetzt worden ist.

Als endgültiges Resultat ergibt sich

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{s-1}}. \tag{36}$$

Es läßt sich also der mittlere Fehler eines jeden einzelnen Wertes von m durch Division der Summe der Quadrate der Abweichungen v durch die Zahl der einzelnen Beobachtungen s weniger der Anzahl der Unbekannten, also hier 1, und durch Ausziehen der Quadratwurzel aus der erhaltenen Größe bestimmen.

Wir sehen auch, daß das Quadrat des mittleren Fehlers (ε^2) immer etwas größer als $\frac{\Sigma v^2}{s}$ ist, d. h. größer als der mittlere Wert der Quadrate der Abweichungen (v^2).

Ist nun ε bekannt, so erhalten wir nach der Formel (33) auch den mittleren Fehler von x.

Digitized by Google

Wir setzen nun voraus, daß wir zwei Unbekannte x und y haben, welche folgender Gruppe linearer Gleichungen Genüge leisten:

$$\left.\begin{aligned} a_1 x + b_1 y &= m_1 \\ a_2 x + b_2 y &= m_2 \\ a_3 x + b_3 y &= m_3 \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_s x + b_s y &= m_s \end{aligned}\right\} . \tag{37}$$

a und b sind bestimmte Koeffizienten, aber die Größen m sind mit zufälligen Fehlern behaftet, welche wir mit Δ_1, Δ_2, Δ_3 usw. bezeichnen.

Da x und y die wahren Werte der Unbekannten darstellen, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= m_1 - (a_1 x + b_1 y) \\ \Delta_2 &= m_2 - (a_2 x + b_2 y) \\ \vdots \quad & \quad \vdots \\ \Delta_s &= m_s - (a_s x + b_s y). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit P der gemeinschaftlichen Existenz aller dieser Fehler läßt sich auf Grund der Formel (24) bestimmen:

$$P = \left[\frac{\partial \Delta}{\sqrt{2\pi}}\right]^s \frac{1}{\varepsilon^s} e^{-\frac{1}{2\varepsilon^2}\left[\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_s^2\right]}.$$

Die wahrscheinlichsten Werte x und y sind diejenigen, für welche die Wahrscheinlichkeit P ein Maximum oder $\Sigma\Delta^2$ ein Minimum wird.

Dies ist die Forderung der Methode der kleinsten Quadrate.

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß wir in dem Falle, wenn die Unbekannten x und y nicht durch lineare Gleichungen miteinander verbunden sind, sie auf eine lineare Gestalt zurückführen können. Um dieses nachzuweisen, wollen wir voraussetzen, daß wir folgendes Gleichungssystem haben:

$$\begin{aligned} F_1(x, y) &= M_1 \\ F_2(x, y) &= M_2 \\ &\vdots \\ F_s(x, y) &= M_s, \end{aligned}$$

wo die Größen F gegebene Funktionen sind.

Wir nehmen nun zwei beliebige von diesen Gleichungen und lösen sie nach x und y auf.

Die entsprechenden Werte bezeichnen wir mit x_0 und y_0.

Dann können wir setzen

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \xi \\ y &= y_0 + \eta, \end{aligned}$$

wo die neuen Unbekannten ξ und η sehr kleine Größen sind.

Digitized by Google

Zerlegt man eine beliebige Funktion $F(x, y)$ in eine Reihe unter Beibehaltung der ersten Glieder, so erhält man

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \xi + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \eta\,.$$

Setzt man nun

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = a,$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = b$$

und

$$M - F(x_0, y_0) = m,$$

so erhält man eine Gleichung von der Gestalt

$$a\xi + b\eta = m,$$

d. h. die Unbekannten ξ und η sind miteinander durch lineare Gleichungen verknüpft wie im Gleichungssystem (37).

Wir wollen nun die Bedingung, daß $\Sigma\Delta^2$ ein Minimum wird, analytisch ausdrücken.

Dazu ist erforderlich, daß

$$\frac{\partial \Sigma\Delta^2}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \Sigma\Delta^2}{\partial y} = 0.$$

Es ist aber

$$\Sigma\Delta^2 = [m_1 - (a_1 x + b_1 y)]^2 + [m_2 - (a_2 x + b_2 y)]^2 + \cdots + [m_s - (a_s x + b_s y)]^2;$$

folglich erhalten wir für die Bestimmung von x und y folgende beiden Gleichungen:

$$-a_1[m_1 - (a_1 x + b_1 y)] - a_2[m_2 - (a_2 x + b_2 y)] - \cdots - a_s[m_s - (a_s x + b_s y)] = 0$$

und

$$-b_1[m_1 - (a_1 x + b_1 y)] - b_2[m_2 - (a_2 x + b_2 y)] - \cdots - b_s[m_s - (a_s x + b_s y)] = 0.$$

Führt man hier die Gaußschen Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a_1 a_1 + a_2 a_2 + \cdots + a_s a_s &= (aa)^{*)} \\ b_1 b_1 + b_2 b_2 + \cdots + b_s b_s &= (bb) \\ a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_s &= (ab) = (ba) \\ a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_s m_s &= (am) \\ b_1 m_1 + b_2 m_2 + \cdots + b_s m_s &= (bm) \end{aligned}\right\}, \qquad (38)$$

*) Statt der [ ]-Klammern sind hier und im folgenden ( )-Klammern gesetzt.

Digitized by Google

so ergeben sich die folgenden beiden Gleichungen, aus denen man leicht die wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten x und y bestimmen kann:

$$\begin{aligned}(aa)x + (ab)y &= (am)\\ (ab)x + (bb)y &= (bm).\end{aligned} \qquad (39)$$

Diese Gleichungen nennt man die Normalgleichungen.

Dieselben müssen so gelöst werden, daß wir zugleich mit den wahrscheinlichsten Werten x und y auch die entsprechenden Gewichte g_x und g_y und die mittleren Fehler des Resultates ε_x und ε_y erhalten. Zu diesem Zweck darf man die Gleichungen (39) mit keiner Zahl multiplizieren oder dividieren; man muß ohne solche Änderungen vorzunehmen, aus einer derselben die eine Unbekannte bestimmen und sie in die andere Gleichung einsetzen. Es ist dann der Koeffizient der Unbekannten immer positiv und gibt das Gewicht der Größe x und y an.

Wir bestimmen y z. B. aus der zweiten Gleichung (39):

$$y = \frac{(bm) - (ab)x}{(bb)}.$$

Jetzt setzen wir diesen Ausdruck in die erste Gleichung (39) ein.

Dann ist

$$(aa)x + (ab)\cdot\frac{(bm) - (ab)x}{(bb)} = (am)$$

oder

$$\left\{(aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)}\right\} x = (am) - \frac{(ab)(bm)}{(bb)}.$$

In derselben Weise bestimmen wir x aus der ersten Gleichung (39) und setzen den Wert in die zweite ein

$$x = \frac{(am) - (ab)y}{(aa)}$$

und

$$(ab)\frac{(am) - (ab)y}{(aa)} + (bb)y = (bm),$$

oder

$$\left\{(bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)}\right\} y = (bm) - \frac{(ab)(bm)}{(aa)}.$$

Wir führen noch der Bequemlichkeit halber folgende abgekürzte Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned}(aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)} &= (aa_1)\\ (bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)} &= (bb_1)\\ (am) - \frac{(ab)(bm)}{(bb)} &= (am_1)\\ (bm) - \frac{(ab)(am)}{(aa)} &= (bm_1)\end{aligned}\right\}. \qquad (40)$$

Digitized by Google

Also

$$\left.\begin{aligned} x &= \frac{(a m_1)}{(a a_1)} \\ y &= \frac{(b m_1)}{(b b_1)} \end{aligned}\right\}. \tag{41}$$

Nach diesen zwei Formeln können die Unbekannten x und y berechnet werden.

Die Gewichte g_x und g_y dieser Größen geben die folgenden einfachen Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} g_x &= (a a_1) \\ g_y &= (b b_1) \end{aligned}\right\}, \tag{42}$$

und die mittleren Fehler ε_x und ε_y der endgültigen Werte beider Unbekannten sind

und
$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_x}} \\ \varepsilon_y &= \frac{\varepsilon}{\sqrt{g_y}} \end{aligned}\right\}, \tag{43}$$

wo ε der mittlere Fehler einer jeden Größe m, die in den Gleichungen (37) enthalten sind, bedeutet.

Dieser Satz muß noch bewiesen werden und wir wollen dieses etwa für die Unbekannte x ausführen.

Aus den Formeln (40) und (41) ergibt sich

$$x = \frac{(a m_1)}{(a a_1)} = \frac{(a m) - \frac{(a b)(b m)}{(b b)}}{(a a) - \frac{(a b)(a b)}{(b b)}} = \frac{(b b)(a m) - (a b)(b m)}{(a a)(b b) - (a b)(a b)}.$$

Setzt man hierin die Ausdrücke (am) und (bm) aus den Formeln (38) ein, so ergibt sich

$$x = \frac{(b b)[a_1 m_1 + a_2 m_2 + \cdots + a_s m_s] - (a b)[b_1 m_1 + b_2 m_2 + \cdots + b_s m_s]}{(a a)(b b) - (a b)(a b)}$$

oder

$$x = \frac{\{a_1 (b b) - b_1 (a b)\}}{(a a)(b b) - (a b)(a b)} m_1 + \frac{\{a_2 (b b) - b_2 (a b)\}}{(a a)(b b) - (a b)(a b)} m_2 + \cdots + \frac{\{a_s (b b) - b_s (a b)\}}{(a a)(b b) - (a b)(a b)} m_s.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel (28), so ergibt sich auf Grund der Formel (29), wo alle ε untereinander gleich sind,

$$\begin{aligned} \varepsilon_x^2 = \frac{1}{[(a a)(b b) - (a b)(a b)]^2} \big[&(b b)^2 \{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_s^2\} \\ &- 2(a b)(b b) \{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_s b_s\} \\ &+ (a b)^2 \{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_s^2\} \big] \varepsilon^2 \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder, nach den Beziehungen (38),

$$\varepsilon_x^2 = \frac{1}{[(aa)(bb)-(ab)(ab)]^2}\,[(bb)^2(aa) - 2(ab)(ab)(bb) + (ab)^2(bb)]\,\varepsilon^2$$

$$= (bb)\,\frac{(aa)(bb)-(ab)(ab)}{[(aa)(bb)-(ab)(ab)]^2}\,\varepsilon^2,$$

oder schließlich

$$\varepsilon_x^2 = \frac{\varepsilon^2}{(aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)}} = \frac{\varepsilon^2}{(aa_1)}.$$

In gleicher Weise hätten wir gefunden,

$$\varepsilon_y^2 = \frac{\varepsilon^2}{(bb_1)}.$$

Die Richtigkeit der Formeln (42) und (43) ist damit bewiesen.

Es erübrigt nur das mittlere Fehlerquadrat einer Messung m zu bestimmen.

Aus der Formel (26) folgt

$$\varepsilon^2 = \frac{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 + \cdots + \Delta_s^2}{s} = \frac{\Sigma\Delta^2}{s}.$$

Die wahren Größen der Beobachtungsfehler sind uns aber nicht bekannt.

Hier, wie auch im Falle einer Unbekannten, kennen wir nur die Abweichungen v.

Wir setzen deswegen die wahrscheinlichsten Werte x und y aus den Formeln (41), welche wir vorläufig mit $\bar{x}$ und $\bar{y}$ bezeichnen, in die Gleichungen (37) ein, indem wir folgende Bezeichnungen einführen:

$$\left.\begin{array}{l} m_1 - \{a_1\bar{x} + b_1\bar{y}\} = v_1 \\ m_2 - \{a_2\bar{x} + b_2\bar{y}\} = v_2 \\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ m_s - \{a_s\bar{x} + b_s\bar{y}\} = v_s \end{array}\right\}. \qquad (44)$$

Aus diesen Beziehungen finden wir

$$v_1^2 + v_2^2 + \cdots + v_s^2 = \Sigma v^2.$$

Im Falle einer Unbekannten hatten wir die Formel (36),

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{s-1}},$$

d. h. für die Bestimmung des mittleren Fehlers einer Ausmessung muß man die Summe der Quadrate der Abweichungen Σv^2 durch die Zahl der Beobachtungen $-\,1$ dividieren.

Digitized by Google

Im Falle zweier Unbekannten läßt sich die entsprechende Größe ε nach der Formel

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma v^2}{s-2}}, \tag{45}$$

bestimmen, d. h. auch hier muß man von der gesamten Anzahl der Beobachtungen die Anzahl der Unbekannten, hier also 2, abziehen.

Ohne diese Formel zu beweisen, können wir uns von ihrer Richtigkeit durch die folgenden einfachen Erwägungen überzeugen.

Denken wir uns den besonderen Fall, daß die Gruppe (37) aus 2 Gleichungen ($s = 2$) besteht.

Dann erhalten wir aus den letzteren direkt die gesuchten Größen x und y und Σv^2 ist sicher gleich Null.

In Wirklichkeit ist aber ε nicht gleich Null, da wir doch bei der Ausmessung der Größe m einen Fehler begehen.

Damit diese zwei Forderungen $(\Sigma v^2 = 0$ und $\varepsilon \gtrless 0)$ mit der Formel (45) zugleich befriedigt werden können, muß der Ausdruck (45) die unbestimmte Form $\frac{0}{0}$ annehmen; und das ist nur dann möglich, wenn im Nenner $s - 2$ steht.

Die vorhergehenden Schlüsse und Erwägungen können sehr leicht auch auf den Fall von 3 und einer noch größeren Anzahl von Unbekannten angewandt werden. Wir wollen dieses jedoch unterlassen, da der Weg zur Lösung dieser Fragen klar ist, wollen aber noch kurz auf den besonderen Fall eingehen, daß alle Koeffizienten einer Unbekannten, z. B. von x, gleich 1 sind; es kann dann die Methode der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von x und y bedeutend vereinfacht werden.

Wir setzen voraus, daß in der Gruppe der Gleichungen (37) alle Koeffizienten a gleich 1 sind.

Durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir

$$\Sigma a \cdot x + \Sigma b y = \Sigma m.$$

In dem betreffenden besonderen Falle (siehe Bez. (38)) ist

$$\left.\begin{aligned} \Sigma a &= (aa) = s \\ \Sigma b &= (ab) \\ \Sigma m &= (am) \end{aligned}\right\}. \tag{α}$$

Folglich ist

$$(aa) \cdot x + (ab) y = (am). \tag{β}$$

Wir erhalten so die erste Normalgleichung (39).

Andererseits ist

$$x = \frac{\Sigma m}{s} - \frac{\Sigma b}{s} \cdot y. \tag{γ}$$

Digitized by Google

Zieht man diese Gleichung von einer jeden Gleichung der Gruppe (37) ab, wo die Koeffizienten $a = 1$ sind, so hebt sich x auf und wir erhalten die folgende Gleichungsgruppe, die nur eine Unbekannte y enthält:

$$\left.\begin{array}{l}\left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y = \left(m_1 - \frac{\Sigma m}{s}\right) \\ \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y = \left(m_2 - \frac{\Sigma m}{s}\right) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right) \cdot y = \left(m_s - \frac{\Sigma m}{s}\right)\end{array}\right\} . \tag{δ}$$

Aus dieser Gruppe (δ) bestimmen wir y nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Dann ergibt sich

$$\left[\left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2 + \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2 + \cdots + \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right)^2\right] \cdot y = \left[\left(b_1 - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_1 - \frac{\Sigma m}{s}\right)\right.$$
$$\left. + \left(b_2 - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_2 - \frac{\Sigma m}{s}\right) + \cdots + \left(b_s - \frac{\Sigma b}{s}\right)\left(m_s - \frac{\Sigma m}{s}\right)\right]$$

oder

$$\left[\Sigma b^2 - 2 \cdot \Sigma b \cdot \frac{\Sigma b}{s} + s \cdot \frac{(\Sigma b)^2}{s^2}\right] y = \left[\Sigma b m - 2 \cdot \Sigma m \cdot \frac{\Sigma b}{s} + s \cdot \frac{\Sigma m \cdot \Sigma b}{s^2}\right].$$

Mit Bezugnahme auf die Bezeichnungen (38) und die Beziehungen (α) erhalten wir schließlich

$$\left[(b b) - \frac{(a b)(a b)}{(a a)}\right] \cdot y = \left[(b m) - \frac{(a b)(a m)}{(a a)}\right]$$

oder nach den Bezeichnungen (40)

$$y = \frac{(b m_1)}{(b b_1)}. \tag{ε}$$

Wir sind also zu derselben Formel für y gekommen (siehe die zweite Formel (41)) und sehen, daß wir bei der Lösung der gegebenen Gleichungsgruppe mit zwei Unbekannten nach der vereinfachten Methode von den allgemeinen Grundsätzen der Methode der kleinsten Quadrate nicht abweichen.

Das Gewicht der zu bestimmenden Größe y ist $g_y = (b b_1)$ (siehe Formel (42)).

Mit dem bestimmten Wert y finden wir aus der Formel (β) oder (γ) die andere Unbekannte.

Da die Gleichung (β) eine der allgemeinen Normalgleichungen ist, so ist das Gewicht der Größe x, wie in der allgemeinen Theorie

$$g_x = (a a_1).$$

Digitized by Google

Der hier auseinandergesetzte besondere Fall trifft unter anderem auch bei der Bestimmung der reduzierten Pendellänge l zu, wie aus Gruppe (11), in der man x durch $-x$ ersetzen kann, zu ersehen ist.

Die Methode der kleinsten Quadrate hat eine große praktische Bedeutung bei der Bearbeitung der Resultate physikalischer, astronomischer, geodätischer und anderer Beobachtungen, wenn die Anzahl der einzelnen Messungen die Zahl der Unbekannten übertrifft; deswegen sollte ein jeder Physiker mit dieser Methode vertraut sein.

Wir wollen jetzt die Methode der kleinsten Quadrate auf die Bestimmung der Konstanten der Seismographen anwenden und zur Formel (14) zurückkehren.

Die Anzahl der Gleichungen ist $s+1$.

Wir erhalten, wenn wir die Bezeichnungen (13) berücksichtigen,

$$(aa) = s+1$$

$$(bb) = b_0^2 + b_1^2 + \cdots + b_s^2$$

$$(ab) = b_0 + b_1 + \cdots + b_s$$

$$(am) = m_0 + m_1 + \cdots + m_s$$

$$(bm) = b_0 m_0 + b_1 m_1 + \cdots + b_s m_s.$$

Wir bilden dann hiermit die beiden Normalgleichungen

$$\left.\begin{aligned} (aa)\xi + (ab)\eta &= (am) \\ (ab)\xi + (bb)\eta &= (bm) \end{aligned}\right\}.$$

Damit man zugleich mit der Bestimmung der wahrscheinlichsten Werte von ξ und η die entsprechenden Gewichte g_ξ und g_η und die mittleren Fehler ε_ξ und ε_η erhält, darf man, wie früher bemerkt, die vorstehenden Gleichungen nicht multiplizieren und auch durch keine Zahl dividieren.

Man erhält dann für die Gewichte g_ξ und g_η und für die Unbekannten ξ und η folgende Ausdrücke:

$$\left.\begin{aligned} g_\xi &= (aa) - \frac{(ab)(ab)}{(bb)} \\ g_\eta &= (bb) - \frac{(ab)(ab)}{(aa)} \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{(am) - \frac{(ab)(bm)}{(bb)}}{g_\xi} \\ \eta &= \frac{(bm) - \frac{(ab)(am)}{(aa)}}{g_\eta} \end{aligned}\right\}. \tag{47}$$

Digitized by Google

Die mittleren Fehler ε werden nun in folgender Weise bestimmt. Da uns die wahre Größe der Fehler unbekannt ist, so können wir nur die Abweichungen von dem wahrscheinlichsten Werte der Unbekannten bestimmen. Zu diesem Zwecke setzt man die aus der Formel (47) erhaltenen Werte für ξ und η in die Gruppe der Gleichungen (14) ein und führt dabei die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{array}{l} m_0 - \{a_0\xi + b_0\eta\} = v_0 \\ m_1 - \{a_1\xi + b_1\eta\} = v_1 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ m_s - \{a_s\xi + b_s\eta\} = v_s \end{array}\right\} . \tag{48}$$

Hieraus erhalten wir Σv^2; es ergibt sich dann für den mittleren Fehler

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\Sigma_{v^2}}{s-1}} . \tag{49}$$

Für die mittleren Fehler der beiden Unbekannten ξ und η erhalten wir also:

$$\left.\begin{array}{l} \varepsilon_\xi = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{g_\xi}} \\ \varepsilon_\eta = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{g_\eta}} \end{array}\right\} . \tag{50}$$

Sind also ξ und η bestimmt und sind die angenäherten Werte x_0 und y_0 bekannt, so findet man nach den Formeln (12) und (10) die beiden Unbekannten

$$x = i_0 = x_0 - \xi$$

und

$$y = \frac{l}{g} = y_0 + \eta,$$

wobei

$$\varepsilon_{i_0} = \varepsilon_\xi \tag{51}$$

und

$$\varepsilon_y = \varepsilon_\eta .$$

Hieraus finden wir

$$l = gy, \tag{52}$$

wobei

$$\varepsilon_l = g\varepsilon_\eta \tag{53}$$

ist, wo g die Beschleunigung der Schwerkraft bedeutet.

Formel (52) gibt uns also die reduzierte Pendellänge l und Formel (53) die Größe des entsprechenden mittleren Fehlers.

Zu dem vorhergehenden ist noch folgendes zu bemerken.

Die Methode der kleinsten Quadrate beruht auf der Voraussetzung, daß die Koeffizienten a und b in den Gleichungen (14) bestimmte Zahlen sind und folglich genau bekannt sind.

Digitized by Google

Bei der Bestimmung von l ist das jedoch nicht der Fall, abgesehen von a, das gleich 1 ist.

Was aber b_k anlangt, so ist $b_k = n_k^2$ (siehe Bezeichnungen (13)); da nun n_k aus den Beobachtungen entnommen wird, sind alle b_k etwas fehlerhaft. Wenn wir die wahre Größe von b_k mit (b_k) bezeichnen und den entsprechenden Fehler mit δ_k, so ergibt sich

$$(b_k) = n_k^2 + \delta_k.$$

Folglich

$$(b_k)\,\eta = n_k^2\eta + \delta_k\eta.$$

Da aber η sehr klein ist, weil wir nicht die Größen x und y selbst sondern nur die Korrektionen der angenäherten Werte der Unbekannten x_0 und y_0 nach der Methode der kleinsten Quadrate bestimmt haben, so ist das Produkt $\delta_k\eta$ eine kleine Größe höherer Ordnung, die wir vernachlässigen können.

Infolgedessen sind wir berechtigt, die Koeffizienten b_k als genau bekannte aufzufassen und die Methode der kleinsten Quadrate anzuwenden, die uns bekanntlich folgende Vorzüge bietet: erstens ist jede Willkür in der Wahl irgendwelcher zwei Gleichungen aus dem System (14) für die Bestimmung der zwei Unbekannten ξ und η ausgeschlossen, denn alle Gleichungen werden in gleicher Weise berücksichtigt, zweitens ergeben sich zuverlässigere Größen für ξ und η (der kleinste mittlere Fehler des Resultats), drittens gibt die Methode die Möglichkeit, die Genauigkeit, mit welcher die betreffenden Unbekannten aus den Beobachtungen bestimmt werden, zu schätzen.

Zum Schluß wollen wir ein der Praxis entnommenes Zahlenbeispiel anführen. Dasselbe bezieht sich auf die Bestimmung der reduzierten Länge des Horizontalpendels Nr. VI, das an der seismischen Station in Eskdalemuir in Schottland aufgestellt ist.

In der folgenden Tabelle sind gegeben:

die beobachtete Periode des Pendels T',
das entsprechende logarithmische Dekrement Λ,
der nach Formel (1) berechnete Wert der Konstanten n,
die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung $T = \frac{2\pi}{n}$,
die Ablesung an der vertikalen Skala h und
die Änderung des Neigungswinkels der Achse Δi.

k ist die Nummer der Beobachtungsreihe.

Der Abstand des Spiegels am Pendelgestell von der vertikalen Skala betrug $D = 7672$ mm.

k	T'	Λ	n	T	h	Δi
0	31ˢ,100	0,0867	0,2024	31ˢ,04	200,00 mm	0,000000
1	25,347	0,0691	0,2483	25,31	196,13	0,000252
2	21,889	0,0600	0,2873	21,87	192,25	0,000505
3	19,101	0,0498	0,3292	19,09	187,7	0,000802
4	16,904	0,0433	0,3719	16,90	182,0	0,001173
5	14,313	0,0363	0,4392	14,31	172,0	0,001825
6	13,216	0,0331	0,4756	13,21	165,8	0,002229

Digitized by Google

Auf Grund dieser Zahlen ergibt sich folgendes Gleichungssystem (11):

k	
0	$0{,}0410\,y - x = 0{,}000000$
1	$0{,}0616\,y - x = 0{,}000252$
2	$0{,}0826\,y - x = 0{,}000505$
3	$0{,}1083\,y - x = 0{,}000802$
4	$0{,}1383\,y - x = 0{,}001173$
5	$0{,}1929\,y - x = 0{,}001825$
6	$0{,}2262\,y - x = 0{,}002229.$

Kombiniert man die erste und letzte dieser Gleichungen, so ergibt sich

$$x_0 = 0{,}000493$$
$$y_0 = 0{,}01204.$$

Setzt man

$$x = x_0 - \xi$$
$$y = y_0 + \eta,$$

so erhält man folgendes Gleichungssystem (14)

k	
0	$\xi + 0{,}0410\,\eta = \ 0{,}000000$
1	$\xi + 0{,}0616\,\eta = + 0{,}000003$
2	$\xi + 0{,}0826\,\eta = + 0{,}000004$
3	$\xi + 0{,}1083\,\eta = - 0{,}000009$
4	$\xi + 0{,}1383\,\eta = + 0{,}000001$
5	$\xi + 0{,}1929\,\eta = - 0{,}000004$
6	$\xi + 0{,}2262\,\eta = \ 0{,}000000.$

Die Normalgleichungen lauten (Gleichung (37), (38), (39)):

$$7\xi + 0{,}85089\,\eta = - 0{,}000005$$
$$0{,}85089\,\xi + 0{,}13153\,\eta = - 0{,}000001093.$$

Daraus ergibt sich nach den Formeln (46) und (47):

$$\xi = + 0{,}000001338$$
$$\eta = - 0{,}000017$$

und

$$g_\xi = 1{,}4945$$
$$g_\eta = 0{,}02809.$$

Digitized by Google

Folglich auf Grund der Beziehung (10)

$$x = i_0 = 0{,}00049195 = 0^\circ\,1'\,41'',47$$

und

$$y = \frac{l}{g} = 0{,}012020.$$

Die Beschleunigung der Schwerkraft g in Petersburg, wo dieses Pendel untersucht wurde, beträgt 9818,5 mm.

Damit erhält man

$$l = 118{,}02 \text{ mm}.$$

Um die mittleren Fehler ε_{i_0} und ε_l dieser Werte zu ermitteln, wollen wir die Werte von v nach den Gleichungen (48) bestimmen

k	v
0	0,000000
1	+ 0,000003
2	+ 0,000004
3	− 0,000008
4	+ 0,000002
5	− 0,000002
6	+ 0,000003.

Da $s = 6$ ist, so ergibt sich

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum\limits_{k=0}^{k=s} v^2}{s-1}} = \pm\, 0{,}0000046,$$

und nach den Formeln (50)

$$\varepsilon_\xi = \pm\, 0{,}0000037 = \pm\, 0'',77$$

und

$$\varepsilon_\eta = \pm\, 0{,}000027.$$

Da aber $\varepsilon_{i_0} = \varepsilon_\xi$ und $\varepsilon_l = g\varepsilon_\eta$, so erhält man schließlich

$$\underline{i_0 = 0^\circ\,1'\,41'',47 \pm 0'',77}$$

und

$$\underline{l = 118{,}02 \text{ mm} \pm 0{,}27 \text{ mm}.}$$

Dieses Beispiel zeigt, wie genau man nach dieser Methode i_0 und l bestimmen kann.

Für die größte Periode $T = 31{,}04$ Sek. ist der Neigungswinkel i_0 der Drehungsachse recht klein

22*

Digitized by Google

Setzen wir den Wert für i_0 in die Formel (4) ein, so ergibt sich

$$\alpha = 2033\psi.$$

Da die Grenze der Genauigkeit, mit welcher wir die Winkelausschläge des Pendels ausmessen können, bei Anwendung der direkten optischen Registrierung ungefähr $2^1/_2''$ beträgt, so kann man mit einem Horizontalpendel, das auf eine lange Periode eingestellt ist, Bodenneigungen ψ mit einer Genauigkeit bis zu 0'',0012 ermitteln.

§ 3. **Bestimmung der Konstanten μ^2, T und k.**

Die Konstante μ^2 charakterisiert die Größe der Dämpfung des Pendels. Ist $\mu^2 = 1$, so ist das Pendel ungedämpft; ist $\mu^2 = 0$, so befindet sich das Pendel an der Grenze der Aperiodizität. Ist $\mu^2 < 0$, so ist die Grenze der Aperiodizität überschritten, und die Gleichung der Eigenbewegung des Pendels ist nicht mehr durch trigonometrische, sondern durch Exponentialfunktionen ausgedrückt.

Als Dämpfungsverhältnis v bezeichneten wir das Verhältnis zweier aufeinander folgenden maximalen Amplituden der Pendelausschläge (unabhängig vom Vorzeichen),

$$v = \frac{\theta_k}{\theta_{k+1}},$$

und als logarithmisches Dekrement Δ den Briggschen Logarithmus von v:

$$\Delta = \log_{10} v.$$

Die Beziehung zwischen μ^2 und v gibt die Formel (60) Kap. V:

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}},$$

woraus wir finden

$$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + \left(\frac{\log_{10} v}{\log_{10} e}\right)^2}$$

oder

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Delta^2}. \tag{54}$$

Wenn die Dämpfung nicht sehr stark ist und man aus den Beobachtungen der einzelnen Ausschläge des Pendels eine zuverlässige Größe für das logarithmische Dekrement Δ ermitteln kann (s. § 2 des VI. Kap.), so läßt sich die entsprechende Größe der Dämpfungskonstante μ^2 leicht bestimmen.

Bei dieser Berechnung ist die Tabelle IX der „Seismometrischen Tabellen" sehr bequem, in welcher direkt die Werte

$$\log \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Delta^2}$$

gegeben sind.

Digitized by Google

Je größer v ist, desto schwerer ist es, Δ genau zu bestimmen, denn die Zahl der Ausschläge wird dann gering.

In der Praxis könnte man noch v aus den Beobachtungen der Schwingungen bis $v = 20$ bestimmen, welches nach Tabelle I der „Seismometrischen Tabellen“ dem Werte $\mu^2 = 0{,}52$ entspricht; bei kleinen Werten von μ^2 ist diese Methode jedoch nicht gut anwendbar und für stark gedämpfte Pendel läßt sie sich gar nicht benutzen.

Es gibt aber zwei andere Methoden für die Bestimmung von μ^2 bei jeder Größe der Dämpfung. Sie sind in der Abhandlung „Über die Bestimmung des Dämpfungsverhältnisses stark gedämpfter Horizontalpendel“ in „Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente“ T. IV. Livr. 1 beschrieben; daselbst sind auch besondere Tabellen gegeben, die die Berechnungen erleichtern. Diese Methoden haben sich in der Praxis bei Anwendung der optischen Registrierungsart gut bewährt, sind aber insofern unbequem, als sie die Aufnahme der Kurve der Eigenbewegung des Pendels erfordern.

Wir werden sie hier nicht weiter betrachten, sondern beschränken uns auf die Darstellung einer geeigneten Methode der Bestimmung von μ^2, wenn die Pendel stark gedämpft sind, d. h. wenn $\mu^2 < 0{,}20$ oder $v > 536$ ist. Das trifft zu, wenn das Pendel nahezu aperiodisch ist; die Methode ist daher besonders für die Seismographen mit galvanometrischer Registrierung wichtig. Sie ist ebenfalls anwendbar für negative Werte von μ^2, wenn dieselben ihrer absoluten Größe nach 0,20 nicht übersteigen, und setzt dabei voraus, daß das Pendel mit dem Galvanometer so gekoppelt ist, wie es für die galvanometrische Registrierung erforderlich ist. Das Galvanometer ist nach der Voraussetzung genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt, d. h. es muß die Beziehung $\varepsilon_1 = n_1$ gelten (Formel (32) Kap. VI).

Die Methode ist sehr einfach und erfordert keine Aufnahme der Kurve der Eigenbewegung des Pendels. Man hat nur nötig, dem stark gedämpften Pendel einen leichten Anstoß mittels eines besonderen, durch einen Elektromagneten in Bewegung gesetzten Hebels zu erteilen und mit Fernrohr und Skala den entsprechenden ersten Winkelausschlag des Pendels θ zu bestimmen.

Ein zweiter Beobachter bestimmt zugleich die zwei ersten maximalen, aufeinander folgenden Ausschläge des Galvanometers, die wir mit φ_1 und φ_2 bezeichnen wollen und ferner mittelst eines guten Sekundenzählers, dessen Korrektion bekannt ist, die Zeit t_0, welche vom Beginn der Galvanometerbewegung bis zum Momente, wo das Galvanometer das erste Mal durch seine Ruhelage hindurchgeht, verläuft.

Vermittelst dieser vier Größen θ_m, φ_1, φ_2 und t_0 kann man sowohl die Dämpfungskonstante μ^2 als auch die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung $\left(T = \frac{2\pi}{n}\right)$ für den Fall bestimmen, daß die Magnetpole schon in die Nähe der Kupferplatte gebracht sind und das Pendel sich daher in der Nähe der Aperiodizitätsgrenze befindet; — ferner kann man noch daraus den Übertragungsfaktor k ermitteln. Durch die angegebenen einfachen Be-

Digitized by Google

obachtungen werden auf ein Mal die drei Unbekannten des Seismographen bestimmt. Für die Ausführung einer vollen Beobachtung zur Bestimmung dieser drei Größen sind nur wenige Sekunden Zeit erforderlich.

Fig. 125.

Die Kurve der Bewegung des Pendels, wenn es in der Nähe der Aperiodizitätsgrenze sich befindet, hat die in Figur 125 dargestellte Form.

Zur Bestimmung des maximalen Winkelausschlags θ_m des Pendels wird einem festen, in der Nähe der Drehungsachse befestigten Spiegel gegenüber in der Entfernung von 4 bis 6 *m* ein Fernrohr mit horizontaler Skala aufgestellt. *D* sei die Entfernung des Spiegels von der Skala und *m* die Ablesung, die dem maximalen Winkelausschlag θ_m entspricht.

Dann ist

$$\theta_m = \frac{m}{2D}. \qquad (55)$$

Da *D* groß ist, so ist keine Korrektion für *m* nötig.

Die Größe des Winkels θ_m, die von der Stärke des Stoßes abhängt, kann mittelst einer besonderen Schraube, die ermöglicht, die Entfernung des Hebels des Elektromagneten vom Pendelgewicht zu variieren, reguliert werden. Man muß letzteren dabei so einstellen, daß, wenn er auf das Pendelgewicht schlägt, der Pendelarm möglichst wenig in sekundäre Schwingungen gerät. Die entsprechende Stelle ist durch Ausprobieren zu finden. Die Bemerkung bezieht sich naturgemäß nur auf die Zöllnersche Aufhängung.

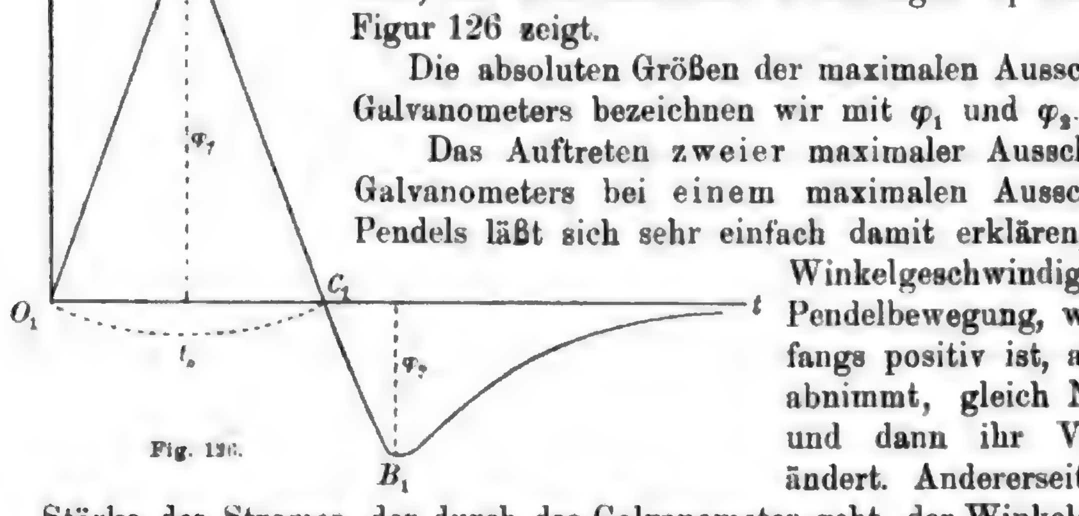


Fig. 126.

Wenn das Pendel eine Kurve wie Figur 125 beschreibt, so beschreibt das Galvanometer eine ganz andere, mit zwei maximalen Ausschlägen A_1 und B_1, wie Figur 126 zeigt.

Die absoluten Größen der maximalen Ausschläge des Galvanometers bezeichnen wir mit φ_1 und φ_2.

Das Auftreten zweier maximaler Ausschläge des Galvanometers bei einem maximalen Ausschlag des Pendels läßt sich sehr einfach damit erklären, daß die Winkelgeschwindigkeit θ' der Pendelbewegung, welche anfangs positiv ist, allmählich abnimmt, gleich Null wird und dann ihr Vorzeichen ändert. Andererseits ist die Stärke des Stromes, der durch das Galvanometer geht, der Winkelgeschwindigkeit θ' proportional. Es wird also dieser Strom seine Richtung ändern; da nun am Anfange und am Ende der Pendelbewegung die Stromstärke

Digitized by Google

immer gleich Null ist, so erhalten wir auf der Galvanometerkurve zwei maximale Ausschläge.

Die Entfernung der Skala vom Galvanometerspiegel sei D_1, wobei D_1 der Bequemlichkeit halber immer genau gleich $1\,m$ gewählt wird. Die zugehörigen maximalen Ausschläge an der Skala (unabhängig vom Vorzeichen) seien m_1 und m_2.

Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1 &= \frac{m_1 - \Delta m_1}{2 D_1} \\ \varphi_2 &= \frac{m_2 - \Delta m_2}{2 D_1}\end{aligned}\right\} . \tag{56}$$

Bei der Kleinheit von D_1 muß man die Korrektionen Δm der Ablesungen berücksichtigen. Ist D_1 aber gleich $1\,m$, so läßt sich die Korrektion sehr einfach aus der Tabelle VIII der „Seismometrischen Tabellen“ entnehmen.

Das Zeitintervall t_0 entspricht dem Abschnitt $O_1 C_1$.

Zur Ausführung aller dieser Bestimmungen müssen zwei Beobachter vorhanden sein, von denen der eine m und der andere m_1, m_2 und t_0 bestimmt.

Das Galvanometer ist nach der Voraussetzung genau aperiodisch. Seine Eigenperiode (ohne Dämpfung) T_1 soll schon zuvor bestimmt sein. Also ist auch die Konstante n_1 bestimmt

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} . \tag{57}$$

Für die Anwendung dieser Methode der Bestimmung von μ^2 und k und der genauen Größe der Periode des Pendels T (bei genäherten Magneten) ist, wie oben bereits gesagt, erforderlich, daß die Periode des Pendels ohne Dämpfung, die gleich $\frac{2\pi}{n}$ ist, sich sehr wenig von der Periode des Galvanometers T_1 unterscheidet, anders ausgedrückt, daß die Größe

$$\xi = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{T - T_1}{T_1} \tag{58}$$

sehr klein ist.

Bekannte Größen sind somit T_1, D und D_1 und es müssen beobachtet werden m, m_1, m_2 und t_0. Hieraus sollen μ^2, T und k bestimmt werden.

Man wird sich jedoch in der Praxis nicht mit einer Bestimmung begnügen, sondern mehrere Mal (etwa zehnmal) die Messungen ausführen, um sichere Werte der unbekannten Konstante zu bekommen. Auch in diesem Fall werden im allgemeinen nur wenige Minuten Zeit in Anspruch genommen.

Diese Beobachtungen liefern zugleich auch ein Kriterium zur Beurteilung der Frage, wie weit das Pendel von der Grenze der Aperiodizität entfernt ist. Man kann dann durch Änderung der Poldistanz der Magnete mittelst besonderer Mikrometerschrauben das Pendel so genau als möglich an die Grenze der Aperiodizität einstellen und wiederholt dann erst die definitiven Beobachtungen.

Digitized by Google

Wir wollen nun die Theorie dieser Methode der Bestimmung der Pendelkonstanten betrachten.

Bei der Ableitung der verschiedenen Formeln wollen wir voraussetzen, daß μ^2 und ξ kleine Größen sind, deren Quadrate man vernachlässigen kann.

Denken wir uns, daß dem Pendel ein Anstoß erteilt worden ist, der ihm die anfängliche Winkelgeschwindigkeit θ_0' verleiht.

Dann wird die Gleichung der Bewegung auf Grund der Formel (40) Kap. V (in der Voraussetzung $n > \varepsilon$) folgendermaßen ausgedrückt:

$$\theta = \frac{\theta_0'}{\gamma} e^{-\varepsilon t} \sin \gamma t, \tag{59}$$

wo

$$\gamma = \sqrt{n^2 - \varepsilon^2}. \tag{60}$$

Nach der Formel (41) desselben Kapitels tritt das erste Maximum θ_m im Moment t_m auf, wo

$$\operatorname{tg} \gamma t_m = \frac{\gamma}{\varepsilon}, \tag{61}$$

und nach der Formel (44)

$$\theta_m = \frac{\theta_0'}{n} e^{-\varepsilon t_m}.$$

Hieraus finden wir

$$\theta_0' = n e^{\varepsilon t_m} \cdot \theta_m.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (59) ein, so ergibt sich

$$\theta = n e^{\varepsilon t_m} \cdot \theta_m e^{-\varepsilon t} \frac{\sin \gamma t}{\gamma}. \tag{62}$$

Auf Grund der Formeln (56), (57) und (58) des V. Kapitels haben wir andererseits

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2}$$

und

$$\gamma = n\mu. \tag{63}$$

Hieraus finden wir

$$\varepsilon = n\sqrt{1 - \mu^2},$$

oder, unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung,

$$\varepsilon = n\left(1 - \frac{1}{2}\mu^2\right). \tag{64}$$

Folglich ist

$$\frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu^2}.$$

Aus der Formel (61) finden wir ferner

$$t_m = \frac{1}{\gamma} \operatorname{arc\,tg} \frac{\gamma}{\varepsilon} = \frac{1}{n\mu} \operatorname{arc\,tg} \left(\frac{\mu}{1 - \frac{1}{2}\mu^2}\right)$$

Digitized by Google

oder

$$t_m = \frac{1}{n\mu}\left[\frac{\mu}{1-\frac{1}{2}\mu^2} - \frac{1}{3}\frac{\mu^3}{\left(1-\frac{1}{2}\mu^2\right)^3}\right].$$

Beschränken wir uns auf die Glieder von der Ordnung von μ^2, so erhalten wir

$$t_m = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{2}\mu^2 - \frac{1}{3}\mu^2\right] = \frac{1}{n}\left[1+\frac{1}{6}\mu^2\right].$$

Folglich

$$\varepsilon t_m = \left(1-\frac{1}{2}\mu^2\right)\left(1+\frac{1}{6}\mu^2\right) = 1-\frac{1}{3}\mu^2,$$

und

$$e^{\varepsilon t_m} = e\cdot e^{-\frac{1}{3}\mu^2} = e\cdot\left(1-\frac{1}{3}\mu^2\right).$$

Andererseits ist

$$e^{-\varepsilon t} = e^{-nt}\cdot e^{\frac{1}{2}\mu^2\cdot nt} = e^{-nt}\cdot\left[1+\frac{1}{2}\mu^2 nt\right].$$

Ferner haben wir

$$\frac{\sin\gamma t}{\gamma} = \frac{\sin n\mu t}{n\mu} = \frac{1}{n\mu}\left[n\mu t - \frac{n^3\mu^3 t^3}{6}\right] = t\left[1-\frac{1}{6}\mu^2 n^2 t^2\right].$$

Setzt man die gefundenen Ausdrücke für $e^{\varepsilon t_m}$, $e^{-\varepsilon t}$ und $\frac{\sin\gamma t}{\gamma}$ in die Formel (62) ein, so erhält man

$$\theta = n\theta_m e\cdot\left(1-\frac{1}{3}\mu^2\right)\cdot e^{-nt}\left(1+\frac{1}{2}\mu^2\cdot nt\right)t\left(1-\frac{1}{6}\mu^2 n^2 t^2\right).$$

Zur Bequemlichkeit der weiteren Berechnungen führen wir die folgende neue Variable ein:

$$u = nt. \tag{65}$$

Beschränkt man sich nun auf die Glieder der Ordnung von μ^2, so erhält man

$$\theta = \theta_m e\cdot ue^{-u}\left(1-\frac{1}{3}\mu^2\right)\left(1+\frac{1}{2}\mu^2 u\right)\left(1-\frac{1}{6}\mu^2 u^2\right)$$

oder

$$\theta = \theta_m e\cdot ue^{-u}\left[1+\mu^2\left\{-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}u-\frac{1}{6}u^2\right\}\right]. \tag{66}$$

Dies ist die Gleichung der Pendelbewegung.

Bilden wir aus dieser Formel den Ausdruck für $\frac{d\theta}{du}$.

$$\frac{d\theta}{du} = \theta_m e\cdot\frac{d}{du}\left[e^{-u}\cdot\left\{u+\mu^2\left(-\frac{1}{3}u+\frac{1}{2}u^2-\frac{1}{6}u^3\right)\right\}\right]$$

oder

$$\frac{d\theta}{du} = \theta_m e\cdot e^{-u}\left[(1-u)+\mu^2\left\{-\frac{1}{3}+\frac{4}{3}u-u^2+\frac{1}{6}u^3\right\}\right]. \tag{67}$$

Digitized by Google

Wenden wir uns nun zur Differentialgleichung der Galvanometerbewegung.

Auf Grund der Formel (32) des § 3 Kap. VI haben wir

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2\varepsilon_1 \frac{d\varphi}{dt} + n_1^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0.$$

Nach der Voraussetzung ist das Galvanometer genau aperiodisch folglich ist

$$\varepsilon_1 = n_1.$$

Wir führen nun in die vorige Gleichung statt der Variablen t unsere neue Variable u aus der Gleichung (65) ein.

Da

$$\frac{du}{dt} = n,$$

so ergibt sich

$$\frac{d^2\varphi}{du^2}\cdot n^2 + 2n_1\frac{d\varphi}{du}\cdot n + n_1^2\varphi + k\frac{d\theta}{du}\cdot n = 0.$$

Nun dividieren wir die Gleichung durch n^2 (s. auch die Formel (67)

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\frac{n_1}{n}\cdot\frac{d\varphi}{du} + \frac{n_1^2}{n^2}\varphi$$

$$+ \frac{k\theta_m c}{n}\cdot e^{-u}\left[(1-u) + \mu^2\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}\right] = 0. \qquad (68)$$

Wir führen weiter zur Bequemlichkeit folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \frac{n_1}{n} &= \nu \\ \frac{k\theta_m c}{n} &= -A \\ e^{-u}(1-u) &= \Phi(u) \\ e^{-u}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\} &= \Phi_1(u) \end{aligned}\right\}. \qquad (69)$$

Setzen wir diese Größe in die Gleichung (68) ein, dann ergibt sich

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\nu\frac{d\varphi}{du} + \nu^2\varphi = A[\Phi(u) + \mu^2\Phi_1(u)]. \qquad (70)$$

Hier ist nach Formel (58)

$$\nu = \frac{n_1}{n} = 1 + \xi. \qquad (71)$$

Wir wollen uns nun mit der Integration der linearen Differentialgleichung (70) beschäftigen, wozu wir die Methode der Variation der willkürlichen Konstanten anwenden.

Digitized by Google

Dazu müssen wir zunächst das Integral der folgenden Gleichung aufsuchen:

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} + 2\nu \frac{d\varphi}{du} + \nu^2\varphi = 0. \tag{72}$$

Setzen wir wie üblich

$$\varphi = e^{-\alpha u},$$

dann erhalten wir für die Bestimmung von α folgende quadratische Gleichung

$$\alpha^2 - 2\nu\alpha + \nu^2 = 0,$$

welche zwei gleiche Wurzeln hat

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \nu.$$

In diesem Falle wird das allgemeine Integral der Gleichung (72), wie aus der Theorie der Integration der linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten bekannt ist, durch eine Funktion folgender Form ausgedrückt:

$$\varphi = e^{-\nu u}[C_1 + C_2 u], \tag{73}$$

wo C_1 und C_2 zwei willkürliche Konstanten sind.

Das läßt sich leicht durch direktes Einsetzen kontrollieren.

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}[-C_1\nu - C_2\nu u + C_2] = e^{-\nu u}[-C_1\nu + C_2(1 - \nu u)].$$

und

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-\nu + \nu^2 u) - C_2\nu] = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)].$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke für φ, $\frac{d\varphi}{du}$ und $\frac{d^2\varphi}{du^2}$ in die Differentialgleichung (72) ein und kürzen durch den gemeinschaftlichen Faktor $e^{-\nu u}$, so erhalten wir

$$\{C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)\} + 2\nu \cdot \{-C_1\nu + C_2(1 - \nu u)\} + \nu^2\{C_1 + C_2 u\}$$
$$= C_1[\nu^2 - 2\nu^2 + \nu^2] + C_2[-2\nu + 2\nu + u\{\nu^2 - 2\nu^2 + \nu^2\}] = 0.$$

Wenn φ also durch eine Funktion von der Form (73) ausgedrückt ist, so ist die Gleichung (72) identisch gleich Null für beliebige Werte von u und der Konstanten C_1 und C_2, mit anderen Worten, der Ausdruck (73) ist das allgemeine Integral der Differentialgleichung (72).

Wir werden jetzt die Gleichung (70) integrieren und verfahren gerade so, wie bei der Untersuchung der Pendelbewegung unter dem Einfluß der horizontalen Bodenverschiebungen (s. § 3 Kap. V).

Wir fassen also C_1 und C_2 (aus der Formel 73) nicht als konstant auf, sondern als Funktionen von u, und unterwerfen sie einer Zusatzbedingung.

Wir differentiieren den Ausdruck (73) und erhalten

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}[-C_1\nu + C_2(1 - \nu u)] + e^{-\nu u}\left[\frac{dC_1}{du} + u\frac{dC_2}{du}\right].$$

Führen wir als Zusatzbedingung ein

$$\frac{dC_1}{du} + u\frac{dC_2}{du} = 0 \tag{74}$$

und bilden dann die zweite Derivierte von φ nach u, so haben wir

$$\frac{d^2\varphi}{du^2} = e^{-\nu u}[C_1\nu^2 + C_2(-2\nu + \nu^2 u)] + e^{-\nu u}\left[-\nu\frac{dC_1}{du} + (1-\nu u)\frac{dC_2}{du}\right].$$

Setzen wir nun diese Ausdrücke für φ, $\frac{d\varphi}{du}$ und $\frac{d^2\varphi}{du^2}$ in die Gleichung (70) ein, so sehen wir, daß alle Glieder mit den Faktoren C_1 und C_2 identisch gleich Null sind; es bleibt

$$e^{-\nu u}\left[-\nu\frac{dC_1}{du} + (1-\nu u)\frac{dC_2}{du}\right] = A[\Phi(u) + \mu^2\Phi_1(u)]. \tag{75}$$

Aus dieser Gleichung und aus (74) lassen sich die Werte der Derivierten $\frac{dC_1}{du}$ und $\frac{dC_2}{du}$ bestimmen.

Aus Formel (74) finden wir

$$\frac{dC_2}{du} = -\frac{1}{u}\frac{dC_1}{du}. \tag{76}$$

Setzt man diese Größe in die Formel (75) ein, so ergibt sich

$$\left[-\nu - \frac{1-\nu u}{u}\right]\frac{dC_1}{du} = A[e^{\nu u}\Phi(u) + \mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)]$$

oder

$$\frac{dC_1}{du} = -Au[e^{\nu u}\Phi(u) + \mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)].$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formel (76) ein, so hat man

$$\frac{dC_2}{du} = A[e^{\nu u}\Phi(u) + \mu^2 e^{\nu u}\Phi_1(u)].$$

Hieraus finden wir dann die Werte der Funktionen C_1 und C_2,

$$C_1 = \Gamma_1 - A\left[\int u e^{\nu u}\Phi(u)du + \mu^2\int u e^{\nu u}\Phi_1(u)du\right]$$

und

$$C_2 = \Gamma_2 + A\left[\int e^{\nu u}\Phi(u)du + \mu^2\int e^{\nu u}\Phi_1(u)du\right].$$

Wenn man diese Ausdrücke in die Formel (73) einsetzt, so erhält man den folgenden endgültigen Ausdruck für das allgemeine Integral der Gleichung (70):

$$\varphi = e^{-\nu u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u] - Ae^{-\nu u}\left[\left\{\int u e^{\nu u}\Phi(u)du - u\int e^{\nu u}\Phi(u)du\right\}\right.$$
$$\left. + \mu^2\left\{\int u e^{\nu u}\Phi_1(u)du - u\int e^{\nu u}\Phi_1(u)du\right\}\right]. \tag{77}$$

Digitized by Google

Hier sind Γ_1 und Γ_2 zwei willkürliche Konstanten, die aus den Anfangsbedingungen der Bewegung bestimmt werden.

Diese Formel (77) werden wir noch weiter in § 1 des X. Kap. benutzen.

Jetzt müssen wir die Werte dieser vier unbestimmten Integrale finden, wobei wir die Bezeichnungen (69) zu berücksichtigen haben.

In einem jeden Integrale werden Ausdrücke der Gestalt $e^{(\nu-1)u} \cdot u^s$ vorkommen, wo s eine positive Zahl oder Null ist.

Zur Vereinfachung führen wir folgende Bezeichnung ein

$$S_s = \int e^{(\nu-1)u} u^s du. \tag{78}$$

Wir integrieren diesen Ausdruck partiell

$$S_s = \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} \cdot u^s - s \frac{1}{\nu-1} \int e^{(\nu-1)u} u^{s-1} du$$

oder

$$S_s = \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} u^s - \frac{s}{\nu-1} \cdot S_{s-1}$$

Da aber nach der Bezeichnung (42)

$$\nu - 1 = \xi$$

ist, so ergibt sich

$$S_s = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^s - \frac{s}{\xi} S_{s-1}. \tag{79}$$

Mit Zugrundelegung der Bezeichnungen (78) und der Formel (79) finden wir

$$\left.\begin{aligned}
S_0 &= \frac{1}{\nu-1} e^{(\nu-1)u} = \frac{e^{\xi u}}{\xi} \\
S_1 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u - \frac{1}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi} = \frac{e^{\xi u}}{\xi^2} [\xi u - 1] \\
S_2 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^2 - \frac{2}{\xi} S_1 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^2 - \frac{2}{\xi} \frac{e^{\xi u}}{\xi^2} [\xi u - 1] = \frac{e^{\xi u}}{\xi^3} [\xi^2 u^2 - 2\xi u + 2] \\
S_3 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^3 - \frac{3}{\xi} S_2 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^3 - \frac{3}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi^3} [\xi^2 u^2 - 2\xi u + 2] \\
&= \frac{e^{\xi u}}{\xi^4} [\xi^3 u^3 - 3\xi^2 u^2 + 6\xi u - 6] \\
S_4 &= \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^4 - \frac{4}{\xi} S_3 = \frac{1}{\xi} e^{\xi u} u^4 - \frac{4}{\xi} \cdot \frac{e^{\xi u}}{\xi^4} [\xi^3 u^3 - 3\xi^2 u^2 + 6\xi u - 6] \\
&= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5} [\xi^4 u^4 - 4\xi^3 u^3 + 12\xi^2 u^2 - 24\xi u + 24].
\end{aligned}\right\} \tag{80}$$

Digitized by Google

Auf Grund dieser Formeln und der Bezeichnungen (69) finden wir für ein jedes Paar der Integrale, die in Formel (77) enthalten sind, folgende Ausdrücke

$$\int u e^{\nu u}\Phi(u)du - u\int e^{\nu u}\Phi(u)du = \int e^{(\nu-1)u}(u-u^2)du - u\int e^{(\nu-1)u}(1-u)du$$

$$= S_1 - S_2 - uS_0 + uS_1 = -uS_0 + (1+u)S_1 - S_2 = -u\frac{e^{\xi u}}{\xi} + (1+u)\cdot\frac{e^{\xi u}}{\xi^2}(\xi u - 1)$$

$$-\frac{e^{\xi u}}{\xi^3}(\xi^2u^2 - 2\xi u + 2) = \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[-\xi^2 u + \xi^2 u - \xi + \xi^2u^2 - \xi u - \xi^2u^2 + 2\xi u - 2]$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^3}[(-2-\xi) + \xi u].$$

Wir finden ferner

$$\int u e^{\nu u}\Phi_1(u)du - u\int e^{\nu u}\Phi_1(u)du = \int e^{(\nu-1)u}\left\{-\frac{1}{3}u + \frac{4}{3}u^2 - u^3 + \frac{1}{6}u^4\right\}$$

$$-u\int e^{(\nu-1)u}\left\{-\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u - u^2 + \frac{1}{6}u^3\right\}du = -\frac{1}{3}S_1 + \frac{4}{3}S_2 - S_3 + \frac{1}{6}S_4$$

$$-u\left\{-\frac{1}{3}S_0 + \frac{4}{3}S_1 - S_2 + \frac{1}{6}S_3\right\}$$

$$= \frac{1}{3}u\cdot\frac{e^{\xi u}}{\xi} - \left(\frac{1}{3} + \frac{4}{3}u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^2}(\xi u - 1) + \left(\frac{4}{3} + u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^3}(\xi^2u^2 - 2\xi u + 2)$$

$$-\left(1 + \frac{1}{6}u\right)\frac{e^{\xi u}}{\xi^4}(\xi^3u^3 - 3\xi^2u^2 + 6\xi u - 6) + \frac{1}{6}\frac{e^{\xi u}}{\xi^5}(\xi^4u^4 - 4\xi^3u^3 + 12\xi^2u^2 - 24\xi u + 24)$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}\Big[\frac{1}{3}\xi^4 u - \frac{1}{3}\xi^4 u + \frac{1}{3}\xi^3 - \frac{4}{3}\xi^4u^2 + \frac{4}{3}\xi^3 u + \frac{4}{3}\xi^4u^2 - \frac{8}{3}\xi^3 u + \frac{8}{3}\xi^2$$

$$+ \xi^4u^3 - 2\xi^3u^2 + 2\xi^2 u - \xi^4u^3 + 3\xi^3u^2 - 6\xi^2 u + 6\xi - \frac{1}{6}\xi^4u^4 + \frac{1}{2}\xi^3u^3$$

$$-\xi^2u^2 + \xi u + \frac{1}{6}\xi^4u^4 - \frac{2}{3}\xi^3u^3 + 2\xi^2u^2 - 4\xi u + 4\Big]$$

$$= \frac{e^{\xi u}}{\xi^5}\left[\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)u + (\xi^2 + \xi^3)u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3\right].$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke der Integrale in die Formel (77) ein und berücksichtigt, daß $e^{-\nu u}\cdot e^{\xi u} = e^{-(\nu-\xi)u} = e^{-u}$ ist, so ergibt sich

$$\varphi = e^{-\nu u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u] - A\frac{e^{-u}}{\xi^5}\Big[\{(-2\xi^2 - \xi^3) + \xi^3 u\} + \mu^2\Big\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)$$

$$+\left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)u + (\xi^2 + \xi^3)u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3\Big\}\Big]. \quad (81)$$

Nun wollen wir aus den Anfangsbedingungen der Bewegung die Werte der Konstanten Γ_1 und Γ_2 bestimmen.

Bei $t = 0$ oder $u = 0$ ist nach der Voraussetzung $\varphi_0 = 0$.

Digitized by Google

Der Wert $\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)_{t=0} = \varphi_0'$ läßt sich aus der Differentialgleichung der Bewegung des Galvanometers ermitteln,

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n_1\frac{d\varphi}{dt} + n_1^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

indem man die letztere gliedweise zwischen $t = 0$ und $t = \tau$ integriert, wo τ eine sehr kleine Größe ist.

$$\varphi_0' + 2n_1\varphi_0 + n_1^2\int_0^\tau \varphi\,dt + k\theta_0 = 0.$$

Da bei $t = 0$ das Pendel sich nicht bewegt, so ist $\theta_0 = 0$ und folglich auch $\varphi_0' = 0$.

Also werden Γ_1 und Γ_2 aus den Bedingungen, daß für $u = 0$

$$\varphi_0 = 0$$

und

$$\left(\frac{d\varphi}{du}\right)_{u=0} = \varphi_0' \cdot \frac{1}{n} = 0$$

ist, bestimmt.

Aus der Formel (81) finden wir

$$\frac{d\varphi}{du} = e^{-\nu u}[-\nu\Gamma_1 - \nu\Gamma_2 u + \Gamma_2] - A\frac{e^{-u}}{\xi^5}\Big[\{2\xi^2 + \xi^3 - \xi^3 u + \xi^3\}$$
$$+ \mu^2\Big\{\Big(-4 - 6\xi - \frac{8}{3}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3\Big) + \Big(3\xi + 4\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3\Big)u - (\xi^2 + \xi^3)u^2 + \frac{1}{6}\xi^3 u^3$$
$$+ \Big(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\Big) + 2(\xi^2 + \xi^3)u - \frac{1}{2}\xi^3 u^2\Big\}\Big]. \tag{82}$$

Setzt man nun in den Formeln (81) und (82) $u = 0$, so erhält man

$$0 = \Gamma_1 - \frac{A}{\xi^5}\Big[(-2\xi^2 - \xi^3) + \mu^2\Big(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\Big)\Big]$$

und

$$0 = -\nu\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{A}{\xi^5}\Big[(2\xi^2 + 2\xi^3) + \mu^2\Big(-4 - 6\xi - \frac{8}{3}\xi^2 - \frac{1}{3}\xi^3 - 3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\Big)\Big].$$

Addiert man diese zwei Gleichungen unter Berücksichtigung, daß $1 - \nu = -\xi$ ist, so hat man

$$0 = -\xi\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{A}{\xi^5}\cdot\Big[\xi^3 + \mu^2\Big(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\Big)\Big].$$

Also

$$\Gamma_1 = \frac{A}{\xi^5}\Big[(-2\xi^2 - \xi^3) + \mu^2\Big(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\Big)\Big] \tag{83}$$

und

$$\Gamma_2 = \xi\Gamma_1 + \frac{A}{\xi^5}\Big[\xi^3 + \mu^2\Big(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\Big)\Big]$$

oder

$$\Gamma_2 = \frac{A}{\xi^5}\Big[(-2\xi^3 - \xi^4 + \xi^3) + \mu^2\Big(4\xi + 6\xi^2 + \frac{8}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4 - 3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\Big)\Big],$$

oder schließlich

$$\Gamma_2 = \frac{A}{\xi^5}\left[(-\xi^3 - \xi^4) + \mu^2\left(\xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)\right]. \tag{84}$$

Wir wollen den Ausdruck $e^{-\gamma u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u]$ bilden.

Wir haben

$$e^{-\gamma u} = e^{-(1+\xi)u} = e^{-u}\cdot e^{-\xi u} = e^{-u}\cdot\left[1 - \xi u + \frac{1}{2}\xi^2u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3 + \frac{1}{24}\xi^4u^4 - \frac{1}{120}\xi^5u^5\right.$$
$$\left. + \frac{1}{720}\xi^6u^6 - \frac{1}{5040}\xi^7u^7\right].$$

Da die Formeln (83) und (84) die kleine Größe ξ im Nenner in der fünften Potenz enthalten, so müssen wir, um in dem endgültigen Ausdruck für φ Glieder bis zur Ordnung ξ^2 zu erhalten, in der Entwickelung von $e^{-\xi u}$ Größen bis zu ξ^7 einschließlich mitnehmen.

Wir finden weiter

$$e^{-\gamma u}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u] = e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\left[\{(-2\xi^2 - \xi^3) + (-\xi^3 - \xi^4)u\} + \mu^2\left\{\left(4 + 6\xi\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right) + \left(\xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)\right\}u\right]\left[1 - \xi u + \frac{1}{2}\xi^2u^2 - \frac{1}{6}\xi^3u^3\right.$$
$$\left. + \frac{1}{24}\xi^4u^4 - \frac{1}{120}\xi^5u^5 + \frac{1}{720}\xi^6u^6 - \frac{1}{5040}\xi^7u^7\right]$$
$$= e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\left[\left\{(-2\xi^2 - \xi^3) + (+2\xi^3 + \xi^4 - \xi^3 - \xi^4)u + \left(-\xi^4 - \frac{1}{2}\xi^5 + \xi^4 + \xi^5\right)u^2\right.\right.$$
$$+ \left(\frac{1}{3}\xi^5 + \frac{1}{6}\xi^6 - \frac{1}{2}\xi^5 - \frac{1}{2}\xi^6\right)u^3 + \left(-\frac{1}{12}\xi^6 - \frac{1}{24}\xi^7 + \frac{1}{6}\xi^6 + \frac{1}{6}\xi^7\right)u^4$$
$$\left. + \left(\frac{1}{60}\xi^7 - \frac{1}{24}\xi^7\right)u^5\right\} + \mu^2\left\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)\right.$$
$$+ \left(-4\xi - 6\xi^2 - \frac{8}{3}\xi^3 - \frac{1}{3}\xi^4 + \xi + 2\xi^2 + \frac{4}{3}\xi^3 + \frac{1}{3}\xi^4\right)u$$
$$+ \left(2\xi^2 + 3\xi^3 + \frac{4}{3}\xi^4 + \frac{1}{6}\xi^5 - \xi^2 - 2\xi^3 - \frac{4}{3}\xi^4 - \frac{1}{3}\xi^5\right)u^2$$
$$+ \left(-\frac{2}{3}\xi^3 - \xi^4 - \frac{4}{9}\xi^5 - \frac{1}{18}\xi^6 + \frac{1}{2}\xi^3 + \xi^4 + \frac{2}{3}\xi^5 + \frac{1}{6}\xi^6\right)u^3$$
$$+ \left(\frac{1}{6}\xi^4 + \frac{1}{4}\xi^5 + \frac{1}{9}\xi^6 + \frac{1}{72}\xi^7 - \frac{1}{6}\xi^4 - \frac{1}{3}\xi^5 - \frac{2}{9}\xi^6 - \frac{1}{18}\xi^7\right)u^4$$
$$+ \left(-\frac{1}{30}\xi^5 - \frac{1}{20}\xi^6 - \frac{2}{90}\xi^7 + \frac{1}{24}\xi^5 + \frac{1}{12}\xi^6 + \frac{1}{18}\xi^7\right)u^5 + \left(\frac{1}{180}\xi^6 + \frac{1}{120}\xi^7 - \frac{1}{120}\xi^6 - \frac{1}{60}\xi^7\right)u^6$$
$$\left.\left. + \left(-\frac{1}{1260}\xi^7 + \frac{1}{720}\xi^7\right)u^7\right\}\right].$$

Digitized by Google

Hieraus ergibt sich weiter

$$e^{-ru}[\Gamma_1 + \Gamma_2 u] = e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\Big[\Big\{(-2\xi^2 - \xi^3) + \xi^3 u + \frac{1}{2}\xi^5 u^2 + \left(-\frac{1}{6}\xi^5 - \frac{1}{3}\xi^6\right)u^3$$

$$+\left(\frac{1}{12}\xi^6 + \frac{1}{8}\xi^7\right)u^4 - \frac{1}{40}\xi^7 u^5\Big\} + \mu^2\Big\{\left(4 + 6\xi + \frac{8}{3}\xi^2 + \frac{1}{3}\xi^3\right)$$

$$+\left(-3\xi - 4\xi^2 - \frac{4}{3}\xi^3\right)u + \left(\xi^2 + \xi^3 - \frac{1}{6}\xi^5\right)u^2 + \left(-\frac{1}{6}\xi^3 + \frac{2}{9}\xi^5 + \frac{1}{9}\xi^6\right)u^3$$

$$+\left(-\frac{1}{12}\xi^5 - \frac{1}{9}\xi^6 - \frac{1}{24}\xi^7\right)u^4 + \left(\frac{1}{120}\xi^5 + \frac{1}{30}\xi^6 + \frac{1}{30}\xi^7\right)u^5$$

$$+\left(-\frac{1}{360}\xi^6 - \frac{1}{120}\xi^7\right)u^6 + \frac{1}{1680}\xi^7 u^7\Big\}\Big].$$

Setzt man nun diesen Ausdruck in die Formel (81) ein, so zeigt sich, daß der Ausdruck den gemeinschaftlichen Faktor $\frac{Ae^{-u}}{\xi^5}$ enthält, und daß sich in den Klammern alle Glieder mit den Faktoren ξ^0, ξ, ξ^2 und ξ^3 gegenseitig aufheben.

Also bleibt nur

$$\varphi = e^{-u}\frac{A}{\xi^5}\Big[\Big\{\frac{1}{2}\xi^5 u^2 + \left(-\frac{1}{6}\xi^5 - \frac{1}{3}\xi^6\right)u^3 + \left(\frac{1}{12}\xi^6 + \frac{1}{8}\xi^7\right)u^4$$

$$-\frac{1}{40}\xi^7 u^5\Big\} + \mu^2\Big\{-\frac{1}{6}\xi^5 u^2 + \left(\frac{2}{9}\xi^5 + \frac{1}{9}\xi^6\right)u^3 + \left(-\frac{1}{12}\xi^5 - \frac{1}{9}\xi^6 - \frac{1}{24}\xi^7\right)u^4$$

$$+\left(\frac{1}{120}\xi^5 + \frac{1}{30}\xi^6 + \frac{1}{30}\xi^7\right)u^5 + \left(-\frac{1}{360}\xi^6 - \frac{1}{120}\xi^7\right)u^6 + \frac{1}{1680}\xi^7 u^7\Big\}\Big].$$

Gruppiert man nach Division mit ξ^5 die übrigen Glieder nach den Potenzen von ξ, so ergibt sich

$$\varphi = e^{-u}A\Big[u^2\Big\{\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}u\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{12}u\right)u\xi + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{40}u\right)u^2\xi^2\Big\}$$

$$+\mu^2 u^2\Big\{\left(-\frac{1}{6} + \frac{2}{9}u - \frac{1}{12}u^2 + \frac{1}{120}u^3\right) + \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9}u + \frac{1}{30}u^2 - \frac{1}{360}u^3\right)u\xi$$

$$+\left(-\frac{1}{24} + \frac{1}{30}u - \frac{1}{120}u^2 + \frac{1}{1680}u^3\right)u^2\xi^2\Big\}\Big].$$

Berücksichtigt man noch, daß nach den Bezeichnungen (69) ist

$$A = -\frac{ke\theta_m}{n},$$

so kann der Ausdruck für φ auf folgende Form gebracht werden

$$\varphi = \Psi(u) + \mu^2\Psi_1(u), \tag{85}$$

wo

$$\Psi(u) = \frac{ke\theta_m}{n}e^{-u}u^2[\omega_0(u) + \omega_1(u)u\xi + \omega_2(u)u^2\xi^2] \tag{86}$$

$$\Psi_1(u) = \frac{ke\theta_m}{n}e^{-u}u^2[f_0(u) + f_1(u)u\xi + f_2(u)u^2\xi^2] \tag{87}$$

Digitized by Google

und

$$\left.\begin{aligned} \omega_0(u) &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u \\ \omega_1(u) &= \quad\frac{1}{3} - \frac{1}{12}u \\ \omega_2(u) &= -\frac{1}{8} + \frac{1}{40}u \end{aligned}\right\} \tag{88}$$

$$\left.\begin{aligned} f_0(u) &= \quad\frac{1}{6} - \frac{2}{9}u + \frac{1}{12}u^2 - \frac{1}{120}u^3 \\ f_1(u) &= -\frac{1}{9} + \frac{1}{9}u - \frac{1}{30}u^2 + \frac{1}{360}u^3 \\ f_2(u) &= \quad\frac{1}{24} - \frac{1}{30}u + \frac{1}{120}u^2 - \frac{1}{1680}u^3 \end{aligned}\right\}. \tag{89}$$

Die Formel (85) stellt die Gleichung der Bewegung des Galvanometers für den Fall dar, wenn das Pendel einen plötzlichen Anstoß erfährt, der den maximalen Ausschlag θ_m veranlaßt. Dieser Ausdruck für φ ist nach Potenzen von ξ geordnet, wobei nur die Glieder von der Ordnung ξ^2 mitgenommen sind.

In den weiteren Ableitungen wollen wir uns jedoch der Einfachheit halber auf Glieder von der Ordnung ξ beschränken.

Wir wollen nun die ersten beiden größten Ausschläge φ_1 und φ_2 des Galvanometers aufsuchen. Die entsprechenden Werte von t bezeichnen wir mit t_1 und t_2 und die Werte von u mit u_{m_1} und u_{m_2}. Letztere sind Wurzeln der Gleichung

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{d\Psi(u)}{du} + \mu^2 \frac{d\Psi_1(u)}{du} = 0. \tag{90}$$

u_1 sei die kleinste Wurzel der Gleichung

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = 0. \tag{91}$$

Dann können wir setzen

$$u_{m_1} = u_1 + \delta_1 \mu^2.$$

Die Größe δ_1 könnten wir bestimmen durch Einsetzen dieses Ausdruckes für u_m in die Formel (90); es ist jedoch überflüssig, denn wir brauchen nicht die Momente t_1 und t_2, sondern die zugehörigen maximalen Ausschläge φ_1 und φ_2 des Galvanometers.

Bis auf Glieder höherer Ordnung in bezug auf μ^2 erhalten wir

$$\varphi_1 = \Psi(u_1 + \delta_1\mu^2) + \mu^2\Psi_1(u_1) = \Psi(u_1) + \left(\frac{d\Psi}{du}\right)_{u=u_1} \cdot \delta_1\mu^2 + \mu^2\Psi_1(u_1)$$

oder, da u_1 die Wurzel der Gleichung (91) ist,

$$\varphi_1 = \Psi(u_1) + \mu^2\Psi_1(u_1). \tag{92}$$

Digitized by Google

Ebenfalls finden wir

$$q_2 = \Psi(u_2) + \mu^2 \Psi_1(u_2), \tag{93}$$

wo u_2 die zweite Wurzel der Gleichung (91) ist.

Wir wollen nun die Werte u_1 und u_2 ermitteln.

Unter Zugrundelegung der Formel (86) haben wir bei Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ξ^2

$$\frac{d\Psi(u)}{du} = \frac{ke\theta_m}{n} e^{-u}\Big[-u^2\{\omega_0(u) + \omega_1(u)\cdot u\xi\} + 2u\{\omega_0(u) + \omega_1(u)\cdot u\xi\}$$
$$+ u^2\left\{\frac{d\omega_0(u)}{du} + \frac{d\omega_1(u)}{du}\cdot u\xi + \omega_1(u)\xi\right\}\Big].$$

Setzt man nun $\frac{d\Psi(u)}{du} = 0$ und gruppiert alle Glieder nach den Potenzen von ξ, so ergibt sich

$$\left\{(2-u)\omega_0(u) + u\frac{d\omega_0(u)}{du}\right\} + \left\{(2-u)\omega_1(u)u + \frac{d\omega_1(u)}{du}\cdot u^2 + \omega_1(u)u\right\}\xi = 0.$$

Setzen wir nun die Werte der Funktionen ω_0 und ω_1 aus den Formeln (88) ein, so erhalten wir

$$\left\{(2-u)\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}u\right) + \frac{1}{6}u\right\} + \left\{(2-u)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{12}u\right)u - \frac{1}{12}u^2 + \frac{1}{3}u - \frac{1}{12}u^2\right\}\xi = 0$$

oder

$$\left\{-1 + u - \frac{1}{6}u^2\right\} + \left\{1 - \frac{2}{3}u + \frac{1}{12}u^2\right\}u\xi = 0. \tag{94}$$

Zur Bestimmung der Wurzeln dieser Gleichung wenden wir die Methode der sukzessiven Annäherungen an.

Setzen wir $\xi = 0$, so finden wir die angenäherten Wurzeln $(u_1)_0$ $(u_2)_0$ der Gleichung (94). Sie müssen folgender quadratischer Gleichung Genüge leisten:

$$u^2 - 6u + 6 = 0. \tag{95}$$

Hieraus finden wir

$$u = 3 \pm \sqrt{9-6}.$$

Also

$$\left.\begin{aligned}(u_1)_0 &= 3 - \sqrt{3}\\ (u_2)_0 &= 3 + \sqrt{3}\end{aligned}\right\}. \tag{96}$$

Wir sehen also, daß die Galvanometerkurve tatsächlich zwei Maxima (unabhängig vom Vorzeichen) hat, wie man auch a priori erwarten konnte.

Wir wollen nun den genaueren Wert der ersten Wurzel u_1 der Gleichung (94) ermitteln. Man erhält dann die zweite Wurzel u_2 unmittelbar aus dem Ausdrucke für u_1 durch einfachen Ersatz der Größe $\sqrt{3}$ durch $-\sqrt{3}$.

Digitized by Google

Zur Bestimmung von u_1 setzen wir

$$u_1 = (u_1)_0 + \gamma_1 \xi$$

in die Formel (94) ein.

Unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ξ^2 ergibt sich

$$\left\{-1 + (u_1)_0 + \gamma_1 \xi - \frac{1}{6}(u_1)_0^2 - \frac{1}{3}(u_1)_0 \gamma_1 \xi\right\} + \left\{1 - \frac{2}{3}(u_1)_0 + \frac{1}{12}(u_1)_0^2\right\}(u_1)_0 \xi = 0.$$

Hieraus finden wir (Gleichung (95))

$$\gamma_1 = -\frac{1 - \frac{2}{3}(u_1)_0 + \frac{1}{12}(u_1)_0^2}{1 - \frac{1}{3}(u_1)_0}(u_1)_0.$$

Führt man nun hierin den Wert $(u_1)_0$ aus der ersten Formel (96) ein, aus der folgt,

$$(u_1)_0^2 = 12 - 6\sqrt{3},$$

so ergibt sich

$$\gamma_1 = -\frac{1 - \frac{2}{3}(3 - \sqrt{3}) + \frac{1}{12}(12 - 6\sqrt{3})}{1 - \frac{1}{3}(3 - \sqrt{3})}(3 - \sqrt{3})$$

oder

$$\gamma_1 = -\tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{3}). \tag{97}$$

Damit erhalten wir schließlich

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= (3 - \sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}(3 - \sqrt{3})\xi \\ \text{und}\quad u_2 &= (3 + \sqrt{3}) - \tfrac{1}{2}(3 + \sqrt{3})\xi \end{aligned}\right\} \tag{98}$$

Es erübrigt nun noch diese Größen u_1 und u_2 in die Formel (92) einzusetzen.

Wir wollen alle notwendigen Berechnungen für u_1 ausführen. Die entsprechenden Ausdrücke für u_2 ergeben sich durch einfachen Ersatz von $\sqrt{3}$ durch die Größe $-\sqrt{3}$.

Unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ξ^2 finden wir aus den Formeln (92) und (86).

$$\varphi_1 = \Psi(u_1)\left[1 + \mu^2 \frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)}\right] = \frac{k\theta_m}{n} e^{1-u_1} \cdot u_1^2[\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1)u_1\xi]\left[1 + \mu^2 \frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)}\right].$$

Wir führen noch die folgenden Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m} \cdot \frac{1}{e^{1-u_1} \cdot u_1^2[\omega_0(u_1) + \omega_1(u_1)u_1\xi]} \\ \text{und}\quad \psi_1 &= \frac{\Psi_1(u_1)}{\Psi(u_1)} \end{aligned}\right\} \tag{99}$$

Digitized by Google

Analog setzen wir für die zweite Wurzel u_2

$$\left.\begin{aligned} k_2 &= n\,\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{1}{e^{1-u_2}\cdot u_2^{\,2}[\omega_0(u_2)+\omega_1(u_2)u_2\,\xi]} \\ \psi_2 &= \frac{\Psi_1(u_2)}{\Psi(u_2)}. \end{aligned}\right\} \tag{100}$$

Dann haben wir

und

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= k[1+\mu^2\psi_1] \\ k_2 &= k[1+\mu^2\psi_2] \end{aligned}\right\}. \tag{101}$$

Ist das Pendel genau aperiodisch, d. h. $\mu^2 = 0$, so ist

$$k_1 = k_2 = k.$$

Wir wollen nun die Ausdrücke für k_1 und ψ_1 aufsuchen, indem wir die Glieder von der Ordnung ξ^2 vernachlässigen.

Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein:

$$\chi_1 = e^{1-u_1}u_1^{\,2}[\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\,\xi],$$

und bestimmen zuerst die Größen der einzelnen Ausdrücke, die χ_1 enthält.

$$e^{1-u_1} = e^{1-\{(3-\sqrt{3})-\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\}}$$

oder

$$= e^{-2+\sqrt{3}}\left[1+\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right]. \tag{102}$$

Ferner haben wir

$$u_1^{\,2} = [(3-\sqrt{3})-\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi]^2$$

$$u_1^{\,2} = 6(2-\sqrt{3})[1-\xi]. \tag{103}$$

Aus den Formeln (88) folgt, daß

$$\omega_0(u_1) = -\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{6}\{(3-\sqrt{3})-\tfrac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\}$$

$$\omega_0(u_1) = -\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{12}(3-\sqrt{3})\xi$$

und

$$\omega_1(u_1)u_1\,\xi = \left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{12}(3-\sqrt{3})\right\}\left\{3-\sqrt{3}\right\}\xi$$

$$= \frac{1}{12}(3+3\sqrt{3}-\sqrt{3}-3)\xi$$

oder

$$\omega_1(u_1)u_1\,\xi = \frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\xi.$$

So erhalten wir

$$\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\,\xi = -\frac{1}{6}\sqrt{3}-\frac{1}{12}(3-\sqrt{3})\xi+\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot\xi$$

oder

$$\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\,\xi = -\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})\xi. \tag{104}$$

Digitized by Google

Multiplizieren wir nun diese Gleichung mit dem Ausdruck e^{1-u_1} aus der Formel (102).

$$e^{1-u_1}[\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi]=e^{-2+\sqrt{3}}\left[1+\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right]\left[-\frac{1}{6}\sqrt{3}+\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})\xi\right]$$

$$=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot e^{-2+\sqrt{3}}.$$

Es erübrigt nur noch diesen Ausdruck mit u_1^2 aus der Formel (103) zu multiplizieren.

Wir erhalten dann

$$\chi_1=-\frac{1}{6}\sqrt{3}\cdot e^{-2+\sqrt{3}}\cdot 6(2-\sqrt{3})(1-\xi)$$

oder

$$\chi_1=-(2\sqrt{3}-3)\cdot e^{-2+\sqrt{3}}(1-\xi).$$

Folglich

$$k_1=n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{1}{\chi_1}=-n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3}(1+\xi). \qquad (105)$$

Wir wollen nun den Ausdruck für ψ_1 aufsuchen, indem wir uns wiederum auf die Glieder von der Ordnung ξ beschränken.

Auf Grund der Formeln (99), (86), (87), (88) und (89) erhalten wir

$$\psi_1=\frac{f_0(u_1)+f_1(u_1)u_1\xi}{\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi}.$$

Der Wert des Nenners in diesem Ausdruck ist schon bestimmt worden (Formel (104)).

Wir wollen nun den Ausdruck für den Zähler bilden.

Es ist nach der ersten Formel (98)

$$u_1=(3-\sqrt{3})\left(1-\frac{1}{2}\xi\right);$$

folglich

$$u_1^2=6(2-\sqrt{3})(1-\xi)$$

und

$$u_1^3=6(9-5\sqrt{3})\left(1-\frac{3}{2}\xi\right).$$

Wir setzen diese Größen in den Ausdruck $f_0(u)$ (Formel (89)) ein.

$$f_0(u_1)=\frac{1}{6}-\frac{2}{9}u_1+\frac{1}{12}u_1^2-\frac{1}{120}u_1^3$$

$$=\frac{1}{6}-\frac{2}{9}(3-\sqrt{3})\left(1-\frac{1}{2}\xi\right)+\frac{1}{12}\cdot 6(2-\sqrt{3})(1-\xi)-\frac{1}{120}\cdot 6(9-5\sqrt{3})\left(1-\frac{3}{2}\xi\right)$$

oder

$$f_0(u_1)=\left(\frac{1}{20}-\frac{1}{36}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{72}\sqrt{3}\right)\xi.$$

Digitized by Google

Ferner

$$f_1(u_1)\cdot u_1\xi = \left[-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}u_1-\frac{1}{30}u_1^2+\frac{1}{360}u_1^3\right]u_1\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}(3-\sqrt{3})-\frac{1}{30}\cdot 6(2-\sqrt{3})+\frac{1}{360}\cdot 6(9-5\sqrt{3})\right][3-\sqrt{3}]\xi$$

$$= \left[-\frac{1}{10}+\frac{2}{45}\sqrt{3}\right]\xi.$$

Also

$$f_0(u_1)+f_1(u_1)u_1\xi = \left(\frac{1}{20}-\frac{1}{36}\sqrt{3}\right)+\left(\frac{1}{120}+\frac{1}{72}\sqrt{3}\right)\xi+\left(-\frac{1}{10}+\frac{2}{45}\sqrt{3}\right)\xi$$

$$= \frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})\left[1+\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3})\xi\right].$$

Andererseits ist nach der Formel (104)

$$\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi = -\frac{1}{6}\sqrt{3}\left[1-\frac{\frac{1}{4}(-1+\sqrt{3})}{\frac{1}{6}\sqrt{3}}\xi\right]$$

$$= -\frac{1}{6}\sqrt{3}\left[1-\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right].$$

Folglich

$$\psi_1 = \frac{f_0(u_1)+f_1(u_1)u_1\xi}{\omega_0(u_1)+\omega_1(u_1)u_1\xi} = \frac{\frac{1}{180}(9-5\sqrt{3})}{-\frac{1}{6}\sqrt{3}}\left[1+\frac{1}{2}(3+4\sqrt{3})\xi\right]\left[1+\frac{1}{2}(3-\sqrt{3})\xi\right]$$

oder

$$\psi_1 = \frac{1}{30}(5-3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})\xi\right]. \qquad (106)$$

Es gibt also die Formel (105) den Ausdruck für k_1, und die Formel (106) den Ausdruck für ψ_1; zugleich erhält man die entsprechenden Ausdrücke für k_2 und ψ_2, wenn man statt $\sqrt{3}$ die Größe $-\sqrt{3}$ einsetzt, nämlich

$$k_2 = n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}+3}(1+\xi) \qquad (107)$$

und

$$\psi_2 = \frac{1}{30}(5+3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\xi\right]. \qquad (109)$$

Wenden wir uns nun zur Formel (101).

Ist das Pendel genau aperiodisch, so ist $\mu^2=0$ und

$$k_1 = k_2 = k,$$

wobei wir den Übertragungsfaktor k positiv nehmen.

Es ergibt sich aber aus Formel (105), daß $k_1<0$, und aus Formel (107), daß $k_2>0$ ist, was daher rührt, daß die erste Formel den Winkel φ_1 und die zweite φ_2 enthält, wobei dem Wesen der Sache nach diese Winkel mit

Digitized by Google

entgegengesetzten Zeichen zu nehmen sind. Da wir aber unter φ_1 und φ_2 immer die absoluten Werte der maximalen Winkelausschläge des Galvanometers zu verstehen haben, so kann in der Formel (105) das Minuszeichen weggelassen werden.

Wenn wir alle Berechnungen unter Mitnahme der Glieder von der Ordnung ξ^2 ausgeführt hätten, so würden wir folgende endgültige Ausdrücke erhalten haben:

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}-3}\left[1+\xi+\frac{5-\sqrt{3}}{20}\xi^2\right] = n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot 2{,}8168[1+\xi+0{,}16340\xi^2] \\ k_2 &= n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot\frac{e^{2+\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}+3}\left[1+\xi+\frac{5+\sqrt{3}}{20}\xi^2\right] = n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot 6{,}4610[1+\xi+0{,}33660\xi^2] \end{aligned}\right\} \quad (109)$$

und

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{1}{30}(5-3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2+\sqrt{3})\xi+\frac{1}{280}(129+177\sqrt{3})\xi^2\right] \\ \psi_2 &= \frac{1}{30}(5+3\sqrt{3})\left[1+\frac{3}{2}(2-\sqrt{3})\xi+\frac{1}{280}(129-177\sqrt{3})\xi^2\right] \end{aligned}\right\} \quad (110)$$

oder

$$\left.\begin{aligned} \psi_1 &= -0{,}0065377[1+5{,}5981\xi+1{,}5556\xi^2] \\ \psi_2 &= 0{,}33988[1+0{,}40192\xi-0{,}63417\xi^2] \end{aligned}\right\}. \quad (111)$$

Wir haben also festgestellt, daß für kleine Werte ξ, die positiv oder negativ sein können, $\psi_1 < 0$, und $\psi_2 > 0$ ist.

Wir führen jetzt folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} F_1 &= 2{,}8168\,[1+\xi+0{,}16340\xi^2] \\ \text{und}\quad F_2 &= 6{,}4610\,[1+\xi+0{,}33660\xi^2] \end{aligned}\right\}. \quad (112)$$

Dann erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n\frac{\varphi_1}{\theta_m}\cdot F_1 \\ \text{und}\quad k_2 &= n\frac{\varphi_2}{\theta_m}\cdot F_2 \end{aligned}\right\}. \quad (113)$$

ψ_1, ψ_2, F_1 und F_2 sind bestimmte Funktionen von ξ.

Die Größen $\log\psi_1$ und $\log\psi_2$ sind in Tabelle XI und $\log F_1$ sowie $\log F_2$ in Tabelle XVI der „Seismometrischen Tabellen" gegeben. Als Argumente ξ sind die Hundertstel von $-0{,}15$ bis $+0{,}15$ aufgeführt.

Kombiniert man die Formeln (101) und (113), so ergibt sich

$$k(1+\mu^2\psi_1) = \frac{n}{\theta_m}\cdot\varphi_1 F_1$$

$$k(1+\mu^2\psi_2) = \frac{n}{\theta_m}\cdot\varphi_2 F_2.$$

Digitized by Google

Dividiert man den ersten Ausdruck durch den zweiten, so erhält man

$$\frac{1+\mu^2\psi_1}{1+\mu^2\psi_2} = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \cdot \frac{F_1}{F_2}$$

oder

$$\frac{F_2}{F_1} + \mu^2 \frac{F_2}{F_1}\psi_1 = \frac{\varphi_1}{\varphi_2} + \mu^2 \frac{\varphi_1}{\varphi_2}\psi_2.$$

Wir führen noch die beiden folgenden Bezeichnungen ein:

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \alpha \tag{114}$$

und

$$\frac{F_2}{F_1} = \beta, \tag{115}$$

wo α das Verhältnis der absoluten Werte zweier maximaler Winkelausschläge des Galvanometers bezeichnet, deren Größe sich unmittelbar aus dem Versuch ergibt.

Dann haben wir

$$\beta + \mu^2\beta\psi_1 = \alpha + \mu^2\alpha\psi_2$$

oder schließlich

$$\mu^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1}. \tag{116}$$

Dies ist eine der wichtigsten Formeln der ganzen Theorie.

ψ_1 ist seinem absoluten Werte nach bedeutend kleiner als ψ_2 (Formel (111)), ferner ist ψ_1 negativ, so daß der Nenner dieses Ausdruckes nicht gleich Null werden kann.

Es erübrigt nun den Wert für β zu finden.

Auf Grund der Bezeichnungen (115) und der Formeln (112) ergibt sich

$$\beta = 2{,}2937\,[1 + 0{,}1732\,\xi^2]. \tag{117}$$

Da diese Formel ξ in erster Potenz nicht enthält, so ändert sich β in den gegebenen Grenzen von ξ sehr wenig, es ist nämlich für

$$\xi = \pm\, 0{,}15, \qquad \beta = 2{,}3026,$$

und für

$$\xi = 0, \qquad \beta = 2{,}2937.$$

Dieser kritische Wert $\beta = 2{,}2937$ kann nach den Formeln (112) und (109) in folgender Weise ausgedrückt werden.

Für $\xi = 0$

$$\beta = \frac{e^{2+\sqrt{3}}}{e^{2-\sqrt{3}}} \cdot \frac{2\sqrt{3}-3}{2\sqrt{3}+3} = e^{2\sqrt{3}}(7 - 4\sqrt{3}).$$

Ist das Pendel auf die Periode des Galvanometers eingestellt worden, so gibt die Formel (116) ein sehr einfaches Kriterium zur Beurteilung, wie weit es von der Grenze der Aperiodizität entfernt ist.

Digitized by Google

Ist die experimentell bestimmte Größe $\alpha < \beta$, so ist $\mu^2 > 0$ und die Grenze der Aperiodizität ist noch nicht erreicht worden; ist $\alpha > \beta$, so ist $\mu^2 < 0$, und die Grenze schon überschritten. Ist $\alpha = \beta$, so ist das Pendel genau an der Grenze der Aperiodizität.

Man kann in der beschriebenen Weise vorgehen, um das Pendel rasch genau auf die Grenze der Aperiodizität einzustellen, wozu man nur die Poldistanz der Magnete von der dämpfenden Kupferplatte ändert.

Es sei noch bemerkt, daß Formel (116) für einen beliebigen Typus von Seismographen gültig ist; man kann sie also benutzen zur Bestimmung der Konstante μ^2, wenn die Dämpfung sehr stark ist. Es ist nur eins dazu erforderlich, daß nämlich der entsprechende Seismograph mit einem Galvanometer, das auf die Aperiodizitätsgrenze eingestellt ist, gekoppelt ist, und daß die Eigenperioden des Seismographen und des Galvanometers (ohne Dämpfung) sich voneinander sehr wenig unterscheiden.

In Tabelle X der „Seismometrischen Tabellen" sind die Größen β und $\beta\psi_1$, welche die Formel (116) enthält, für $\xi = -0{,}15$ bis $\xi = +0{,}15$ gegeben.

Kennt man die Größe ξ, so kann man also nach Formel (116) die Dämpfungskonstante μ^2 bestimmen.

Aber die Größe ξ kennen wir nur angenähert aus der Periode des Pendels, die bei schwacher Dämpfung bestimmt worden ist (Formel (58))

$$\xi = \frac{n_1 - n}{n} = \frac{T - T_1}{T_1}. \tag{58}$$

Nun wollen wir die genaue Größe ξ und dann die Größe n

$$n = \frac{n_1}{1 + \xi} \tag{118}$$

bestimmen, wenn die Magnete nahe aneinander gebracht sind und das Pendel in der Nähe der Aperiodizitätsgrenze schwingt.

Dazu dient der durch den Versuch bestimmte Zeitraum t_0, der vom Anfange der Galvanometerbewegung bis zum Durchgang durch die Ruhelage verlaufen ist.

Setzt man der Bezeichnung (65) entsprechend

$$u_0 = n t_0, \tag{119}$$

so erübrigt noch, den Wert u_0 zu finden, für den φ gleich Null wird. Dann erhalten wir eine Gleichung, die u_0, ξ und μ^2 verbindet.

Wenden wir uns nun zu den Formeln (85), (86), (87) und beschränken uns auf die Glieder von der Ordnung ξ, dann muß u_0 die Wurzel der folgenden Gleichung sein:

$$\omega_0(u) + \omega_1(u)u\xi + \mu^2\{f_0(u) + f_1(u)u\xi\} = 0. \tag{120}$$

Zur Bestimmung von u_0 wenden wir wiederum die Methode der sukzessiven Annäherung an.

Digitized by Google

Setzt man zuerst $\mu^2 = 0$, so erhält man

$$\omega_0(u) + \omega_1(u)u\xi = 0. \tag{121}$$

Die angenäherte Wurzel $(u_0)_0$ dieser Gleichung ergibt sich aus der Beziehung (siehe die erste Formel (88))

$$\omega_0(u) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}u = 0.$$

Folglich ist

$$(u_0)_0 = 3.$$

Für die zweite Annäherung $(u_0)_1$ können wir setzen

$$(u_0)_1 = 3 + \gamma_1\xi.$$

Setzt man diesen Ausdruck in die Formel (121) ein, so ergibt sich

$$\omega_0(3 + \gamma_1\xi) + \omega_1(3)\cdot 3\xi = 0$$

oder

$$\frac{1}{6}\gamma_1\xi + \frac{1}{4}\xi = 0,$$

oder schließlich

$$\gamma_1 = -\frac{3}{2}.$$

Folglich ist

$$(u_0)_1 = 3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right).$$

Nun setzen wir

$$u_0 = (u_0)_1 + \delta\mu^2$$

und führen diesen Ausdruck in die Formel (120) ein

$$\omega_0((u_0)_1 + \delta\mu^2) + \omega_1(3 + \delta\mu^2)\cdot(3 + \delta\mu^2)\xi + \mu^2[f_0((u_0)_1) + f_1(3)\cdot 3\xi] = 0.$$

Ferner haben wir

$$\omega_0((u_0)_1 + \delta\mu^2) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) + \delta\mu^2\right\} = -\frac{1}{4}\xi + \frac{1}{6}\delta\mu^2,$$

$$\omega_1(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{12}(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{12} - \frac{1}{12}\delta\mu^2,$$

$$\omega_1(3 + \delta\mu^2)\cdot(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{12}(1 - \delta\mu^2)(3 + \delta\mu^2) = \frac{1}{12}(3 - 2\delta\mu^2).$$

Folglich ist

$$\omega_0((u_0)_1 + \delta\mu^2) + \omega_1(3 + \delta\mu^2)\cdot(3 + \delta\mu^2)\cdot\xi = \frac{1}{6}\delta\mu^2(1 - \xi).$$

Andererseits ist

$$f_0((u_0)_1) = \frac{1}{6} - \frac{2}{9}\cdot 3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right) + \frac{1}{12}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\right\}^2 - \frac{1}{120}\left\{3\left(1 - \frac{1}{2}\xi\right)\right\}^3 = \frac{1}{40} - \frac{19}{240}\xi.$$

$$f_1(3) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{9}{30} + \frac{27}{360} = -\frac{1}{360}.$$

Digitized by Google

Folglich

$$f_0((u_0)_1) + f_1(3) \cdot 3\xi = \frac{1}{40} - \frac{19}{240}\xi - \frac{1}{120}\xi = \frac{1}{80}[2 - 7\xi].$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\frac{1}{6}\delta\mu^2(1 - \xi) + \frac{1}{80}(2 - 7\xi)\mu^2 = 0.$$

Hieraus finden wir

$$\delta = -\frac{3}{40} \cdot \frac{2 - 7\xi}{1 - \xi} = -\frac{3}{40}(2 - 5\xi).$$

Also

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi\right]\mu^2.$$

Wenn wir in unseren Rechnungen Glieder von der Ordnung ξ^2 beibehalten hätten, so würden wir erhalten haben

$$u_0 = 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right]\mu^2. \quad (122)$$

Führen wir nun folgende Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= 3\left[1 - \frac{1}{2}\xi + \frac{2}{5}\xi^2\right] \\ \text{und} \quad B_2 &= \frac{3}{20}\left[1 - \frac{5}{2}\xi + \frac{183}{70}\xi^2\right] \end{aligned}\right\}, \quad (123)$$

dann ist

$$u_0 = B_0 - B_2\mu^2. \quad (124)$$

B_0 und B_2 sind also ebenfalls bestimmte Funktionen von ξ.

In der Tabelle XII der „Seismometrischen Tabellen" sind die Größen B_0 und $\log B_2$ für die Werte von $\xi = -0{,}15$ bis $\xi = +0{,}15$ aufgeführt.

Wir wollen nun die Formel (122) etwas umgestalten.

Den Formeln (119) und (118) entsprechend haben wir

$$u_0 = \frac{n_1 t_0}{1 + \xi},$$

wo n_1 aus der Eigenperiode T_1 der Schwingungen des Galvanometers (ohne Dämpfung) bestimmt wird.

Setzen wir diesen Wert u_0 in die Formel (122) ein, so ergibt sich

$$n_1 t_0 = 3\left[1 + \frac{1}{2}\xi - \frac{1}{10}\xi^2\right] - \frac{3}{20}\left[1 - \frac{3}{2}\xi + \frac{4}{35}\xi^2\right]\mu^2$$

oder

$$n_1 t_0 = \{3 - 0{,}15\mu^2\} + \{1{,}5 + 0{,}225\mu^2\}\xi - \{0{,}3 + 0{,}0171\mu^2\}\xi^2.$$

Digitized by Google

Führen wir zum Schluß noch folgende drei Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a &= 3 - 0{,}15\mu^2 \\ b &= 1{,}5 + 0{,}225\mu^2 \\ c &= 0{,}3 + 0{,}0171\mu^2 \end{aligned}\right\}, \qquad (125)$$

so ergibt sich

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a + c\xi^2}{b}. \qquad (126)$$

In den „Seismometrischen Tabellen“ gibt die Tabelle XIII die Werte von a und die Tabelle XIV die Werte $\log b$ für verschiedene Werte von μ^2, und zwar von $-0{,}100$ an bis zu $+0{,}200$ für jedes Tausendstel von μ^2. In der Tabelle XV sind die Größen $c\xi^2$ für verschiedene Werte von ξ, von 0 an bis $\pm 0{,}15$ gegeben. Obwohl c eine Funktion von μ^2 ist, tritt doch hier μ^2 nicht als Argument auf, denn innerhalb der Grenzen von $\mu^2 = -0{,}10$ bis $\mu^2 = +0{,}20$ wird die Größe $c\xi^2$ von μ^2 gar nicht beeinflußt, wenn man mit einer Genauigkeit von einer Einheit der dritten Dezimale, mit welcher man auch $c\xi^2$ berechnen soll, rechnet. Der größte Wert von $c\xi^2$ bei $\xi = \pm 0{,}15$ beträgt nur 0,007.

Wir haben jetzt alle notwendigen Formeln abgeleitet und wollen nun übersichtlich darstellen, wie man sie zur Bestimmung der Seismographenkonstanten μ^2, T und K nacheinander zu benutzen hat.

Zur Bestimmung von μ^2 und T dienen die Formeln (125) und (126) und die oben angeführte Formel (116):

$$\mu^2 = \frac{\beta - \alpha}{\alpha\psi_2 - \beta\psi_1}. \qquad (116)$$

Die Beobachtungen liefern uns unmittelbar α und t_0, denn da n_1 für das Galvanometer schon bekannt ist, so kennen wir auch $n_1 t_0$.

Man versucht zuerst das Pendel möglichst nahe an die Grenze der Aperiodizität durch Änderung der Poldistanz der Magnete von der dämpfenden Kupferplatte einzustellen und α gleich β zu machen.

In der Formel (116) sind ψ_1, ψ_2 und β Funktionen von ξ (Formel (111) und (117)). Der genaue Wert von ξ ist noch unbestimmt, man kann sich jedoch für die Einstellung des Pendels an die Grenze der Aperiodizität mit dem Näherungswert von ξ begnügen. Denn man sieht sofort, daß die in der folgenden Tabelle VIII für einige Werte von μ^2 und ξ angeführten Größen α, die einem bestimmten μ^2 entsprechen, sehr wenig durch ξ beeinflußt werden.

Diese Größen α sind nach der folgenden Formel berechnet:

$$\alpha = \beta \cdot \frac{1 + \mu^2\psi_1}{1 + \mu^2\psi_2}, \qquad (127)$$

die direkt aus der Gleichung (116) folgt.

Für μ^2 sind folgende sieben Werte genommen: $-0{,}10$, $-0{,}05$, 0, $+0{,}05$, $+0{,}10$, $+0{,}15$ und $+0{,}20$ und für ξ die drei Werte: $-0{,}10$, 0 und $+0{,}10$.

Digitized by Google

Die Größen α sind dabei bis auf eine Einheit der zweiten Dezimale abgerundet.

Tabelle VIII.

Die Werte $\alpha = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

μ^2	$\xi = -0{,}10$	$\xi = 0$	$\xi = +0{,}10$
$-0{,}10$	2,38	2,38	2,38
$-0{,}05$	2,34	2,33	2,34
0	2,30	2,29	2,30
$+0{,}05$	2,26	2,25	2,26
$+0{,}10$	2,23	2,22	2,22
$+0{,}15$	2,19	2,18	2,18
$+0{,}20$	2,16	2,14	2,14

Diese Tabelle ermöglicht uns zu beurteilen, ob das Pendel nah oder weit von der Grenze der Aperiodizität sich befindet, denn auch, ohne den genauen Wert von ξ zu kennen, kann man einen ziemlich zuverlässigen Wert von μ^2 ermitteln. In der Praxis soll man immer dafür sorgen, daß α gleich 2,29—2,30 ist. Dies ist die kritische Zahl, welche die Grenze der Aperiodizität anzeigt.

Es bietet somit die ziemlich genaue Einstellung des Seismographen auf die Grenze der Aperiodizität bei Anwendung der oben erwähnten Methode keine praktischen Schwierigkeiten.

Hat man die Einstellung ausgeführt, so kann die genaue Bestimmung von μ^2 und T erfolgen.

Man bestimmt zuerst μ^2 und ξ und findet mit der bekannten Größe ξ nach der Formel (118) die Größe n

$$n = \frac{n_1}{1+\xi}. \tag{118}$$

Mit demselben Wert bestimmen wir sofort T nach der Formel

$$T = \frac{2\pi}{n}. \tag{128}$$

Zur Bestimmung von μ^2 und ξ dienen die Gleichungen (116) und (126), die diese Größen als Unbekannte enthalten; als bekannte Größen treten α und $n_1 t_0$ auf.

Die Bestimmung der Unbekannten μ^2 und ξ aus diesen Gleichungen wird nach der Methode der sukzessiven Annäherung in sehr einfacher Weise durchgeführt. Man setzt zuerst $\xi = 0$ und bestimmt alsdann nach der Formel (116) unter Benutzung der Tabellen X und XI, aus denen man β, $\beta\psi_1$ und $\log\psi_2$ entnimmt, den entsprechenden Wert von μ^2.

Mit diesem ersten Näherungswert von μ^2 berechnet man nach der Tabelle XIII und XIV (Formel (125)) die Größen a und $\log\frac{1}{b}$ und bestimmt alsdann nach der Formel (126) den Wert von ξ.

Digitized by Google

Dabei vernachlässigt man zuerst $c\xi^2$ und findet einen Näherungswert von ξ nach der Formel

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a}{b}.$$

Mit diesem berechnet man nach der Tabelle XV die Korrektion $c\xi^2$ und bestimmt dann ξ nach der genaueren Formel

$$\xi = \frac{n_1 t_0 - a + c\xi^2}{b}.$$

Die Korrektion $c\xi^2$ hat ihrer Kleinheit halber eine nur geringe Bedeutung.

Man legt jetzt diesen Wert von ξ zugrunde und berechnet in derselben Weise wie früher nach der Formel (116) den zweiten Wert von μ^2, mit dessen Hilfe nach der Formel (126) den folgenden Wert von ξ usw.

Da in der Praxis μ^2 und ξ kleine Größen sind, so werden die vorigen Ausdrücke sehr stark konvergent und die zweiten Werte von μ^2 und ξ werden gewöhnlich genügen.

Ist nun ξ einmal bestimmt, so ergibt sich aus Formel (118) die Größe n und aus Formel (128) die gesuchte Größe der Eigenperiode T des Pendels ohne Dämpfung.

Man wird bei diesen Bestimmungen sich nicht mit einer einzigen Bestimmung von α und t_0 begnügen, sondern eine ganze Reihe solcher Messungen (etwa 10) durchführen und das Mittel derselben bilden, wobei die Größe $\alpha = \frac{\varphi_1}{\varphi_2}$ dem Ausdruck (56) entsprechend sich nach der folgenden Formel bestimmen läßt.

$$\alpha = \frac{m_1 - \Delta m_1}{m_2 - \Delta m_2}. \tag{129}$$

Zur Kontrolle kann man sich der Formel (124) bedienen.

Mit der bekannten Größe ξ bestimmt man aus der Tabelle XII B_0 und $\log B_2$ und mit den Größen μ^2 findet man aus der Formel (124) den entsprechenden Wert von u_0.

Dann ergibt sich nach der Formel (119)

$$n = \frac{u_0}{t_0} \tag{130}$$

und hieraus nach der Formel (128) die Größe T.

Es sei nun noch die Beziehung zwischen T und t_0 bestimmt.

Aus den Formeln (128) und (130) folgt, daß

$$T = \frac{2\pi}{u_0} \cdot t_0. \tag{131}$$

u_0 hängt von μ^2 und ξ (Formel (123) und (124)) ab.

In der folgenden Tabelle IX sind die Werte des Faktors $\frac{2\pi}{u_0}$ für einige Werte von μ^2 und ξ aufgeführt.

Digitized by Google

Tabelle IX.

Werte von $\frac{2\pi}{u_0}$.

μ^2	$\xi = -0{,}10$	$\xi = 0$	$\xi = +0{,}10$
$-0{,}10$	1,975	2,084	2,187
$-0{,}05$	1,981	2,089	2,191
0	1,987	2,094	2,195
$+0{,}05$	1,993	2,100	2,200
$+0{,}10$	1,999	2,105	2,204
$+0{,}15$	2,005	2,110	2,209
$+0{,}20$	2,011	2,116	2,213

Wir sehen, daß T doppelt so groß ist als t_0.

Wir wollen nun zur Bestimmung des Übertragungsfaktors k übergehen.

Auf Grund der abgelesenen Ausschläge m, m_1 und m_2 finden wir nach den Beziehungen (55) und (56)

$$\left.\begin{aligned} \frac{\varphi_1}{\theta_m} &= \frac{D}{D_1} \cdot \frac{m_1 - \Delta m_1}{m} \\ \text{und} \quad \frac{\varphi_2}{\theta_m} &= \frac{D}{D_1} \cdot \frac{m_2 - \Delta m_2}{m} \end{aligned}\right\}. \tag{132}$$

Diese Werte lassen sich auch bestimmen, indem man das Mittel aus einer Reihe einzelner Beobachtungen nimmt.

Nach der Formel (113) hatten wir

$$\left.\begin{aligned} k_1 &= n \frac{\varphi_1}{\theta_m} \cdot F_1 \\ k_2 &= n \frac{\varphi_2}{\theta_m} \cdot F_2 \end{aligned}\right|. \tag{113}$$

In diesen Formeln ist der genaue Wert von n schon bekannt, $\log F_1$ und $\log F_2$ entnimmt man aus der Tabelle XVI, so daß wir jetzt die Größen k_1 und k_2 berechnen können.

Aus Formel (101) folgt

$$\left.\begin{aligned} k &= \frac{k_1}{1 + \mu^2 \psi_1} \\ k &= \frac{k_2}{1 + \mu^2 \psi_2} \end{aligned}\right|. \tag{104}$$

In diesen letzten Formeln sind k_1, k_2 und μ^2 bekannt und $\log \psi_1$ und $\log \psi_2$ werden aus der Tabelle XI entnommen.

Da ψ_1 sehr klein ist, so unterscheidet sich der wahre Wert von k sehr wenig von k_1.

Die Formeln (101) und (133) lehren, daß, da $\psi_1 < 0$ und $\psi_2 > 0$ ist,

Digitized by Google

für $\mu^2 > 0$ ist $k_2 > k_1$ und für $\mu^2 < 0$, d. h. wenn die Grenze der Aperiodizität überschritten ist, ist $k_2 < k_1$.

Für die Bestimmung von k hätte es genügt, nur eine der Formeln (133) zu benutzen; die andere kann jedoch zur Kontrolle dienen.

Der Wert von k hängt direkt von der Entfernung H_1 der Pole der Magnete von den Induktionsspulen ab. Man muß deshalb in der Praxis zuerst die Magnete auf die dem gewünschten Wert von k entsprechende Entfernung k_1 von den Spulen bringen und alsdann durch Änderung der Distanz H der Magnetpole von der dämpfenden Kupferplatte das Pendel auf die Grenze der Aperiodizität einstellen.

Die Theorie dieser Methode ist etwas kompliziert, die Beobachtungen selbst zeichnen sich jedoch durch große Einfachheit aus, und es lassen sich die Berechnungen unter Benutzung der oben angeführten Tabellen sehr rasch ausführen.

Für seismometrische Zwecke ist es hinreichend, die Werte der Perioden T und T_1 bis auf ein Zehntel der Sekunde, k bis auf eine Einheit der ersten Dezimale und μ^2 bis auf eine Einheit der zweiten, höchstens dritten Dezimale zu bestimmen.

Das folgende Zahlenbeispiel bezieht sich auf das Pendel Nr. IV und das Galvanometer Nr. VI, die auf der Sternwarte zu Paris aufgestellt sind; die vorläufige Bestimmung der Konstanten wurde im physikalischen Laboratorium der Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg ausgeführt. Die Bedingungen, unter denen die Beobachtungen angestellt sind, sind hier sehr ungünstig wegen der Erschütterungen durch den Straßenverkehr. Wenn man die Beobachtungen an einem ganz ruhigen Ort ausführt, so wird die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Werten der zu bestimmenden Größen viel besser.

Die Poldistanz bei den Induktionsspulen betrug

$$H_1 = 10{,}0 \text{ mm},$$

die Poldistanz bei der dämpfenden Kupferplatte

$$H = 15{,}0 \text{ mm},$$

die Eigenperiode des Galvanometers ohne Dämpfung

$$T_1 = 24^s{,}68$$

also

$$n_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 0{,}2546$$

ferner

$$D = 7777 \text{ mm}$$

$$D_1 = 1000 \text{ mm}.$$

In der folgenden Tabelle sind die schon korrigierten Ablesungen $m_1 - \Delta m_1$ und $m_2 - \Delta m_2$ angeführt.

Digitized by Google

$m_1 - \Delta m_1$	$m_2 - \Delta m_2$	m	log $(m_1 - \Delta m_1)$	log $(m_2 - \Delta m_2)$	log m	log α	log $\frac{m_1 - \Delta m_1}{m}$	log $\frac{m_2 - \Delta m_2}{m}$
228,1 mm	96,1 mm	27,8 mm	2,3485	1,9827	1,4440	0,3658	0,9045	0,5387
274,0	116,7	33,8	2,4378	2,0671	1,5289	0,3707	0,9089	0,5382
195,4	78,8	23,7	2,2909	1,8965	1,3747	0,3944	0,9162	0,5218
283,0	123,4	34,5	2,4518	2,0913	1,5378	0,3605	0,9140	0,5535
270,8	112,5	33,5	2,4327	2,0512	1,5250	0,3815	0,9077	0,5262
315,4	136,2	39,0	2,4989	2,1342	1,5911	0,3647	0,9078	0,5431
256,3	110,5	31,7	2,4088	2,0434	1,5011	0,3654	0,9077	0,5423
169,3	71,2	21,3	2,2287	1,8525	1,3284	0,3762	0,9003	0,5241
298,5	127,3	37,0	2,4749	2,1048	1,5682	0,3701	0,9067	0,5366
245,9	104,4	30,5	2,3908	2,0187	1,4843	0,3721	0,9065	0,5344

α	$\frac{m_1 - \Delta m_1}{m}$	$\frac{m_2 - \Delta m_2}{m}$	(t_0)
2,32	8,03	3,46	12ˢ,22
2,35	8,11	3,45	12,36
2,48 (!)	8,25	3,33	12,28
2,29	8,20	3,58	12,36
2,41	8,09	3,36	12,32
2,32	8,09	3,49	12,27
2,32	8,09	3,49	12,22
2,38	7,95	3,34	12,34
2,34	8,07	3,44	12,38
2,36	8,06	3,42	12,28
2,357	8,094	3,436	12ˢ,303

$$\log \frac{m_1 - \Delta m_1}{m} = 0,9082 \qquad \log \frac{m_2 - \Delta m_2}{m} = 0,5361$$

$$\log \frac{D}{D_1} = 0,8908 \qquad \log \frac{D}{D_1} = 0,8908$$

$$\log \frac{\varphi_1}{\theta_m} = 1,7990 \qquad \log \frac{\varphi_2}{\theta_m} = 1,4269$$

(Formel (132))

$(t_0) = 12^s,303$

Die Korrektion des Sekundenzählers $- \; 0,140$

$t_0 = 12^s,163$

$n_1 t_0 = 3,097 \qquad \alpha = 2,357.$

Jetzt können wir die Bestimmung von μ^2, ξ (oder T) und k ausführen.

Wir setzen zuerst

I. $\xi = 0$

$\beta = 2,294$ aus Tab. X $\qquad \log \alpha = 0,3724$

$\alpha = 2,357 \qquad \log \psi_2 = \bar{1},5313$ aus Tab. XI

$\beta - \alpha = -0{,}063$

$\log(\beta - \alpha) = \bar{2}{,}7993(n)$

$\log'(\alpha\psi_2 - \beta\psi_1) = 0{,}0883$

$\log \mu^2 = \bar{2}{,}8876(n)$

$\mu^2 = -0{,}077.$

$\log \alpha\psi_2 = \bar{1}{,}9037$

$\alpha\psi_2 = 0{,}8011$

$\beta\psi_1 = -0{,}0150$ aus Tab. X

$\alpha\psi_2 - \beta\psi_1 = 0{,}8161$

$n_1 t_0 = 3{,}097$

$a = 3{,}012$ aus Tab. XIII

$n_1 t_0 - a = +0{,}085$

$\log(n_1 t_0 - a) = \bar{2}{,}9294$

$\log \frac{1}{b} = \bar{1}{,}8290$ aus Tab. XIV

$\log \xi = \bar{2}{,}7584$

$\xi = +0{,}057$

$n_1 t_0 - a = +0{,}085$

$c\xi^2 = 0{,}001$ aus Tab. XV

$n_1 t_0 - a + c\xi^2 = +0{,}086$

$\log(n_1 t_0 - a + c\xi^2) = \bar{2}{,}9345$

$\log \frac{1}{b} = \bar{1}{,}8290$ aus Tab. XIV

$\log \xi = \bar{2}{,}7635$

$\xi = +0{,}058.$

Die zweite Annäherung.

II. $\xi = +0{,}058.$

$\beta = 2{,}295$

$\alpha = 2{,}357$

$\beta - \alpha = -0{,}062$

$\log(\beta - \alpha) = \bar{2}{,}7924\,(n)$

$\log'(\alpha\psi_2 - \beta\psi_1) = 0{,}0768$

$\text{Log}\,\mu^2 = \bar{2}{,}8692\,(n)$

$\mu^2 = -0{,}074.$

$\log \alpha = 0{,}3724$

$\log \psi_2 = 1{,}5404$

$\log \alpha\psi_2 = \bar{1}{,}9128$

$\alpha\psi_2 = 0{,}8181$

$\beta\psi_1 = -0{,}0199$

$\alpha\psi_2 - \beta\psi_1 = 0{,}8380$

$n_1 t_0 = 3{,}097$

$a = 3{,}011$

$c\xi^2 = 0{,}001$

$n_1 t_0 - a + c\xi^2 = +0{,}087$

$\log(n_1 t_0 - a + c\xi^2) = \bar{2}{,}9395$

$\log \frac{1}{b} = \bar{1}{,}8288$

$\log \xi = \bar{2}{,}7683$

$\xi = +0{,}059.$

Digitized by Google

Mit diesem Wert von ξ ergibt sich derselbe Wert von μ^2.
Also sind die endgültigen Werte von μ^2 und ξ

$$\underline{\mu^2 = -0{,}074}$$
$$\underline{\xi = +0{,}059.}$$

$1 + \xi = 1{,}059$ $\qquad$ $\log'(1+\xi) = \bar{1}{,}97510$

$n_1 = 0{,}2546$ $\qquad$ $\log n_1 = \bar{1}{,}40586$

$\log n = \bar{1}{,}38096$ (Form. (118))

$\log' n = 0{,}61904$

$\log 2\pi = 0{,}79818$

$\log T = 1{,}41722$

$T = 26^s{,}1.$

Die zur Kontrolle dienenden Berechnungen nach den Formeln (124) und (130) geben

$\mu^2 = -0{,}074$ $\qquad$ $\log \mu^2 = \bar{2}{,}8692\,(n)$

$\xi = +0{,}059$ $\qquad$ $\log B_2 = \bar{1}{,}1114$ aus Tab. XII

$\log B_2\mu^2 = \bar{3}{,}9806\,(n)$

$B_2\mu^2 = -0{,}0096$

$B_0 = 2{,}9157$ aus Tab. XII

$u_0 = 2{,}9253$

$\log u_0 = 0{,}46617$

$t_0 = 12^s{,}163$ $\qquad$ $\log' t_0 = \bar{2}{,}91496$

$\log n = \bar{1}{,}38113$

$\log' n = 0{,}61887$

$\log 2\pi = 0{,}79818$

$\log T = 1{,}41705$

$\underline{T = 26^s{,}1.}$

Bestimmung von k:

	$\log n = \bar{1}{,}3810$	$\log n = \bar{1}{,}3810$		
	$\log \frac{\varphi_1}{\theta_m} = 1{,}7990$	$\log \frac{\varphi_2}{\theta_m} = 1{,}4269$		
$\xi = +0{,}059$	$\log F_1 = 0{,}4749$	$\log F_2 = 0{,}8357$	aus Tab. XVI	
	$\log k_1 = 1{,}6549$	$\log k_2 = 1{,}6436$	(Formel (113))	
	$k_1 = 45{,}2$	$k_2 = 44{,}0$		
$\mu^2 = -0{,}074$	$\log \mu^2 = \bar{2}{,}8692\,(n)$	$\log \mu^2 = \bar{2}{,}8692\,(n)$		
$\xi = +0{,}059$	$\log \psi_1 = \bar{3}{,}9411\,(n)$	$\log \psi_2 = \bar{1}{,}5406$	aus Tab. XI	

Digitized by Google

$$\log \mu^2 \psi_1 = \bar{4},8103 \qquad \log \mu^2 \psi_2 = \bar{2},4098\,(n)$$
$$\mu^2 \psi_1 = +0,0006 \qquad \mu^2 \psi_2 = -0,0257$$
$$1 + \mu^2 \psi_1 = 1,0006 \qquad 1 + \mu^2 \psi_2 = 0,9743$$
$$\left.\begin{array}{ll} \log'(1 + \mu^2 \psi_1) = 1,9997 & \log'(1 + \mu^2 \psi_2) = 0,0113 \\ \log k_1 = 1,6549 & \log k_2 = 1,6436 \\ \log k = 1,6546 & \log k = 1,6549 \end{array}\right\} \text{Formel (133)}$$
$$k = 45,14 \qquad k = 45,18$$

Im Mittel

$$k = 45,16,$$

oder abgerundet:

$$\underline{k = 45,2.}$$

Dieses Zahlenbeispiel zeigt anschaulich, daß die zur Bestimmung der Seismographenkonstanten μ^2, T und k dienenden Rechnungen sehr einfach sind und sich mit Hilfe der verschiedenen Hilfstabellen sehr rasch durchführen lassen.

Erfahrungsgemäß bleibt der Wert von k, wenn nur die Entfernung der Pole der betreffenden Magnete unverändert gehalten wird, sehr konstant.

Die hier angeführten Werte von μ^2 und k beziehen sich auf den Fall, daß die Poldistanz der Magnete bei den Induktionsspulen beträgt

$$H_1 = 10,0 \text{ mm}$$

und bei der Kupferplatte

$$H = 15,0 \text{ mm}.$$

In der folgenden Tabelle sind die Werte von μ^2, T und k für einige andere Werte von H_1 und H gegeben.

H_1 \ H	15,0 mm			H_1 \ H	10,0 mm		
H	μ^2	T	k	H	μ^2	T	k
16,0 mm	+ 0,007	25ˢ,9	28,4	16,0 mm	+ 0,132	26ˢ,2	45,1
15,0 „	− 0,165	26 ,0	28,0	15,0 „	− 0,074	26 ,1	45,2

Diese Tabelle zeigt, daß eine Verkleinerung der Poldistanz H_1 um nur 5 mm den Wert von k schon sehr stark beeinflußt.

Man kann also durch Änderung von H_1 die Empfindlichkeit der Registrierung innerhalb ziemlich weiter Grenzen variieren.

Außerdem sehen wir, daß bei $H = 16,0$ mm die Grenze der Aperiodizität noch nicht erreicht, bei $H = 15,0$ mm dagegen schon überschritten wird. Eine Verschiebung der dämpfenden Magnete um nur 1 mm macht also in diesem Falle für die Stärke der Dämpfung sehr viel aus.

Durch Interpolation kann man den Wert von H finden, für welchen die Bedingung $\mu^2 = 0$ (die Grenze der Aperiodizität) zutrifft.

Digitized by Google

Bei $H_1 = 10{,}0$ mm findet dies etwa bei $H = 15{,}4$ mm statt.

Da die Dicke der kupfernen Dämpfungsplatte nur 5,5 mm beträgt, so bleibt bei der Aperiodizitätsgrenze auf jeder Seite der Platte noch ein etwa 5 mm freier Spielraum übrig. Eine Berührung der Platte mit den Magneten ist also nicht zu befürchten. Dies ist ein wesentlicher Vorteil der magnetischen Dämpfung.

§ 4. **Direkte Bestimmung des Übertragungsfaktors k.**

Im vorigen Paragraphen wurde eine Methode zur Bestimmung des Übertragungsfaktors k beschrieben, die jedoch nur dann zu verwenden ist, wenn das Pendel stark gedämpft ist, d. h. wenn μ^2 seinem absoluten Werte nach 0,20 nicht übersteigt.

Jetzt werden wir noch eine andere Methode der Bestimmung von k ableiten, die für alle Werte von μ^2 anwendbar ist; dabei braucht man nicht die Eigenperiode T des Pendels ohne Dämpfung, die also ganz willkürlich sein kann, und auch nicht den numerischen Wert der Dämpfungskonstante μ^2 zu kennen.

Die einzige Forderung besteht wie früher darin, daß das betreffende Galvanometer genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt ist ($\varepsilon_1 = n_1$).

Diese neue Methode zur Bestimmung von k besteht in folgendem.

Das Pendel wird plötzlich mit der Hand um einen kleinen Winkel θ_m abgelenkt und dann festgehalten; man verfährt zu diesem Zwecke am einfachsten folgendermaßen.

An beiden Seiten des Pendelarmes stehen zwei Stative und man lehnt durch Drehung einer der Fußschrauben des Pendelgestells den Pendelarm an das eine der Stative; dies sei die anfängliche Lage des Pendels.

Dann verschiebt man rasch mit der Hand den Pendelarm bis zum anderen Stativ und hält ihn dort fest. Die entsprechende Winkelverschiebung des Pendels, die man wiederum mit Hilfe von Fernrohr und Skala mißt, sei θ_m.

Durch diese plötzliche Verschiebung des Pendels wird dem Galvanometer eine anfängliche Winkelgeschwindigkeit φ_0' erteilt.

Der Ausschlag des Galvanometers erreicht dabei ein Maximum φ_m, worauf es asymptotisch zur Ruhelage zurückkehrt. Der Winkel φ_m wird von einem anderen Beobachter mit Hilfe von Fernrohr und Skala gemessen.

Sind die Winkel θ_m und φ_m einmal bestimmt, so kann hieraus der gesuchte Wert des Übertragungsfaktors k bestimmt werden, wie jetzt gezeigt werden soll.

Wir wenden uns zur Differentialgleichung der Bewegung des Galvanometers (Formel (32) § 3 Kap. VI)

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0,$$

wo $n_1 = \varepsilon_1$ bestimmt ist.

Digitized by Google

Integriert man die Gleichung Glied für Glied zwischen 0 und einer sehr kleinen Größe τ und berücksichtigt, daß bei $t = 0$, $\varphi_0 = 0$ ist, so ergibt sich

$$\varphi_0' + n_1^2 \int_0^\tau \varphi \, dt + k\theta_m = 0$$

oder

$$\varphi_0' = - k\theta_m .$$

Das Pendel muß nur so schnell abgelenkt werden, daß das Galvanometer während dieser Zeit nicht aus der Ruhelage treten kann.

Ist das Pendel wieder zur Ruhe gekommen, so lautet die Differentialgleichung

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi = 0.$$

Die Anfangsbedingungen ($t = 0$) sind

$$\varphi_0 = 0$$

und

$$\varphi_0' = - k\theta_m .$$

Das Integral dieser Gleichung lautet nach Formel (33) § 2 Kap. V

$$\varphi = \varphi_0' t \cdot e^{-n_1 t}$$

oder

$$\varphi = - k\theta_m \cdot t \cdot e^{-n_1 t}. \tag{134}$$

Zur Bestimmung des maximalen Ausschlags φ_m des Galvanometers müssen wir den Wert $t = t_m$, für welchen $\frac{d\varphi}{dt} = 0$ ist, aufsuchen.

Es ergibt sich

$$e^{-n_1 t_m}[1 - n_1 t_m] = 0$$

oder

$$t_m = \frac{1}{n_1}.$$

Setzt man diesen Wert in die Formel (134) ein, so erhält man

$$\varphi_m = - k\theta_m \cdot \frac{1}{n_1 e},$$

oder schließlich abgesehen vom Minuszeichen, das keine praktische Bedeutung hat

$$k = n_1 e \cdot \frac{\varphi_m}{\theta_m}. \tag{135}$$

Wie wir sehen, ist diese Methode der Bestimmung von k überaus einfach und verlangt keine vorläufige Bestimmung der Pendelkonstanten außer n.

Für kleine Werte von μ^2 ist jedoch die früher angegebene Methode vorzuziehen, da sich diese Größe zugleich mit der Bestimmung der anderen Konstanten ermitteln läßt.

Man kann sich jedoch dieser zweiten Methode zur Kontrolle bedienen.

Digitized by Google

§ 5. **Anwendung des Shunt.**

Wir haben gesehen, daß man durch Vergrößerung der Distanz zwischen den Polen der Magnete bei den Induktionsspulen den Wert des Übertragungsfaktors k herabsetzen kann. Zu weit darf man aber dabei nicht gehen, sonst bleibt das magnetische Feld zwischen den einander gegenüber liegenden Polen nicht genügend homogen.

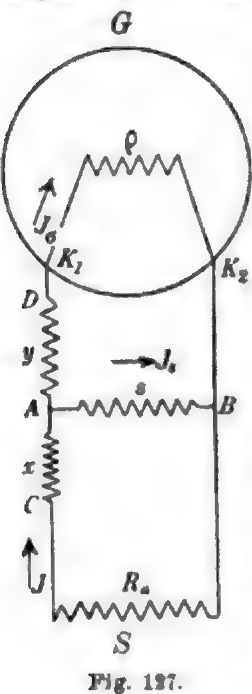


Fig. 127.

Will man die Empfindlichkeit der Registrierung bedeutend reduzieren, so kann man sich spezieller Shuntvorrichtungen bedienen, deren Einrichtung in Fig. 126 dargestellt ist.

G ist das Galvanometer vom inneren Widerstand ρ, K_1 und K_2 sind seine Klemmen und S die Induktionsspulen.

Laut der Bedingung soll das Pendel genau an der Grenze der Aperiodizität sich befinden und es muß deshalb der äußere Widerstand gleich R_a sein, wo R_a aus Formel (24) des VI. Kapitels bestimmt wird

$$R_a = \frac{c}{n_1 - c_0} - \rho.$$

R_a ist also der Widerstand der Induktionsspulen und der Zuleitungsdrähte.

In Fig. 127 entspricht dieser Widerstand der Strecke CSB, wobei bei Abwesenheit des Shunts die Punkte C mit K_1 und B mit K_2 zusammenfallen.

Wir wollen jetzt die Stärke des durch das Galvanometer hindurchgehenden Stromes im Verhältnis von σ zu 1 herabsetzen, und es ist also der neue Wert des Übertragungsfaktors

$$k_\sigma = \sigma k. \tag{136}$$

Zu diesem Zweck bringen wir zwischen die Punkte A und C den Widerstand x, zwischen A und D den Widerstand y und zwischen A und B den Widerstand s. Den Widerstand der Drahtstrecke K_2B vernachlässigen wir; man kann auch einfach B mit K_2 zusammenfallen lassen.

Zur Herstellung der drei Widerstände des Shunts nimmt man dünnen besponnenen Draht, knickt ihn in der Mitte, drillt die beiden Drähte umeinander herum und wickelt sie dann zu einer Spule auf; man erhält so eine induktionsfreie Wicklung. Von drei solchen Spulen lötet man je ein Ende in A zusammen. Dann legt man die Spulen in einen kleinen Kasten, so daß die drei Drahtenden B, C und D aus demselben herausragen, und gießt in denselben geschmolzenes Paraffin.

Wir bezeichnen die durch die Bewegung in den Spulen induzierte elektromotorische Kraft mit E.

Digitized by Google

Dann ist die Stromstärke im Galvanometer bei Abwesenheit des Shunts

$$I = \frac{E}{R_a + \varrho}. \tag{137}$$

Die Widerstände x, y und s können nicht willkürlich gewählt werden, sondern müssen zwei ganz bestimmten Forderungen genügen.

Erstens soll das Galvanometer genau an der Grenze der Aperiodizität sich befinden, also muß der äußere Widerstand des Galvanometers zwischen den Klemmen K_1 und K_2 immer gleich R_a sein.

Bezeichnet man den Gesamtwiderstand zwischen den Punkten A und B auf dem Wege durch die Induktionsspulen, d. h. den Widerstand der Zweige $ACSB$ und AB mit R_1, so ergibt sich

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{R_a + x} + \frac{1}{s}, \tag{138}$$

und die erste Forderung wird somit

$$y + R_1 = R_a. \tag{139}$$

Zweitens, die Einschaltung des Shunt darf die Größe der Dämpfungskonstante μ^2 nicht verändern, und es muß deshalb der zu den Induktionsspulen äußere Widerstand zwischen den Punkten C und B wie vorher gleich ϱ sein.

Bezeichnen wir den Gesamtwiderstand zwischen den Punkten A und B auf dem Wege durch das Galvanometer, d. h. den Widerstand der Zweige AK_1K_2B und AB mit R_2, so erhalten wir

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{\varrho + y} + \frac{1}{s}, \tag{140}$$

und die zweite Forderung lautet

$$x + R_2 = \varrho. \tag{141}$$

In diesem Falle läßt sich die Stromstärke I in den Induktionsspulen durch dieselbe Formel (137) ausdrücken.

Bei Anwesenheit des Shunts läßt sich die Stromstärke des Galvanometers I_a nach den Kirchhoffschen Gesetzen bestimmen.

Bezeichnet man die Stromstärke in der Brücke AB mit I_s, so ergibt sich

$$I = I_a + I_s$$

und

$$I_a(y + \varrho) = I_s \cdot s.$$

Hieraus finden wir

$$I_a(y + \varrho) = (I - I_a)s$$

oder

$$\sigma = \frac{I_a}{I} = \frac{s}{y + \varrho + s}. \tag{142}$$

Da die Größe der Widerstände x, y und s zwei Bedingungsgleichungen unterworfen ist (Formel (139) und (141)), so können wir y, s und σ durch x und die bekannten Widerstände ϱ und R_a ausdrücken.

Digitized by Google

Zu diesem Zweck bestimmen wir zuerst R_1 und R_2.
Aus den Formeln (138) und (140) haben wir

$$s(R_a + x) = R_1 s + R_1(R_a + x)$$

oder

$$R_1 = \frac{s(R_a + x)}{R_a + x + s}$$

und

$$s(\varrho + y) = R_2 s + R_2(\varrho + y)$$

oder

$$R_2 = \frac{s(\varrho + y)}{\varrho + y + s}.$$

Setzt man diese Größen in die Formeln (139) bzw. (141) ein, so ergibt sich

$$y + \frac{s(R_a + x)}{R_a + x + s} = R_a \tag{143}$$

und

$$x + \frac{s(\varrho + y)}{\varrho + y + s} = \varrho.$$

Durch Umgestaltung finden wir

$$yR_a + yx + ys + sR_a + sx = R_a^2 + R_a x + R_a s$$

und

$$x\varrho + yx + xs + s\varrho + sy = \varrho^2 + \varrho y + \varrho s.$$

Zieht man die eine Gleichung von der anderen ab, so erhält man

$$yR_a - x\varrho = R_a^2 - \varrho^2 + R_a x - \varrho y$$

oder

$$y(R_a + \varrho) = x(R_a + \varrho) + (R_a - \varrho)(R_a + \varrho),$$

oder schließlich

$$y = R_a - \varrho + x. \tag{144}$$

Setzen wir nun diesen Ausdruck für y in die Formel (143) ein, so erhalten wir

$$(R_a - \varrho + x)(R_a + x + s) + s(R_a + x) = R_a(R_a + x + s).$$

Hieraus finden wir sehr leicht s.

$$s[R_a - \varrho + x + R_a + x - R_a] = R_a(R_a + x) - (R_a - \varrho + x)(R_a + x)$$

oder

$$s = \frac{(R_a + x)(\varrho - x)}{R_a - \varrho + 2x}. \tag{145}$$

Also sind y und s durch x ausgedrückt.
Es erübrigt noch σ zu bestimmen.
Aus den Formeln (144) und (145) finden wir

$$y + \varrho + s = R_a - \varrho + x + \varrho + \frac{(R_a + x)(\varrho - x)}{R_a - \varrho + 2x} = \frac{(R_a + x)^2}{R_a - \varrho + 2x}.$$

Digitized by Google

Folglich

$$\frac{s}{y+\varrho+s}=\frac{\varrho-x}{R_a+x}.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (113) ein, so ergibt sich schließlich

$$\sigma=\frac{\varrho-x}{R_a+x}. \tag{146}$$

Bei der Herstellung des Shunts wird x willkürlich gewählt. Nach den Formeln (144) und (145) bestimmt man dann y und s; die Formel (146) gibt die Größe des Faktors σ, welcher die Verkleinerung der Empfindlichkeit des Seismographen (Beziehung (136)) angibt.

Die Gleichungen (145) und (146) zeigen, daß x niemals größer als ϱ sein kann.

Wir können also σ so klein wie möglich machen, nur darf es nicht einen Grenzwert σ_m (bei $x=0$) übersteigen, der aus folgender Bedingung sich bestimmen läßt

$$\sigma_m=\frac{\varrho}{R_a}. \tag{147}$$

Wir haben, z. B. in § 2 des VI. Kap., gesehen, daß für das Galvanometer Nr. VI

$$\varrho=4{,}12\ \Omega,$$

und

$$R_a=21{,}22\ \Omega$$

war; folglich ist

$$\sigma_m=0{,}194.$$

Man kann also mit Hilfe eines solchen Shunt die Empfindlichkeit des Seismographen herabsetzen, beispielsweise um fünf oder mehrere Male; doch kann σ keinen Wert zwischen 0,2 und 1 annehmen. Wollte man z. B. die Empfindlichkeit der Registrierung zweimal verkleinern, so müßte man schon die Poldistanz der Magnete bei den Induktionsspulen entsprechend vergrößern.

In der Praxis wird man für seismometrische Zwecke kaum solche Shunteinrichtungen anwenden, da man sehr selten die Empfindlichkeit der Registrierung so stark herabzusetzen nötig hat; bei der Bestimmung des Übertragungsfaktors k aber, besonders wenn k sehr groß ist, können solche Shunteinrichtungen von Nutzen sein. Man kann dann dem Pendel viel größere Ausschläge θ_m erteilen und folglich viel genauere Bestimmungen ausführen.

Nach der in § 3 unseres Kapitels beschriebenen Methode bestimmt man k_a, und da σ bekannt ist, so kann nach der Formel (136) der entsprechende wahre Wert des Übertragungsfaktors k berechnet werden.

Digitized by Google

Achtes Kapitel.

Theorie des Vertikalseismographen.

Im IV. Kapitel sind die verschiedenen Typen der Vertikalseismographen, die für die Registrierung der vertikalen Komponente der Bodenverschiebung z bestimmt sind, kurz beschrieben.

Wir wollen nun die Theorie der Vertikalseismographen, die an den russischen seismischen Stationen ersten Ranges in Gebrauch sind, betrachten. Eine schematische Darstellung dieses Apparates gibt Fig. 128.

Auf einer starken gußeisernen Platte P ist ein massives Doppelgestell G fest angeschraubt. Der doppelte bewegliche Rahmen AAA kann sich um die horizontale Achse O bewegen, und zwar ist er durch zwei Paare sehr dünner, senkrecht zueinander stehender, kurzer Stahlfedern, ein sog. Kreuzgelenk, das die Achse bildet, mit dem Gestell G verbunden.

In diesem Rahmen ist die Pendelmasse M angebracht, die in den Schlitzen IJ nach rechts oder links verschoben werden kann.

Der Rahmen wird durch eine starke Stahlfeder F in seiner horizontalen Lage gehalten. Diese Feder ist in Q mittels einer kurzen und flachen Stahlfeder befestigt; eine gleiche Verbindung ist auch unten. Mit Hilfe der Schraube R und der Mutter U kann man den oberen Befestigungspunkt der Feder heben und senken. Die Seitenschrauben NN oben und N_1N_1 unten gestatten den oberen oder unteren Befestigungspunkt der Spirale nach rechts oder links zu verschieben.

Auf einer besonderen Stütze B sind die Magnete, die in der Figur nicht gezeichnet sind, angebracht. D ist die dämpfende Kupferplatte, S das System der Induktionsspulen, deren Drähte längs dem oberen Rande des Rahmens zur Drehungsachse O gehen, wo sie mit den festen Klemmen durch dünne Silberblättchen verbunden werden.

Die Schrauben HH beschränken die Ausschläge des Apparates. L ist ein kleines Laufgewicht mit einem Schraubengewinde, das dazu dient, den Rahmen in die horizontale Lage zu bringen, wenn es sich nur um geringe Korrektionen handelt.

Besondere Mikrometerschrauben mit Skalen und Nonien gestatten die Magnetpole auf die gewünschte Distanz einzustellen.

Ein besonderes verschiebbares Gewicht, das auf einem vertikalen Stabe befestigt ist, dient dazu, den Schwerpunkt des beweglichen Systems in dieselbe Höhe wie die Drehungsachse des Apparates zu bringen, was nötig ist, da sonst die horizontalen Verschiebungen des Bodens den schwingenden Teil des Apparates in Bewegung setzen würden.

Wir wollen nun die Differentialgleichung der Bewegung des Apparates ableiten.

Digitized by Google

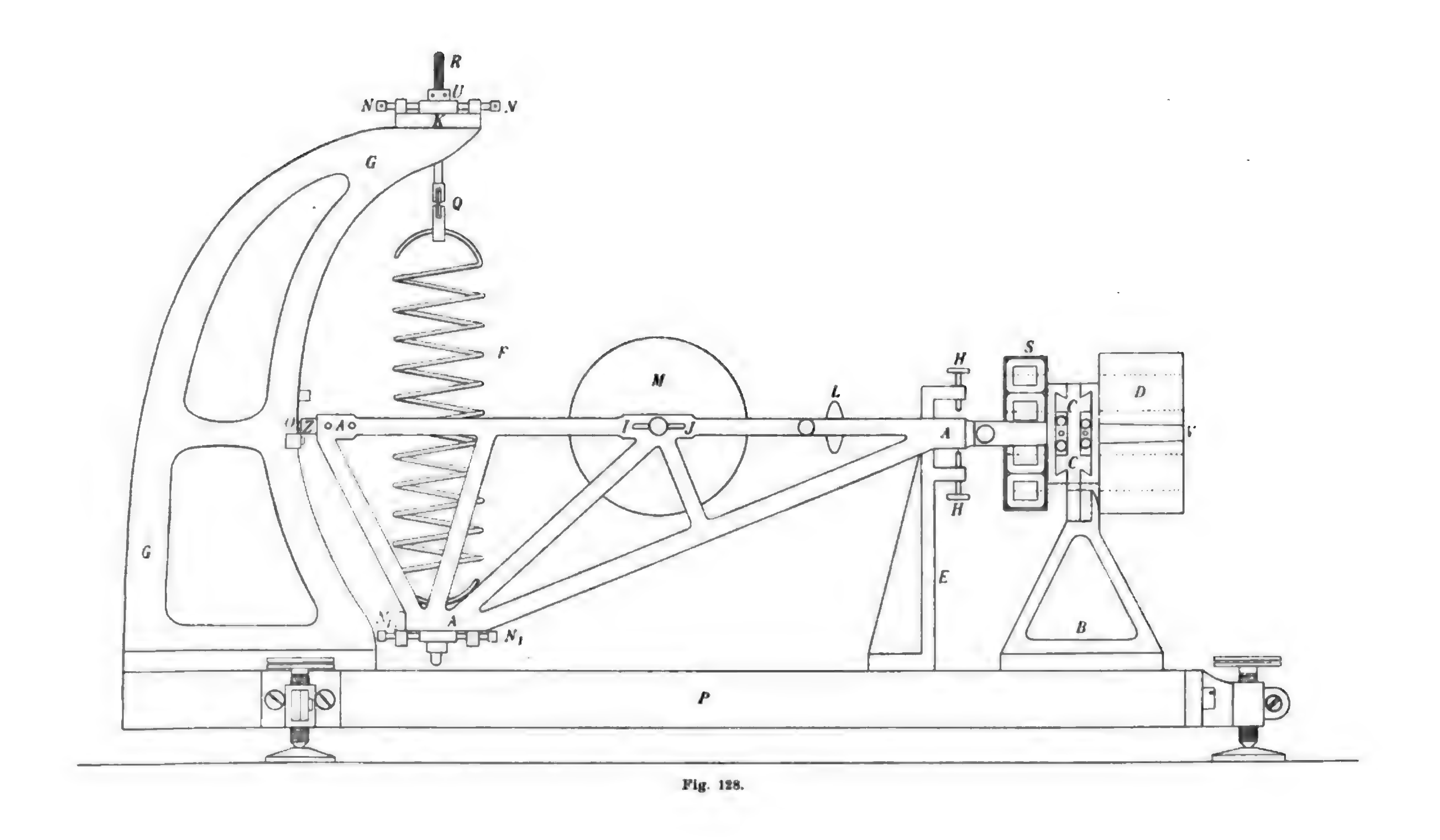


Fig. 128.

Digitized by Google

Dazu nehmen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem zOx (Fig. 129). Ox soll mit der Erdoberfläche und Oz mit der Vertikalen zusammenfallen. Die Drehungsachse des Instruments befindet sich in O_1 in einer Entfernung d vom Anfangspunkt der Koordinaten.

Die vertikale Projektion der Bodenverschiebung sei z, wo z eine Funktion der Zeit t ist:

$$z = f(t). \tag{1}$$

O_1H sei eine Linie, die bei normaler Lage des Instrumentes zu Ox parallel sein soll; auf derselben soll der Schwerpunkt des beweglichen Teils sich befinden.

A ist der obere und B der untere Befestigungspunkt der Spiralfeder. Bei normaler Lage des Instruments ist AB parallel zu Oz. Die Länge AB sei mit L_0 bezeichnet.

Die Entfernung von B bis zur Drehungsachse sei c, also

$$O_1B = c$$

und der Winkel HO_1B sei α.

Die Entfernungen O_1D und DB wollen wir durch a und h bezeichnen.

Es ist also

$$\left.\begin{aligned} a &= c\cos\alpha \\ h &= c\sin\alpha \end{aligned}\right\}. \tag{2}$$

a, c, h und α sind Konstanten.

Fig. 129.

Nehmen wir nun an, daß der Apparat von seiner normalen Lage um einen kleinen Winkel θ abgelenkt worden ist, wobei θ positiv ist, wenn der Schwerpunkt sich nach oben bewegt. Dann verlegt sich O_1H nach O_1H_1 und irgendeine Masse m in einer Entfernung r von der Drehungsachse versetzt sich nach m_1. Den Winkel HO_1m bezeichnen wir mit ω, und die Gesamtmasse des beweglichen Systems mit M,

$$M = \Sigma m$$

Unser Apparat ist nichts anderes als ein fester Körper mit einer bestimmten Drehungsachse, und deshalb können wir den Satz der Mechanik, nach welchem das Produkt aus dem Trägheitsmomente des Körpers $K = \Sigma mr^2$ und der Winkelbeschleunigung θ'' gleich dem Momente $\mathfrak{M}$ aller wirkenden Kräfte in bezug auf die Drehungsachse ist (Formel (4) § 1 Kap. V), anwenden

$$K\theta'' = \mathfrak{M}. \tag{3}$$

Digitized by Google

Wir haben jetzt $\mathfrak{M}$ zu berechnen.

Als wirkende Kräfte treten erstens die Schwerkraft und zweitens die Spannung der Feder auf. Das Moment der ersteren bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}_1$ und das der zweiten mit $\mathfrak{M}_2$.

Es ist also

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2.$$

Wir wollen zuerst $\mathfrak{M}_1$ bestimmen.

Die auf die Masse m wirkende Kraft ist mg, wo g die Beschleunigung der Schwere ist. Diese Kraft ist vertikal nach unten gerichtet.

Die Projektion dieser Kraft auf eine zum Arme $m_1 O_1$ senkrechte Richtung bei abgelenktem Apparate ist gleich

$$mg \cos(\omega - \theta)$$

und das entsprechende Moment

$$- mgr \cos(\omega - \theta).$$

Also

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}_1 &= - g \cdot \Sigma mr \cos(\omega - \theta) \\ &= - g \cos\theta \cdot \Sigma mr \cos\omega - g \sin\theta \cdot \Sigma mr \sin\omega. \end{aligned}$$

Bezeichnen wir die Entfernung des Schwerpunktes, welcher bei normaler Lage des Apparates auf der Linie $O_1 H$ liegt, von der Drehungsachse mit r_0, dann ist also

$$\Sigma mr \cos\omega = Mr_0. \tag{4}$$

Andererseits ist nach dem Momentensatz

$$\Sigma mr \sin\omega = 0.$$

Folglich ergibt sich, wenn man sich auf kleine Winkelausschläge θ beschränkt, also Glieder von der Ordnung θ^2 vernachlässigt,

$$\mathfrak{M}_1 = - g Mr_0. \tag{5}$$

Nun berechnen wir das Moment der Spannung der Feder $\mathfrak{M}_2$.

Bei normaler Länge L_0 (bei $\theta = 0$) sei die Spannungskraft P_0. Diese Kraft ist von B nach A gerichtet.

Bei der Länge der Feder L sei die entsprechende Spannung P.

Für kleine Verlängerungen können wir nach der Elastizitätstheorie setzen

$$P - P_0 = \beta(L - L_0), \tag{6}$$

wo β ein Koeffizient ist, der von den elastischen Eigenschaften der Feder abhängt und den man leicht durch Versuche ermitteln kann, indem man die Dehnung der Feder unter dem Einflusse dehnender Kräfte mißt.

Wir wollen nun die neue Länge der Feder L berechnen.

Digitized by Google

Bei der Drehung des Apparates um einen Winkel θ verlegt sich B nach C, wobei

$$BC = c\theta.$$

Den Winkel BAC bezeichnen wir mit γ.

Dann ergibt sich aus dem Dreieck BAC

$$L_0 - L = c\theta \cos \alpha$$

und

$$\gamma L = c\theta \sin \alpha,$$

oder mit Berücksichtigung der Beziehung (2) und unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung

$$L_0 - L = a\theta \tag{7}$$

und

$$\gamma = \frac{h\theta}{L_0}. \tag{8}$$

Also ist nach Formel (6)

$$P = P_0 - \beta a \theta. \tag{9}$$

Diese Kraft ist von C nach A gerichtet. Die Projektion F dieser Kraft auf die Richtung senkrecht zum Arme O_1C ist, wie aus Fig. 129 hervorgeht,

$$F = P \cos(\alpha - \theta + \gamma)$$

und das entsprechende Moment

$$\mathfrak{M}_2 = + P \cdot \cos(\alpha - \theta + \gamma) \cdot c.$$

Beschränkt man sich auf die Glieder erster Ordnung, so ergibt sich

$$\mathfrak{M}_2 = Pc \cos \alpha + Pc \sin \alpha \cdot (\theta - \gamma).$$

Setzt man hier den Ausdruck γ aus der Formel (8) ein und berücksichtigt die Beziehung (2), so erhält man

$$\mathfrak{M}_2 = P\left[a + h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta\right].$$

Setzen wir nun in diesen Ausdruck den Wert P aus Formel (9) ein, dann ist

$$\mathfrak{M}_2 = (P_0 - \beta a \theta)\left[a + h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta\right].$$

Beschränkt man sich auf die Glieder erster Ordnung, so ergibt sich

$$\mathfrak{M}_2 = P_0 a + P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\theta - \beta a^2 \theta.$$

Wir haben damit die Ausdrücke der Momente $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ gefunden, und es ergibt sich folglich für das totale Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ folgender Ausdruck

$$\mathfrak{M} = (P_0 a - g M r_0) - \left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\}\theta.$$

Digitized by Google

Im Gleichgewichtszustand des Apparates, wenn $\theta = 0$ ist, hält das Moment der Spannung der Feder dem Moment der Schwerkraft das Gleichgewicht, es ist somit

$$P_0 a = g M r_0$$

oder

$$P_0 = g \frac{M r_0}{a}. \qquad (10)$$

Also

$$\mathfrak{M} = -\left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\} \theta. \qquad (11)$$

Das Drehungsmoment $\mathfrak{M}$ muß noch durch ein Glied, das von der Trägheit abhängt und von der Beschleunigung der vertikalen Bodenbewegung z'' bedingt wird, ergänzt werden.

Ist die Bodenbewegung mit der zugehörigen Beschleunigung z'' vertikal nach oben gerichtet, so ist das in der relativen Bewegung des Apparates in bezug auf das Stativ, die wir nur beobachten können, dem gleichbedeutend, als ob auf jede Masse m infolge der Trägheit eine vertikal nach unten gerichtete Kraft mz'' wirkte. Diese Kraft kommt zur Schwerkraft mg hinzu.

Nach dem vorhergehenden (Formel (4) und (5)) ist das totale Moment dieser Kraft

$$-M r_0 \cdot z''.$$

Fügt man diese Größe zu dem früher abgeleiteten Ausdrucke für das Moment $\mathfrak{M}$ hinzu und setzt das Resultat in die Grundformel (3) ein, so ergibt sich

$$K\theta'' + \left\{\beta a^2 - P_0 h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right\} \theta + M r_0 \cdot z'' = 0. \qquad (12)$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Vertikalseismographen.

Wir dividieren sie nun durch K und führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\frac{K}{M r_0} = \frac{\Sigma m r^2}{M r_0} = l \qquad (13)$$

und

$$n^2 = \frac{\beta}{K} a^2 - \frac{P_0 h}{K}\left(1 - \frac{h}{L_0}\right).$$

Den letzten Ausdruck können wir noch umgestalten.

Nach den Formeln (10) und (13) haben wir

$$\frac{P_0}{K} = g \frac{M r_0}{a} \cdot \frac{1}{M r_0 l} = \frac{g}{a l};$$

folglich ist

$$n^2 = \frac{\beta}{K} a^2 - \frac{g}{a} \cdot \frac{h}{l}\left(1 - \frac{h}{L_0}\right). \qquad (14)$$

Ergänzt man noch die Differentialgleichung (12) durch ein Glied, das von dem Moment der Dämpfungskräfte abhängt und das wir der Winkel-

Digitized by Google

geschwindigkeit der Drehung des Apparates θ' proportional setzen, was bei der magnetischen Dämpfung genau zutrifft und berücksichtigt man ferner, daß dieses Moment immer negativ ist, so kann die Differentialgleichung der Bewegung des Vertikalseismographen auf folgende bekannte kanonische Form gebracht werden:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}z'' = 0. \tag{15}$$

Diese Gleichung ist ihrer Form nach vollständig identisch mit der Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalseismographen unter dem Einflusse der horizontalen Bodenverschiebungen (Formel (25), § 1 Kap. V).

Wir können daher auf den Vertikalseismographen ohne weiteres die verschiedenen Folgerungen und Formeln, die eingehend im fünften, sechsten und siebenten Kapitel dargestellt sind und die sich auf die Eigenbewegung des Pendels, Bestimmung der Elemente der Bodenbewegung, Vergrößerung des Apparates, galvanometrische Registrierung, Bestimmung der Konstanten μ^2, T und k und andere beziehen, anwenden.

Für seismometrische Beobachtungen ist es zweckmäßig, den Vertikalseismographen auf die Grenze der Aperiodizität einzustellen, d. h. $\varepsilon = n$ oder $\mu^2 = 0$ zu machen.

In der Formel (15) ist die reduzierte Pendellänge l enthalten. Diese Größe läßt sich sehr leicht experimentell bestimmen.

Zu diesem Zweck entfernt man die den schwingenden Teil tragende Spiralfeder und kippt den Apparat um 90° so, daß der Schwerpunkt des schwingenden Teils sich unter der Drehungsachse, die wie zuvor horizontal bleibt, befindet. Man reguliert dann die Lage des verschiebbaren Gewichts an der Drehungsachse, so daß der obere Rand des beweglichen Rahmens vertikal ist.

Alsdann schiebt man die Magnete auseinander und bestimmt die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung T_0 in umgekippter Lage. Ein solcher umgekippter Apparat stellt ein einfaches physisches Vertikalpendel dar, folglich ist

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

oder

$$l = g \cdot \frac{T_0^2}{4\pi^2}, \tag{16}$$

da nach der Formel (13)

$$l = \frac{\Sigma m r^2}{M r_0}$$

ist. Wir haben bis hierher die Masse M_1 der Spiralfeder, die auch an der Bewegung des Apparates teilnimmt, vernachlässigt. Es erfordert daher die nach Formel (16) berechnete Größe l eine kleine Korrektion.

Bezeichnen wir den Trägheitsradius mit ϱ, wo (Formel (13))

$$\varrho^2 = \frac{\Sigma m r^2}{M} = \frac{K}{M} = \frac{M r_0 l}{M} = l r_0$$

Digitized by Google

ist, so ist leicht zu beweisen, daß die wahre Größe von l folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$l = g \frac{T_0^2}{4\pi^2}\left[1 - \frac{M_1}{M}\left\{\frac{1}{2}\frac{a}{r_0} - \frac{1}{3}\frac{c^2}{\varrho^2}\right\}\right]. \quad (17)$$

Wegen der Kleinheit des Verhältnisses $\frac{M_1}{M}$ ist diese Korrektion ebenfalls sehr klein. So ergab sich der korrigierte Wert von l bei einem solchen Vertikalseismographen in Pulkovo zu 377,6 mm, wogegen l ohne Korrektion 378,6 mm war; der Unterschied beträgt also nur rund 1 mm auf 400 mm.

Infolge des Einflusses der Masse der Feder M_1 erfordert ebenfalls die nach Formel (14) berechnete Größe n^2 eine kleine Korrektion.

Die wahre Größe von n^2 ist

$$n^2 = \left[\frac{\beta}{K} a^2 - \frac{g}{a}\cdot\frac{h}{l}\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)\right]\left[1 - \frac{1}{3}\frac{c^2}{\varrho^2}\cdot\frac{M_1}{M}\right]. \quad (18)$$

Auch diese Korrektion ist unbedeutend, und zwar um so mehr, als die Größe n^2 immer aus den Beobachtungen über die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels ohne Dämpfung T bestimmt wird

$$n = \frac{2\pi}{T}. \quad (19)$$

Wir wollen uns nun zur Formel (14) wenden.

Wir haben schon früher gesehen, daß es für seismometrische Zwecke vorteilhaft ist, Seismographen mit langen Eigenperioden der Schwingungen T zu haben, d. h. n zu verkleinern, was bei den beschriebenen Seismographen sehr leicht geschehen kann.

Die Formel (14) zeigt uns anschaulich die Bedeutung der Befestigung des unteren Endes der Feder, das tiefer als der Schwerpunkt des beweglichen Systems liegt.

Das negative Glied der Formel (14) wird allgemein ein Maximum, wenn $h\left(1 - \frac{h}{L_0}\right)$ Maximum, d. h. wenn $h = \frac{L_0}{2}$ ist. Folglich ist es günstig, wenn die Mitte der Feder in derselben Höhe, wie die Drehungsachse liegt.

Zur weiteren Herabsetzung von n^2 haben wir noch die Größe a zur Verfügung.

Bei Verkleinerung von a nimmt das erste positive Glied ab und das zweite negative zu. Wir könnten also n willkürlich klein machen und folglich T willkürlich groß. Aber in der Praxis kann man nicht zu weit gehen, weil bei großen Werten von T der Apparat labil wird und sehr leicht umkippt. Man kann jedoch die Eigenperiode auf 13—14 Sekunden einstellen, eine Periode, die für seismometrische Zwecke vollständig hinreichend ist. Der Apparat bleibt hierbei genügend stabil.

Ein solcher Vertikalseismograph besitzt bei Anwendung der galvanometrischen Registriermethode eine große Empfindlichkeit. In Pulkovo beträgt z. B. der Übertragungsfaktor $k = 285$. Der Seismograph zeigt daher sehr klar auch die kleinsten Details der vertikalen Bodenverschiebungen.

Digitized by Google

Besonders wertvolle Dienste leistet er bei der Bestimmung des genauen Momentes des Einsatzes der ersten Vorläufer P bei einem Beben, hauptsächlich wenn es von einem entfernten Herde herrührt. Auf Seismogrammen solcher Beben ist P gewöhnlich scharf ausgeprägt, während auf den Seismogrammen der horizontalen Komponenten diese Phase oft undeutlich ist.

Zur Erläuterung des vorstehenden sind in Fig. 130 verkleinerte Kopien der Aufzeichnung des Anfangs zweier Beben vom 29. Juni 1910 durch einen Vertikalseismographen und durch einen Horizontalseismographen für die $N-S$ Komponente gegeben.

Auch in der maximalen Phase eines Bebens gibt ein solcher Vertikalseismograph sehr interessante und deutliche Aufzeichnungen, wie Fig. 131

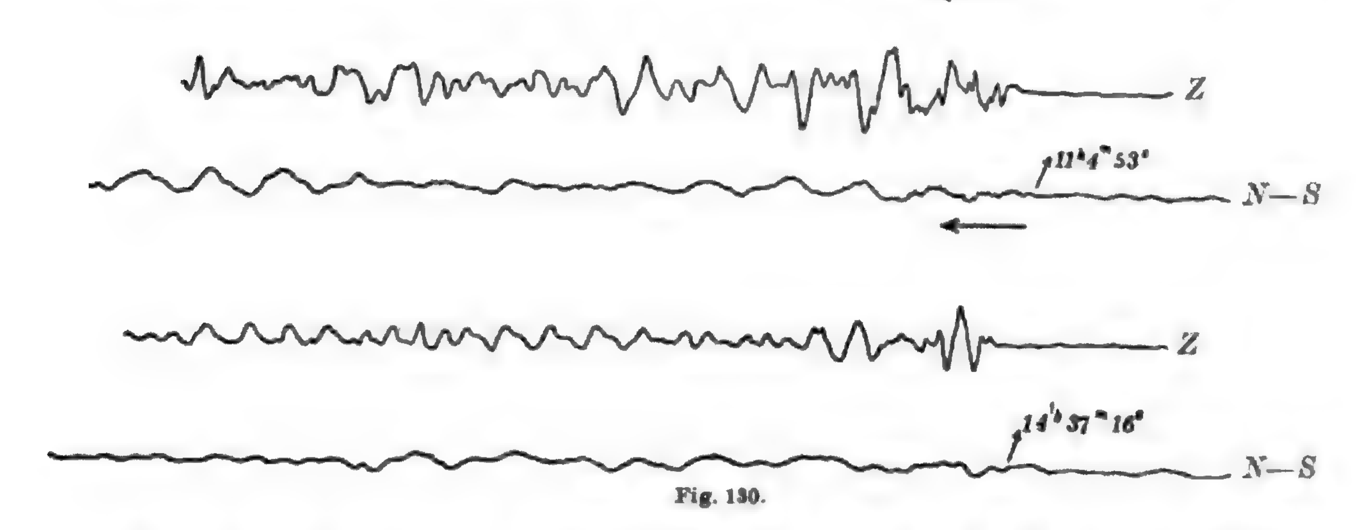


Fig. 130.

zeigt, die die Kopie der Aufzeichnung eines Bebens in den Kurilen darstellt. Die unteren Kurven sind hier die Fortsetzungen der oberen; die Unterbrechungen der Kurve entsprechen den Minutenmarken.

Besonders interessant ist der Teil des Seismogramms mit der maximalen Phase des Bebens. Obwohl sich das Epizentrum in einer Entfernung von 7500 km von Pulkovo befand, ergaben sich hier sehr große Ausschläge, was die hohe Empfindlichkeit des Seismographen beweist.

Die Auswertung der neuesten Beobachtungen in Pulkovo an einem solchen Vertikalseismographen und zwei aperiodischen Horizontalpendeln hat gezeigt, daß in der maximalen Phase das Verhältnis der maximalen Amplitude der vertikalen Komponente der Bodenbewegungen z_m zu der zugehörigen Größe der totalen horizontalen Komponente h_m, d. h. $\frac{z_m}{h_m}$ kleiner ist als der aus der Theorie Rayleighs unter der Voraussetzung abgeleitete Wert 1,47, daß der Poissonsche Koeffizient der Querkompression σ gleich $\frac{1}{4}$ ist (Kap. II, § 2, Formel (100))

$$\frac{z_m}{h_m} = \frac{\Gamma_2}{\Gamma_1} = 1{,}47.$$

Die maximale Größe $\frac{z_m}{h_m}$ aus den Beobachtungen beträgt nur 1,28, sehr oft ist $\frac{z_m}{h_m}$ jedoch noch bedeutend kleiner. Die Ursache dieser Erscheinung

Digitized by Google

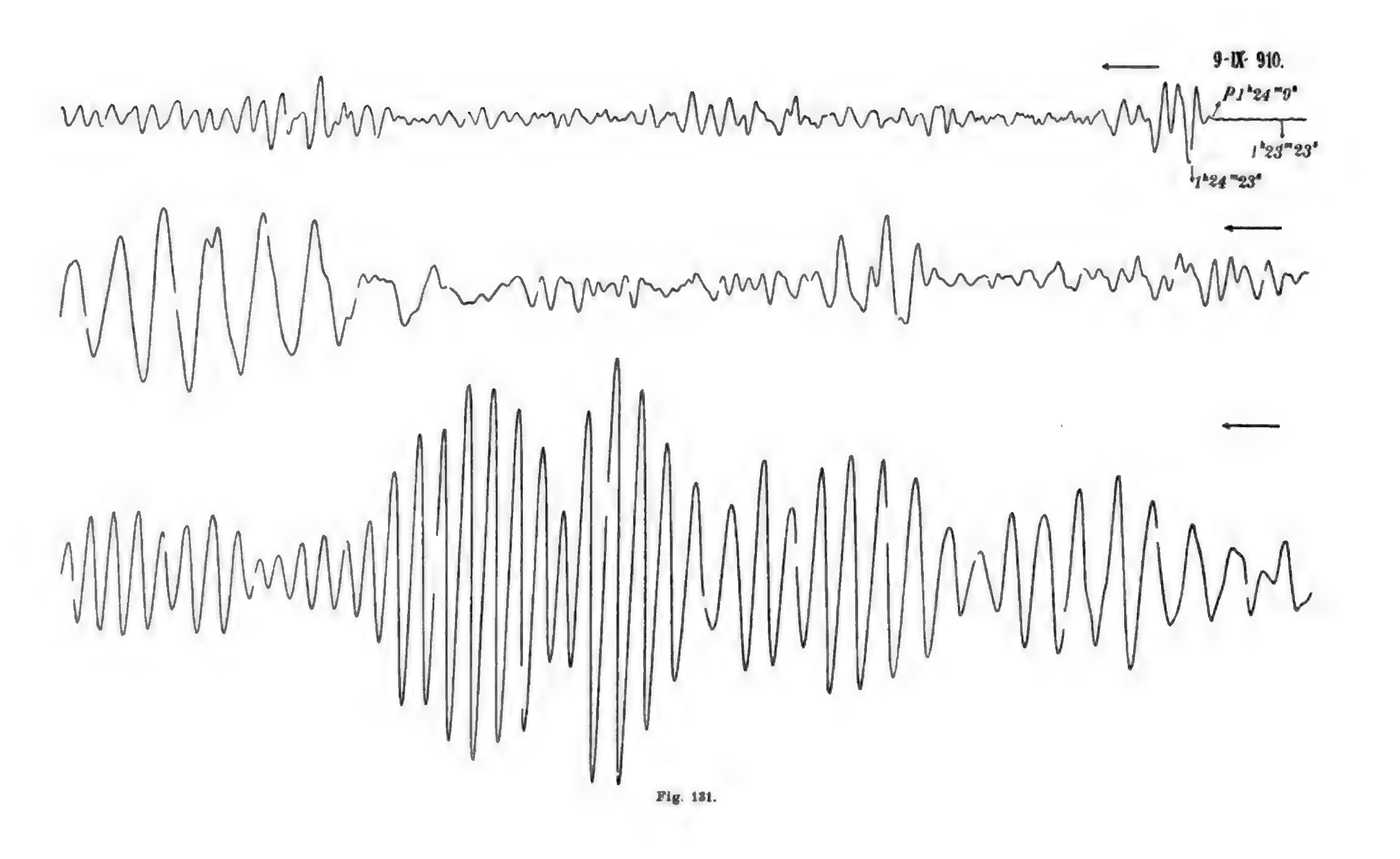


Fig. 131.

Digitized by Google

kann vielleicht darauf zurückgeführt werden, daß die vertikalen Bodenschwingungen mit der Entfernung schneller abklingen als die horizontalen. Nach Wiecherts[45]) Meinung kann diese Abweichung zum Teil darauf zurückgeführt werden, daß es außer den gewöhnlichen Rayleigh-Oberflächenwellen noch andere rein transversale Oberflächenwellen gibt, die keine zugehörige vertikale Komponente besitzen.

Neuntes Kapitel.

Untersuchung der Neigungen.

Die Frage nach der Messung der Bodenneigungen bei Fernbeben ist zurzeit in der Praxis noch nicht befriedigend gelöst worden.

Im vierten Kapitel haben wir einen speziell für solche Messungen bestimmten Apparat, der von Schlüter[46]) konstruiert und von ihm Klinograph genannt wurde, erwähnt. Im wesentlichen stellt der Klinograph eine Wage dar, an deren Balkenenden zwei schwere Massen angebracht sind, und bei der der Abstand r_s des Schwerpunktes von der Drehungsachse sehr klein ist. Ein solches System ist eigentlich ein einfaches Vertikalpendel mit einer sehr großen Eigenperiode T.

Ein solcher Klinograph, der mit elektromagnetischer Dämpfung versehen ist, ist in Fig. 132 abgebildet.

Wäre r_s gleich Null und folglich $T = \infty$ gewesen, so würde der Balken sich im Zustande des indifferenten Gleichgewichts befinden; er würde dann bei einer Bodenneigung, falls keine Reibung an der Schneide vorhanden

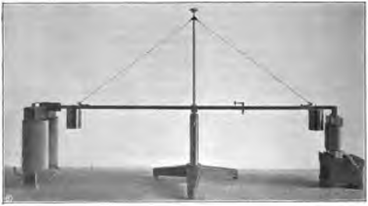


Fig. 132.

Digitized by Google

wäre, seine Lage im Raume beibehalten, so daß seine relative Neigung uns sogleich die Größe der Bodenneigung ψ geliefert haben würde.

Bei der sehr kleinen Größe des Winkels ψ würde aber ein solcher Apparat sehr unempfindlich sein. Um eine größere Empfindlichkeit zu erreichen, hat Schlüter am Ende des Balkens eine besondere Vergrößerungseinrichtung mittels eines Spiegelgehänges angebracht; auf der Pulkovoer Station wurde dagegen die galvanometrische Registrierung angewandt.

In der Praxis kann man jedoch den Apparat nicht im Zustande des indifferenten Gleichgewichtes gebrauchen und $r_0 = 0$ machen, denn dann ist der Klinograph zu unstabil und zu sehr zufälligen Fehlereinflüssen unterworfen, so daß er sehr leicht umkippt. Man muß ihn daher mit einem kleinen Direktionsmoment versehen, d. h. man muß den Schwerpunkt etwas niedriger als die Drehungsachse legen oder den Balken durch eine sehr schwache Feder in seiner Lage halten. Liegt der Schwerpunkt nur sehr wenig niedriger als die Drehungsachse, so werden auf den Klinographen die horizontalen Bodenverschiebungen angenähert parallel zum Balken einwirken und der Apparat wird daher die Neigungen allein registrieren.

Der Hauptmangel des Klinographen besteht in seiner geringen Empfindlichkeit, so daß die mit ihm angestellten Beobachtungen über Neigungen sowohl in Göttingen wie auch in Pulkovo keine sicheren Resultate ergeben haben. Man ist daher von der Verwendung dieses Apparates abgekommen.

Fig. 133.

Ein anderer sehr sinnreicher und einfacher Apparat, der gut auf die Änderungen der Bodenneigungen reagiert, wurde von den englischen Gelehrten Davison und Sir G. Darwin[47]) vorgeschlagen.

Die Konstruktion desselben ersieht man aus der Fig. 133.

Die schwere Masse M, die oben mit einem Querstab AB versehen ist, wird an zwei vertikalen Fäden AC und BD von ungleicher Länge aufgehängt; C und D sind mit dem Stativ des Apparates verbunden.

Wir bezeichnen die Länge des ersten Fadens mit a, die des zweiten mit b, wobei $a > b$ ist. Der Abstand der Fäden voneinander sei überall gleich δ und die Höhe der Punkte A und B über dem Niveau des Bodens sei d. Wenn sich der Apparat im Gleichgewicht befindet, so müssen sich die Fäden AC und BD in derselben Ebene befinden, denn in dieser Lage hat der Apparat kein Drehungsmoment.

Fig. 134.

Setzen wir nun voraus, daß die Erdoberfläche sich um die Achse Oy um einen kleinen Winkel ψ geneigt hat.

Wenn man von oben auf den Apparat sieht (Fig. 134), so projizieren

Digitized by Google

sich bei normaler Lage des Apparates die oberen Befestigungspunkte in C und D, bei der Neigung ψ dagegen in C_1 und D_1, wobei

$$CC_1 = (a + d)\psi$$

und

$$DD_1 = (b + d)\psi$$

ist. Bei der neuen Gleichgewichtslage des Apparates müssen die Fäden wiederum in einer Ebene liegen und es rückt deshalb nicht nur das ganze System zur Seite, sondern es dreht sich um einen kleinen Winkel $C_1 D_1 F = \theta$.

In dem Dreieck $C_1 D_1 F$ ist

$$\theta = \frac{C_1 F}{\delta},$$

da aber

$$C_1 F = CC_1 - DD_1 = (a - b)\psi,$$

so ergibt sich

$$\theta = \frac{a - b}{\delta} \cdot \psi. \tag{1}$$

Die Formel (1) zeigt, daß, wenn $a - b$ groß und δ klein ist, ein solcher Apparat eine große Empfindlichkeit für Bodenneigungen besitzen muß.

Den Drehungswinkel θ kann man optisch registrieren, indem man in der Mitte E des Querstabes AB einen kleinen Spiegel befestigt; die Genauigkeit in der Bestimmung des Winkels θ beträgt etwa $2\frac{1}{2}''$, wenn die Registriertrommel in einer Entfernung von 4 m vom Spiegel sich befindet.

Wir wollen nun zu schätzen versuchen, was ein solcher Apparat leisten kann.

Setzen wir $a = 4\frac{1}{2}$ m, $b = \frac{1}{2}$ m, $\delta = 2$ mm, dann ergibt sich

$$\frac{a - b}{\delta} = \frac{4000 \text{ mm}}{2 \text{ mm}} = 2000$$

und

$$\theta = 2000\psi.$$

Die Genauigkeitsgrenze der Bestimmung des Winkels ψ beträgt also etwa 0,0012″.

Dies ist gerade die Grenze der Genauigkeit, die nach § 2 des VII. Kapitels ein Horizontalpendel mit der reduzierten Länge $l = 118$ mm und einer Eigenperiode $T = 31$ Sek. erreichen kann.

Wir sehen also, daß der Apparat Davisons für die Registrierung der Neigungen dieselbe Empfindlichkeit zu haben scheint, wie ein gewöhnliches Horizontalpendel; er ist jedoch ebenso, wie das Pendel für die Untersuchung der Neigungen bei Fernbeben unbrauchbar, und zwar deswegen, weil auch auf ihn die horizontalen Bodenverschiebungen sehr stark einwirken.

Unter dem Einflusse der Verschiebungen muß der Apparat Davisons wie ein einfaches Vertikalpendel schwanken und eine jede solche Bewegung, veranlaßt infolge der ungleichen Länge der Fäden eine Drehung des Apparates, so daß es nicht möglich ist, die Neigungen von den Verschiebungen zu trennen.

Die allgemeine Theorie der Bewegung des Apparates Davisons mit bifilarer Aufhängung bei ungleich langen Fäden ist ziemlich kompliziert, aber sie enthält viele interessante Eigentümlichkeiten. Sie ist in der Abhandlung „Über die Methoden zur Beobachtung von Neigungswellen“ in den Nachrichten der Permanenten Seismologischen Zentral-Kommission, T. II, S. 2 behandelt.

Der Apparat Davisons kann dagegen mit Erfolg zur Untersuchung der Neigungen bei bradyseismischen Erscheinungen benutzt werden, z. B. bei der Untersuchung der Deformation des Erdkörpers unter dem Einflusse der Attraktion der Sonne und des Mondes, denn in diesem Falle kommen die plötzlichen Bodenverschiebungen nicht in Betracht. Es ist jedoch schwer, ihn gewissen äußeren Fehlereinflüssen zu entziehen, die auf das Horizontalpendel, mit dem wir uns im folgenden beschäftigen wollen, weniger einwirken.

Im § 1 des V. Kapitels haben wir die Gleichung der Bewegung des Horizontalpendels unter dem Einflusse der Verschiebungen und Neigungen (24) abgeleitet.

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0. \qquad (2$$

Diese Gleichung zeigt, daß der Winkelausschlag des Pendels θ immer von der Kombination $x'' - g\psi$ abhängt, und daß man mit einem Pendel in keiner Weise die Verschiebungen von den Neigungen trennen kann. Wenn wir nichtsdestoweniger Horizontalpendel zur Untersuchung der Bodenverschiebungen bei Fernbeben verwenden konnten, so ist das nur dadurch möglich geworden, daß bei den Fernbeben infolge der großen Länge λ der seismischen Oberflächenwellen die Neigungen ψ so klein sind, daß man das Glied $g\psi$ in der Mehrheit der Fälle im Vergleich mit x'' vernachlässigen kann. Die Aufgabe, den Winkel ψ als Funktion der Zeit t zu ermitteln, läßt sich daher im allgemeinen mit einem Apparat wie einem Horizontalpendel nicht lösen, denn die Bodenverschiebungen werden immer den Einfluß der Neigungen verdecken. Für bradyseismische Erscheinungen, wenn also angenähert $x'' = 0$ ist, ist ein Horizontalpendel zur Messung der Winkel ψ geeignet; uns interessiert jedoch jetzt speziell die Frage nach der Bestimmung von ψ bei tachyseismischen Erscheinungen, d. h. bei Erdbeben.

Man kann jedoch zwei Horizontalpendel benutzen und einen Apparat herstellen, der nur die Neigungen allein registriert und ganz unabhängig von irgendwelchen Verschiebungen ist, was weder mit dem Klinographen, noch auch mit dem Apparate Davisons zu erreichen ist.

Wir wollen die Theorie dieser Methode betrachten.

Wir nehmen dazu zwei ganz gleiche Horizontalpendel mit starker Dämpfung und galvanometrischer Registrierung, die auf dieselbe Periode T eingestellt sind.

Die Konstanten dieser Pendel, d. h. n, μ^2 oder ε, l und k seien untereinander gleich.

Das eine Pendel stellen wir auf der Erdoberfläche auf, und das andere

Digitized by Google

an einer Stelle über dem ersten, wobei die vertikale Entfernung der entsprechenden Punkte beider Seismographen gleich s sei.

Ist dann die horizontale Verschiebung eines bestimmten Punktes des ersten Pendelgestells gleich x, so ergibt sich, bei Anwesenheit einer positiven Bodenneigung ψ, für die Verschiebung des entsprechenden Punktes des zweiten Pendelgestells

$$x + s\psi.$$

Wir bezeichnen nun den Winkelausschlag des ersten Pendels mit θ_1 und des zweiten mit θ_2. Dann müssen θ_1 und θ_2 folgenden Differentialgleichungen Genüge leisten:

$$\theta_1'' + 2\varepsilon\theta_1' + n^2\theta_1 + \frac{1}{l}(x'' - g\psi) = 0$$

und

$$\theta_2'' + 2\varepsilon\theta_2' + n^2\theta_2 + \frac{1}{l}(x'' + s\psi'' - g\psi) = 0.$$

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab und bezeichnet $\theta_2 - \theta_1$ mit θ

$$\theta_2 - \theta_1 = \theta, \tag{3}$$

so ergibt sich

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{s}{l}\psi'' = 0. \tag{4}$$

Wir wollen nun voraussetzen, daß ein jedes Pendel mit einem und demselben Galvanometer, das auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt ist ($\varepsilon_1 = n_1$), gekoppelt ist. Den Winkelausschlag des Galvanometers unter dem Einfluß der Bewegung des ersten Pendels bezeichnen wir mit φ_1; die entsprechende Größe für das zweite Pendel sei φ_2.

Dann ergibt sich

$$\varphi_1'' + 2n_1\varphi_1' + n_1^2\varphi_1 + k\theta_1' = 0 \tag{5}$$

$$\varphi_2'' + 2n_1\varphi_2' + n_1^2\varphi_2 + k\theta_2' = 0. \tag{6}$$

Wir verbinden nun die Zuleitungsdrähte der Pendel mit dem Galvanometer derart, daß die Induktionsströme, die durch die bewegliche Spule des Galvanometers hindurchgehen, entgegengesetzt gerichtet sind.

Dann werden wir direkt die Differenz der Winkel φ_2 und φ_1 beobachten, d. h.

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Zieht man die Gleichung (5) von der Gleichung (6) ab und berücksichtigt die Bezeichnung (3), so ergibt sich

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0. \tag{7}$$

Die Formeln (7) und (4) zeigen, daß die Winkelausschläge des Galvanometers φ von den Bodenverschiebungen x gar nicht abhängen und nur durch den Einfluß der Neigungen ψ bedingt werden.

Digitized by Google

Ein solches Doppelpendel gibt also die Möglichkeit, die Neigungen in reiner Form bei tachyseismischen Erscheinungen zu studieren.

Die Gleichungen (4) und (7) haben genau dieselbe Gestalt, wie diejenige, welche wir bei der Untersuchung der horizontalen Bodenverschiebungen bei Anwendung der galvanometrischen Registriermethode benutzt haben, nur mit dem Unterschiede, daß wir jetzt $s\psi''$ statt x'' haben (Gleichung (25) § 1 Kapitel V und Gleichung (32) § 3 Kapitel VI, wo $\varepsilon_1 = n_1$ ist).

Wir können folglich auch hier die früher abgeleiteten Formeln anwenden.

Wir wollen nun voraussetzen, daß ψ dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leistet,

$$\psi = \psi_m \sin(pt + \delta), \tag{8}$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \tag{9}$$

T_p ist die Periode der entsprechenden seismischen Welle.

Setzen wir ferner der Einfachheit halber voraus, daß die Eigenperiode des Pendels T genau auf die Periode des Galvanometers T_1 eingestellt ist, und daß beide Pendel genau an der Grenze der Aperiodizität sich befinden ($\mu^2 = 0$).

Bezeichnet man dann mit y_m die maximale Amplitude der Sinuslinie, die vom Galvanometer auf der Registriertrommel aufgezeichnet worden ist, mit u das Verhältnis $\frac{T_p}{T}$, so ergibt sich nach den Formeln (46) und (47) des § 3 Kapitel VI

$$s\psi_m = \frac{\pi l}{k A_1} \cdot (1 + u^2)^2 \frac{y_m}{T_p}, \tag{10}$$

woraus die gesuchte Größe ψ_m sich leicht bestimmen läßt.

Die Periode T_p entnimmt man direkt dem Seismogramm.

Wir wollen nun untersuchen, wie groß die Empfindlichkeit eines solchen Doppelpendels ist.

Aus der Formel (10) finden wir, indem wir T_p durch uT ersetzen, daß

$$y_m = s \cdot \frac{k A_1}{\pi l} \cdot T \cdot \frac{u}{(1 + u^2)^2} \cdot \psi_m. \tag{11}$$

Der maximale Wert von $\frac{u}{(1 + u^2)^2}$ beträgt 0,325 (§ 4 Kapitel VI).

Denken wir uns ψ_m sehr klein, nämlich

$$\psi''_m = 0{,}01''$$

oder

$$\psi_m = 0{,}01'' \cdot \sin 1'' = \frac{0{,}01}{206000}$$

Digitized by Google

und nehmen wir ferner an, daß

$$s = 10 \text{ m} = 10000 \text{ mm}$$

$$k = 300$$

$$A_1 = 4000 \text{ mm}$$

$$l = 100 \text{ mm}$$

und

$$T = 30 \text{ Sek.}$$

ist. Dann ergibt sich

$$y_m = 10000 \cdot \frac{300 \cdot 4000}{\pi \cdot 100} \cdot 30 \cdot 0{,}325 \cdot \frac{0{,}01}{206000} = 18{,}1 \text{ mm.}$$

Ist die maximale Genauigkeit in der Bestimmung von y_m 0,1 mm, so beträgt die Grenzgenauigkeit in der Bestimmung des Winkels ψ_1 d. h. $\Delta\psi$

$$\Delta\psi = 0{,}000055''.$$

Wir haben für die Berechnung von $\Delta\psi$ den maximalen Wert der Funktion $\frac{u}{(1+u^2)^2}$ genommen. Es ist selbstverständlich, daß bei anderen Werten von $u = \frac{T_p}{T}$ die Vergrößerung des Apparates geringer wird, aber jedenfalls besitzt ein solches Doppelpendel hinreichende Empfindlichkeit für die Untersuchung der Bodenneigungen bei Fernbeben.

Dieser Apparat ist in der Praxis noch nicht geprüft worden, aber bei Laboratoriumsversuchen mit einer beweglichen Plattform hat er sehr günstige Resultate geliefert. Der Plattform, die die Erdoberfläche vorstellt, kann man mittels besonderer exzentrischer Rollen rhythmische horizontale Verschiebungen und zugleich Neigungen geben. Statt zweier Horizontalpendel wurden zwei genau gleiche (Gleichheit der verschiedenen Konstanten) Vertikalpendel benutzt, die auf Stahlplatten an einem Rahmen eines über dem anderen aufgehängt wurden und dieselbe Schwingungsebene besaßen.

Die folgende Figur 135 stellt ein solches doppeltes auf der beweglichen Plattform aufgestelltes Vertikalpendel dar.

Unten sieht man die Elektromagnete für die Dämpfung und die galvanometrische Registrierung der Bewegung des unteren Pendels. Die Elektromagnete für das obere Pendel waren auf einem besonderen Holzgerüst montiert, das auf derselben Platte aufgestellt war (Fig. 136). Die wahre Bewegung der Plattform wurde optisch auf photographischem Papier registriert.

Digitized by Google

Fig. 135.

In den folgenden Figuren 137, 138, 139, 140 und 141 beziehen sich die inneren Kurven mit kleineren Amplituden auf die Bewegung der Plattform und die äußeren auf die Bewegung des Galvanometers.

Die Kurven 137 und 138 entsprechen dem Falle, wenn der Plattform nur rhythmische Neigungen erteilt wurden, wobei die Perioden der Bewe-

Digitized by Google

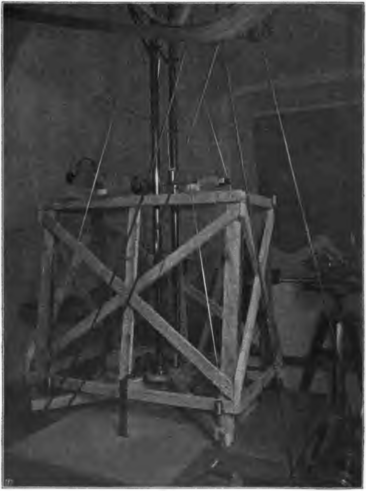


Fig. 136.

gung in beiden Fällen verschieden waren. Wir sehen, daß die Kurve des Galvanometers genau den Charakter der Bewegung der Plattform wiedergibt, wobei die Perioden T_p beider Bewegungen — des Galvanometers und der Plattform — vollständig identisch sind.

Führt jedoch die Plattform nur Verschiebungen aus, so bleibt das

Digitized by Google

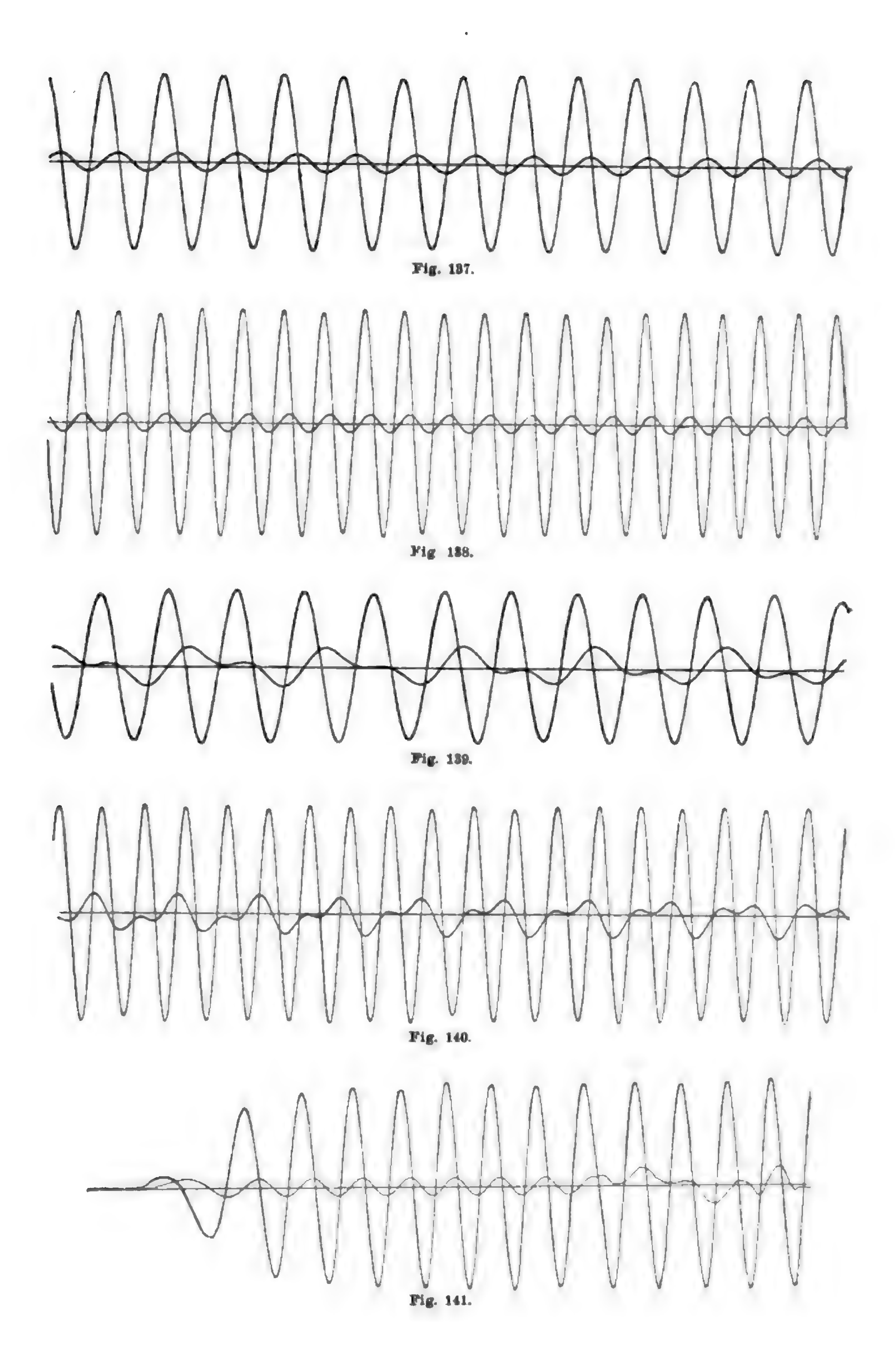


Fig. 137.

Fig. 138.

Fig. 139.

Fig. 140.

Fig. 141.

Digitized by Google

Galvanometer während der ganzen Zeit in Ruhe, was die Möglichkeit, die Stärke der Induktionsströme, welche in entgegengesetzter Richtung durch die bewegliche Spule des Galvanometers hindurchgehen, zu kompensieren, beweist.

Die Figuren 139 und 140 entsprechen dem Falle, wenn der Plattform gleichzeitig rhythmische Verschiebungen und Neigungen erteilt worden sind, was man aus der Form der Kurve der Bewegung der Plattform — eine doppelte Sinuslinie — ersehen kann. Das Galvanometer gibt in diesem Falle eine einfache Sinuslinie, die allein Neigungen entspricht, deren Periode genau der Periode der Neigungen der Plattform gleich ist. Wir sehen folglich, daß die Verschiebungen der Plattform auf diese instrumentelle Einrichtung nicht einwirken, es werden nur Neigungen registriert.

Besonders belehrend ist die Kurve 141.

In diesem Falle wurden der Plattform regelmäßige rhythmische Neigungen erteilt, zugleich aber wurde ihr mit der Hand eine Reihe völlig unregelmäßiger und willkürlicher Verschiebungen, die man deutlich auf der inneren Kurve sieht, gegeben. Auch hier zeichnete das Doppelpendel eine regelmäßige Sinuslinie auf, die nur die Neigungen wiedergibt.

Diese Versuche sind so überzeugend, daß es keinem Zweifel unterliegt, daß bei Beobachtung gewisser Vorsichtsmaßregeln und guter Kompensation der Pendelspulen ein solches Doppelpendel mit Erfolg für die Untersuchung der Bodenneigungen bei Fernbeben verwendet werden kann.

Zum Schluß sei noch darauf hingewiesen, daß man die Bodenneigungen ψ auch indirekt aus den Beobachtungen mit einem Vertikalseismographen erhalten kann.

Wenn sich längs der Erdoberfläche eine regelmäßige seismische Welle mit der Periode T_p fortpflanzt, so kann die vertikale Bodenverschiebung z in verschiedenen Entfernungen s vom Epizentrum in einem bestimmten Moment t durch folgende Formel ausgedrückt werden (§ 3 Kapitel IV)

$$z = z_m \sin\left\{2\pi\frac{s}{\lambda} + \delta\right\}, \tag{12}$$

wo λ die entsprechende Wellenlänge, die gleich dem Produkte der Fortpflanzungsgeschwindigkeit V und der Periode T_p,

$$\lambda = VT_p, \tag{13}$$

ist und δ eine Konstante, welche keine weitere praktische Bedeutung hat.

Aus dem Seismogramm eines Vertikalpendels kann man an gegebener bestimmter Stelle T_p und z_m bestimmen.

Die Bodenneigung φ ist im betreffenden Moment t gleich $\frac{dz}{ds}$.

$$\psi = \frac{2\pi}{\lambda} z_m \cos\left\{2\pi\frac{s}{\lambda} + \delta\right\}$$

oder nach Formel (13)

$$\psi = \frac{2\pi}{VT_p} z_m \cos\left\{2\pi\frac{s}{\lambda} + \delta\right\}.$$

Digitized by Google

Folglich läßt sich die absolute Größe der maximalen Bodenneigung ψ_m nach der folgenden einfachen Formel bestimmen

$$\psi_m = \frac{2\pi}{V} \cdot \frac{z_m}{T_p}. \tag{14}$$

Infolge der Größe von V (etwa 3,5 km/Sek.) und der Geringfügigkeit der Amplitude z_m, welche nur in Ausnahmefällen bei Fernbeben 1 mm erreicht, sind die Bodenneigungen in der Mehrzahl der Fälle sehr unbedeutend.

Mit einer systematischen Untersuchung der Neigungen hat die Seismometrie gegenwärtig sich noch nicht beschäftigt, es bleibt dieses also noch eine Aufgabe der Zukunft.

Zehntes Kapitel.

Auswertung von Seismogrammen.

§ 1. Bestimmung des Azimuts des Epizentrums.

Bei der Bearbeitung der Seismogramme hat man zuerst die Momente des Anfanges der ersten und zweiten Vorphase P und S des Bebens möglichst genau zu bestimmen, die den Momenten des Einsatzes der ersten longitudinalen und transversalen Wellen entsprechen, die aus dem Bebenherd durch den Erdkörper hindurch zum Beobachtungsort gelangt sind.

Den Moment P kann man meistenteils leicht genau bestimmen, insbesondere wenn man einen Vertikalseismographen zur Verfügung hat. In der Nähe des Anfanges der ersten Phase beobachtet man häufiger eine Reihe kurzer seismischer Wellen mit kurzen Perioden (preliminary tremors), die einen eigentümlichen Charakter besitzen; es ist dann nicht leicht zu sagen, welchen Punkt des Seismogramms man eigentlich als Anfang der ersten Phase P annehmen soll.

Anders verhält es sich mit der zweiten Vorphase S.

Bei manchen Seismogrammen ist sie nur undeutlich zu erkennen, so daß es schwierig ist, genau den Moment des Einsatzes S zu bestimmen. Verfolgt man aber aufmerksam die Aufzeichnung des Apparates, so kann man besonders bei der galvanometrischen Registrierungsart gewöhnlich die Stelle, wo ein mehr oder weniger scharfer neuer Wellenzug eintritt, ausfindig machen. Diese Stelle ist dann als Anfang von S anzunehmen. Die galvanometrische Registriermethode bietet infolge ihrer hohen Empfindlichkeit in dieser Hinsicht große Vorteile. Zuweilen geben die Stationen, an denen andere Registriermethoden angewandt werden, kein S an, während auf den Seismogrammen in Pulkovo der Anfang der zweiten Phase sehr deutlich bemerkt werden kann.

Digitized by Google

Sind P und S sehr scharf ausgeprägt, beobachtet man also einen plötzlichen scharfen Ausschlag des Apparates, so fügt man zu den Buchstaben P und S das Zeichen i (impetus) hinzu; ist aber der Einsatz der longitudinalen oder transversalen Wellen mehr oder weniger undeutlich, so gebraucht man das Zeichen e (emersio). Man wendet e und i auch als selbständige Bezeichnung verschiedener charakteristischer Stellen auf den Seismogrammen an, wenn die Natur der Phase unklar ist.

Für die Momente P und S sind gar keine Korrektionen wegen Verspätung der Aufzeichnung des Apparates gegenüber der wahren Bodenbewegung erforderlich, denn der Einsatz des ersten und zweiten Vorläufers ist bis zu einem gewissen Grade eine momentane Erscheinung.

Sind die Momente P und S aus dem Seismogramm entnommen, so bestimmt man aus der Differenz $S - P$ nach der schon früher angeführten Tabelle II von Zeißig für die Differenz der Laufzeiten der transversalen und longitudinalen Wellen die Epizentralentfernung Δ.

Um die geographischen Koordinaten des Epizentrums zu finden, muß man das Azimut bestimmen.

Wir setzen voraus, daß eine longitudinale sinusartige Welle (der Einsatz P) den Beobachtungsort erreicht hat und betrachten vorläufig nur die Projektion der horizontalen Bodenverschiebung im Meridian. Als Anfang der Zeitzählung nehmen wir den Moment des Einsatzes dieser Welle an.

Dann können wir setzen

$$x = x_m \sin pt, \tag{1}$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p} \tag{2}$$

ist. Denken wir uns, daß diese Bodenbewegung von einem Horizontalpendel mit galvanometrischer Registrierung aufgezeichnet wird, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß das Pendel genau auf die Grenze der Aperiodizität gestellt und folglich $\mu^2 = 0$ oder $\varepsilon = n$ ist, und daß weiter die Eigenperiode des Pendels T ohne Dämpfung genau gleich der Eigenperiode T_1 des Galvanometers ist.

Dann ist

$$n = n_1. \qquad \left(n = \frac{2\pi}{T}\right).$$

Für die Einhaltung der angegebenen Bedingungen ist immer zu sorgen, da dann alle Folgerungen und Formeln sich erheblich einfacher gestalten.

In diesem Falle lautet die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels folgendermaßen:

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0. \tag{3}$$

Für die Bewegung des Galvanometers haben wir

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi + k\theta' = 0. \tag{4}$$

Digitized by Google

Unter dem Einflusse einer solchen Welle wird das Galvanometer aus seiner Ruhelage abgelenkt und der Winkel φ erreicht bald ein Maximum φ_m; der entsprechende Moment sei t_m.

Bezeichnet nun y_m den Ausschlag des Lichtpunktes auf der Trommel, der dem ersten Maximum φ_m entspricht, und A_1 die normale Entfernung der Registriertrommel vom Galvanometerspiegel, so ergibt sich

$$\varphi_m = \frac{y_m}{2A_1}. \tag{5}$$

y_m entspricht also dem ersten Maximum auf dem Seismogramm unmittelbar nach dem Einsatze P.

y_m und T_p werden direkt dem Seismogramm entnommen.

Die Aufgabe besteht also darin, mit den bekannten Größen y_m, T_p und den Konstanten n, l, k und A_1 die maximale Bodenverschiebung x_m zu finden.

Diese Aufgabe wird dadurch etwas kompliziert, daß das Maximum y_m sehr bald nach dem Anfange der Bewegung (1—2 Sek.) eintritt und daß man bei der Integration des Systems der Differentialgleichungen (3) und (4) die Anfangsbedingungen der Bewegung in Betracht ziehen, d. h. die Werte der willkürlichen Konstanten, die in dem Ausdruck des gemeinschaftlichen Integrals dieser Gleichungen auftreten, bestimmen muß.

Diese Anfangsbedingungen der Bewegung sind folgende. Für

$$t = 0 \quad \text{ist} \quad \theta_0 = 0 \quad \text{und} \quad \varphi_0 = 0.$$

Die anfänglichen Winkelgeschwindigkeiten θ_0' und φ_0' lassen sich nach der Methode der gliedweisen Integration der Gleichungen (3) und (4) zwischen $t = 0$ und $t = \tau$, wo τ eine sehr kleine Größe ist, bestimmen.

Aus der Gleichung (3) finden wir

$$\theta_0' + \frac{1}{l} x_0' = 0,$$

und aus der Gleichung (4)

$$\varphi_0' + k\theta_0 = 0$$

oder

$$\varphi_0' = 0.$$

Die Formel (1) gibt

$$x_0' = p x_m;$$

folglich ist

$$\theta_0' = -\frac{p}{l} x_m. \tag{6}$$

Andererseits ist

$$x'' = -p^2 x_m \sin pt.$$

Also erhalten wir (Formel (3))

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta = \frac{p^2 x_m}{l} \sin pt. \tag{7}$$

Digitized by Google

Nun führen wir der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen ein:

$$A = \frac{p^2 x_m}{l} \tag{8}$$

und

$$\sin pt = \Phi(t). \tag{9}$$

Dann kann die Gleichung (7) folgendermaßen niedergeschrieben werden:

$$\theta'' + 2n\theta' + n^2\theta = A\Phi(t). \tag{10}$$

Diese Gleichung ist ihrer Form nach der Gleichung (70) § 3 Kapitel VII ähnlich, wo φ statt θ und ν statt n und ferner u statt t auftreten; μ^2 ist gleich Null.

Das allgemeine Integral dieser Gleichung ist durch Formel (77) § 3 Kapitel VII gegeben.

Darnach ist

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Ae^{-nt}\left[\int te^{nt}\Phi(t)dt - t\int e^{nt}\Phi(t)dt\right].$$

Wir bezeichnen das erste dieser unbestimmten Integrale mit S_1 und das zweite mit S_2.

Setzt man hierin den Wert von $\Phi(t)$ aus der Formel (9) ein, so ergibt sich

$$S_1 = \int te^{nt}\sin pt\,dt, \tag{11}$$

$$S_2 = \int e^{nt}\sin pt\,dt \tag{12}$$

und

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Ae^{-nt}[S_1 - tS_2]. \tag{13}$$

Durch partielle Integration finden wir

$$S_1 = \int t\,dS_2 = tS_2 - \int S_2\,dt;$$

folglich

$$S_1 - tS_2 = -\int S_2\,dt = -\int dt\int e^{nt}\sin pt\,dt$$

und

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + Ae^{-nt}\int S_2\,dt. \tag{14}$$

Wir wollen nun S_2 bestimmen.

Im § 3 des V. Kapitels hatten wir folgende zwei allgemeine Integralformeln (Formeln (80) und (81)):

$$\int e^{\varepsilon t}\cos(qt+\sigma)dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[q\sin(qt+\sigma) + \varepsilon\cos(qt+\sigma)] \tag{15}$$

$$\int e^{\varepsilon t}\sin(qt+\sigma)dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[\varepsilon\sin(qt+\sigma) - q\cos(qt+\sigma)]. \tag{16}$$

Digitized by Google

Bei Anwendung dieser Formeln ergibt sich

$$S_2 = \frac{e^{nt}}{n^2+p^2}[n \sin pt - p \cos pt].$$

Wir integrieren noch einmal.
Dann erhalten wir

$$\int S_2 dt = \frac{n}{n^2+p^2}\int e^{nt} \sin pt dt - \frac{p}{n^2+p^2}\int e^{nt} \cos pt dt$$

oder auf Grund der Formeln (15) und (16)

$$\int S_2 dt = \frac{e^{nt}}{n^2+p^2}\left[\frac{n}{n^2+p^2}\{n \sin pt - p \cos pt\} - \frac{p}{n^2+p^2}\{p \sin pt + n \cos pt\}\right]$$

$$= \frac{e^{nt}}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2) \sin pt - 2pn \cos pt].$$

Setzt man diese Größe in die Formel (14) ein und ersetzt A durch seinen Ausdruck aus der Formel (8), so ergibt sich

$$\theta = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \frac{1}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2) \sin pt - 2pn \cos pt]. \quad (17)$$

Wir wollen nun die Konstanten Γ_1 und Γ_2 bestimmen.
Dazu bilden wir die Derivierte θ'

$$\theta' = e^{-nt}[-n\Gamma_1 - n\Gamma_2 t + \Gamma_2]$$

$$+ \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \frac{1}{(n^2+p^2)^2}[(n^2-p^2) \cos pt + 2pn \sin pt]. \quad (18)$$

Setzen wir nun in den Formeln (17) und (18) $t = 0$, so ist

$$0 = \Gamma_1 - 2\frac{p^2 n x_m}{l(n^2+p^2)^2}$$

und

$$\theta_0' = -\frac{p x_m}{l} = -n\Gamma_1 + \Gamma_2 + \frac{p^2 x_m}{l} \cdot \frac{n^2-p^2}{(n^2+p^2)^2}.$$

Hieraus finden wir

$$\Gamma_1 = \frac{2p^2 n}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}$$

und

$$\Gamma_2 = \frac{2p^2 n^2}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l} - \frac{p x_m}{l} - \frac{p^2(n^2-p^2)}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}$$

oder

$$\Gamma_2 = \frac{p}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}[2p^2 n^2 - (n^2+p^2)^2 - p^2(n^2-p^2)]$$

$$= \frac{p}{(n^2+p^2)^2} \cdot \frac{x_m}{l}[-n^2-p^2]n^2,$$

oder schließlich

$$\Gamma_2 = -\frac{pn^2}{n^2+p^2} \cdot \frac{x_m}{l}.$$

Digitized by Google

Setzt man diese Größen für Γ_1 und Γ_2 in die Formel (17) ein, so ergibt sich

$$\theta = e^{-nt}\left[\frac{2p^2n}{(n^2+p^2)^2}\cdot\frac{x_m}{l} - \frac{pn^2}{n^2+p^2}\cdot\frac{x_m}{l}\,t\right] + \frac{p^2}{(n^2+p^2)^2}\left[(n^2-p^2)\sin pt - 2pn\cos pt\right]\frac{x_m}{l}. \quad (19)$$

Dies ist der Ausdruck für θ.

Nun ist θ' zu bestimmen und sein Wert in die Differentialgleichung (4) einzusetzen.

Aus der Gleichung (19) finden wir

$$\theta' = \frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{2p^2n^2}{(n^2+p^2)^2} + \frac{pn^3}{(n^2+p^2)}\cdot t - \frac{pn^2}{n^2+p^2}\right\} + \frac{p^3}{(n^2+p^2)^2}\left\{(n^2-p^2)\cos pt + 2pn\sin pt\right\}\right]$$

oder

$$\theta' = p\frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{n^2(n^2+3p^2)}{(n^2+p^2)^2} + \frac{n^3}{n^2+p^2}\cdot t\right\} + \frac{p^2}{(n^2+p^2)^2}\left\{(n^2-p^2)\cos pt + 2pn\sin pt\right\}\right].$$

Führen wir nun in diese Formel folgende Größe u ein

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p}, \quad (20)$$

dann ergibt sich

$$\theta' = p\frac{x_m}{l}\left[e^{-nt}\left\{-\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} + \frac{nu^2}{1+u^2}\cdot t\right\} + \frac{1}{(1+u^2)^2}\left\{(u^2-1)\cos pt + 2u\sin pt\right\}\right]. \quad (21)$$

Wir setzen nun diesen Ausdruck in Formel (4) ein und führen zugleich die folgenden Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} P_0 &= \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \\ P_1 &= -n\frac{u^2}{1+u^2} \\ Q_0 &= \frac{1-u^2}{(1+u^2)^2} \\ Q_1 &= -\frac{2u}{(1+u^2)^2} \\ R &= kp\cdot\frac{x_m}{l} \end{aligned}\right\}. \quad (22)$$

Dann erhalten wir

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi = R\left[e^{-nt}\{P_0 + P_1t\} + Q_0\cos pt + Q_1\sin pt\right].$$

Digitized by Google

Bezeichnen wir noch die Funktion auf der rechten Seite der Gleichung mit $\psi(t)$, also

$$\psi(t) = e^{-nt}\{P_0 + P_1 t\} + Q_0 \cos pt + Q_1 \sin pt, \tag{23}$$

so ist

$$\varphi'' + 2n\varphi' + n^2\varphi = R\psi(t). \tag{24}$$

Das allgemeine Integral dieser Gleichung läßt sich auf Grund der Formel (77) des § 3, Kap. VII niederschreiben, denn die Gleichung (24) hat dieselbe Form wie die Gleichung (10) unseres Paragraphen.

Also

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Re^{-nt}\Big[\int t e^{nt}\psi(t)\,dt - t\int e^{nt}\psi(t)\,dt\Big],$$

wo Γ_1 und Γ_2 zwei neue willkürliche Konstanten sind.

Wir bezeichnen die unbestimmten Integrale mit I_1 und I_2

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int t e^{nt}\psi(t)\,dt \\ I_2 &= \int e^{nt}\psi(t)\,dt \end{aligned}\right\}. \tag{25}$$

Dann ergibt sich

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] - Re^{-nt}[I_1 - tI_2]. \tag{26}$$

Integriert man I_1 partiell, so erhält man

$$I_1 = \int t\,dI_2 = tI_2 - \int I_2\,dt;$$

folglich

$$I_1 - tI_2 = -\int I_2\,dt = -\int dt \int e^{nt}\psi(t)\,dt.$$

Setzt man nun diesen Ausdruck in die Formel (26) ein, so ergibt sich

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + Re^{-nt}\int I_2\,dt. \tag{27}$$

Wir wollen nun folgendes unbestimmtes Integral bestimmen

$$I_2 = \int [\{P_0 + P_1 t\} + e^{nt}\{Q_0 \cos pt + Q_1 \sin pt\}]\,dt.$$

Unter Bezugnahme auf die Integralformeln (15) und (16) ergibt sich

$$\begin{aligned} I_2 = P_0 t + \frac{1}{2} P_1 t^2 &+ Q_0 \frac{e^{nt}}{p^2 + n^2}\{p \sin pt + n \cos pt\} \\ &+ Q_1 \frac{e^{nt}}{p^2 + n^2}\{n \sin pt - p \cos pt\} \end{aligned}$$

oder

$$I_2 = P_0 t + \frac{1}{2} P_1 t^2 + \frac{e^{nt}}{p^2 + n^2}\{(Q_0 p + Q_1 n)\sin pt + (Q_0 n - Q_1 p)\cos pt\}.$$

Ferner haben wir

$$\begin{aligned} \int I_2\,dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{1}{p^2 + n^2}\Big[(Q_0 p + Q_1 n)\frac{e^{nt}}{p^2 + n^2}\{n \sin pt - p \cos pt\} \\ + (Q_0 n - Q_1 p)\frac{e^{nt}}{p^2 + n^2}\{p \sin pt + n \cos pt\}\Big] \end{aligned}$$

Digitized by Google

oder

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{e^{nt}}{(p^2+n^2)^2}[\{Q_0 n^2 - Q_1 pn - Q_0 p^2 - Q_1 pn\}\cos pt$$
$$+ \{Q_0 pn + Q_1 n^2 + Q_0 pn - Q_1 p^2\}\sin pt].$$

Setzen wir in diese Formel die Größe u ein, die durch die Gleichung (20) definiert wird

$$n = pu,$$

so folgt

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} P_0 t^2 + \frac{1}{6} P_1 t^3 + \frac{e^{nt}}{p^4(1+u^2)^2} \cdot p^2[\{Q_0(u^2-1) - 2Q_1 u\}\cos pt$$
$$+ \{2Q_0 u + Q_1(u^2-1)\}\sin pt]. \tag{28}$$

Die Koeffizienten bei $\cos pt$ und $\sin pt$ lassen sich auf Grund der Bezeichnungen (22) ermitteln

$$Q_0(u^2-1) - 2Q_1 u = \frac{1}{(1+u^2)^2}[(1-u^2)(u^2-1) + 4u^2] = -\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^2}$$

und

$$2Q_0 u + Q_1(u^2-1) = \frac{1}{(1+u^2)^2}[2(1-u^2)u - 2u(u^2-1)] = \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^2}.$$

Setzt man nun diese Ausdrücke in die Formel (28) ein und ersetzt P_0 und P_1 durch ihre Ausdrücke aus den Formeln (22), so ergibt sich

$$\int I_2 dt = \frac{1}{2} \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \cdot t^2 - \frac{1}{6} p \cdot \frac{u^3}{(1+u^2)} t^3$$
$$+ \frac{1}{p^2} \cdot \frac{e^{nt}}{(1+u^2)^4}[-\{1-6u^2+u^4\}\cos pt + 4u(1-u^2)\sin pt].$$

Nun führen wir diesen Ausdruck in die Formel (27) ein und erhalten

$$\varphi = e^{-nt}[\Gamma_1 + \Gamma_2 t] + \frac{R}{p^2}\Big[e^{-nt}\Big\{\frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}(pt)^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{u^3}{(1+u^2)}(pt)^3\Big\}$$
$$+ \frac{1}{(1+u^2)^4}\{-(1-6u^2+u^4)\cos pt + 4u(1-u^2)\sin pt\}\Big].$$

Führen wir nun eine neue unabhängige Variable ein

$$\xi = pt \tag{29}$$

und ersetzen R durch seinen Ausdruck aus den Formeln (22), so ergibt sich schließlich

$$\varphi = e^{-u\xi}\Big[\Gamma_1 + \frac{1}{p}\Gamma_2 \xi\Big] + \frac{k x_m}{pl}\Big[e^{-u\xi}\Big\{\frac{1}{2} \cdot \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 - \frac{1}{6} \cdot \frac{u^3}{(1+u^2)}\xi^3\Big\}$$
$$+ \frac{1}{(1+u^2)^4}\{-(1-6u^2+u^4)\cos\xi + 4u(1-u^2)\sin\xi\}\Big]. \tag{30}$$

Es erübrigt nur noch, den Wert der Konstanten Γ_1 und Γ_2 aus der Bedingung $\xi = 0$, $\varphi = 0$ und $\frac{d\varphi}{d\xi} = 0$, zu bestimmen.

Digitized by Google

Die erste Bedingung liefert

$$\Gamma_1 = \frac{k x_m}{p l} \cdot \frac{1 - 6u^2 + u^4}{(1 + u^2)^4}. \tag{31}$$

Wir wollen nun den Wert $\frac{d\varphi}{d\xi}$ ermitteln

$$\frac{d\varphi}{d\xi} = e^{-u\xi}\left[-u\,\Gamma_1 - \frac{u}{p}\,\Gamma_2\xi + \frac{\Gamma_2}{p}\right]$$
$$+ \frac{k x_m}{p l}\left[e^{-u\xi}\left\{-\frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 + \frac{1}{6}\frac{u^4}{(1+u^2)}\xi^3 + \frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\cdot\xi - \frac{1}{2}\frac{u^3}{(1+u^2)}\cdot\xi^2\right\}\right.$$
$$\left.+ \frac{1}{(1+u^2)^4}\left\{(1 - 6u^2 + u^4)\sin\xi + 4u(1-u^2)\cos\xi\right\}\right].$$

Setzen wir nun $\xi = 0$. Dann ist also

$$0 = -u\,\Gamma_1 + \frac{\Gamma_2}{p} + \frac{k x_m}{p l}\cdot\frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4}$$

oder

$$\frac{\Gamma_2}{p} = \frac{k x_m}{p l}\cdot\frac{1}{(1+u^2)^4}[u(1-6u^2+u^4) - 4u(1-u^2)] = \frac{k x_m}{p l}\cdot\frac{u}{(1+u^2)^4}[-3-2u^2+u^4]$$
$$= -\frac{k x_m}{p l}\cdot\frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3}. \tag{32}$$

Setzen wir nun die Ausdrücke für Γ_1 und $\frac{\Gamma_2}{p}$ aus den Gleichungen (31) und (32) in die Gleichung (30) ein, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{k x_m}{p l}\left[e^{-u\xi}\left\{\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} - \frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3}\xi + \frac{1}{2}\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2}\xi^2 - \frac{1}{6}\frac{u^3}{1+u^2}\xi^3\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4}\cos\xi + \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4}\sin\xi\right]. \tag{33}$$

Zur Bequemlichkeit führen wir folgende Abkürzungen ein:

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= \frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} \\ a_1 &= -\frac{u(3-u^2)}{(1+u^2)^3} \\ a_2 &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2(3+u^2)}{(1+u^2)^2} \\ a_3 &= -\frac{1}{6}\cdot\frac{u^3}{1+u^2} \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

und

$$\left.\begin{aligned} g &= -\frac{1-6u^2+u^4}{(1+u^2)^4} = -a_0 \\ h &= \frac{4u(1-u^2)}{(1+u^2)^4} \end{aligned}\right\}. \tag{35}$$

Digitized by Google

Mit Rücksicht darauf, daß der Ausschlag des Lichtpunktes auf der Trommel von seiner Ruhelage bei dem Winkelausschlag φ des Galvanometers (Formel (5)) gleich

$$2 A_1 \varphi$$

und

$$p = \frac{2\pi}{T_p}$$

ist, erhält man nach Einsetzung dieser Ausdrücke in die Gleichung (33)

$$y_1 = x_m \cdot T_p \cdot \left(\frac{k A_1}{\pi l}\right) \cdot F(\xi), \tag{36}$$

wo

$$F(\xi) = e^{-u\xi}[a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + a_3\xi^3] + g\cos\xi + h\sin\xi \tag{37}$$

ist. Dies stellt die Abhängigkeit des Ausschlags des Lichtpunktes auf der Trommel bei galvanometrischer Registrierung von dem Argument $\xi = pt$ unter der Bedingung dar, daß die longitudinale seismische Welle, welche die Bewegung des Pendels veranlaßt hat, dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leistet

$$x = x_m \sin\xi.$$

Die verschiedenen im Ausdrucke $F(\xi)$ enthaltenen Koeffizienten sind Funktionen des Parameters $u = \frac{T_p}{T}$.

Bei dieser Ableitung haben wir vorausgesetzt, daß sowohl das Pendel als auch das Galvanometer genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt sind, und daß die Eigenperiode T des Pendels ohne Dämpfung der Periode T_1 des Galvanometers gleich ist. Wird aber diesen Bedingungen nicht genügt, so muß man in die vorhergehenden Formeln einige Korrektionsglieder einführen, worauf wir aber nicht näher eingehen wollen.

Da die Formel (37) die Exponentialfunktion $e^{-u\xi}$ enthält, so sind in dem Ausdruck für y_1 die Anfangsbedingungen der Bewegung berücksichtigt worden, die man für kleine Werte von t oder ξ nicht vernachlässigen kann.

Bei bedeutender Größe von ξ kann man die Glieder mit dem Faktor $e^{-u\xi}$ vernachlässigen und es nimmt dann $F(\xi)$ folgende einfache Gestalt an:

$$F(\xi) = g\cos\xi + h\sin\xi.$$

Setzen wir in diesem Ausdruck

$$\frac{h}{\sqrt{h^2 + g^2}} = \cos\Delta$$

und

$$\frac{g}{\sqrt{h^2 + g^2}} = -\sin\Delta,$$

dann ist

$$\operatorname{tg}\Delta = + \frac{1 - 6u^2 + u^4}{4u(1 - u^2)}$$

Digitized by Google

und

$$F(\xi) = \sqrt{h^2 + g^2} \cdot \sin(\xi - \Delta).$$

$$h^2 + g^2 = \frac{1}{(1+u^2)^8} [16u^2 - 32u^4 + 16u^6 + 1 + 36u^4 + u^8 - 12u^2 + 2u^4 - 12u^6]$$

$$= \frac{1}{(1+u^2)^4},$$

und folglich

$$F(\xi) = \frac{1}{(1+u^2)^2} \cdot \sin(\xi - \Delta).$$

In diesem Falle ist der maximale Wert y_m nach Formel (36) gleich

$$y_m = x_m T_p \cdot \frac{k A_1}{\pi l} \cdot \frac{1}{(1+u^2)^2}$$

und

$$x_m = \frac{\pi l}{k A_1} \cdot (1 + u^2)^2 \cdot \frac{y_m}{T_p}. \tag{38}$$

Diese Formel ist mit der Formel (47) des § 3, Kapitel VI, unter der Bedingung identisch, daß $\mu^2 = 0$ und $u = u_1$ $(T = T_1)$ ist.

Man kann sich dieser Formel jedoch nur dann bedienen, wenn die Zeit t, vom Anfange der Bewegung angerechnet, nicht zu kurz ist.

Da in unserem Falle das erste Maximum in der Kurve sehr bald (nach 1—2 Sek.) nach dem Einsatze des ersten Vorläufers P eintritt, so müssen wir y_m nach der strengen Formel (36) berechnen.

Diese Formel zeigt uns, daß y_1 Maximum ist, wenn $F(\xi)$ Maximum, d. h. wenn $\frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0$ ist.

Wir bezeichnen die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{dF(\xi)}{d\xi} = 0 \tag{39}$$

mit ξ_m.

Dann ergibt sich bei der früheren Bezeichnung (Formel (46), § 3, Kap. VI)

$$C_1 = \frac{\pi l}{k A_1}, \tag{40}$$

$$x_m = C_1 \frac{y_m}{T_p} \cdot \frac{1}{F(\xi_m)}. \tag{41}$$

Nach dieser Formel kann man die erste maximale Bodenverschiebung beim Einsatz der ersten longitudinalen seismischen Wellen berechnen.

y_m und T_p werden unmittelbar aus dem Seismogramm entnommen, wobei man bei der Bestimmung von T_p nicht die erste, sondern besser die später folgenden Wellen mißt, um von der Eigenbewegung des Pendels weniger beeinflußt zu sein.

Kennt man nun T_p und T, so ist auch der Parameter u, d. h. der numerische Wert der Koeffizienten aus der Formel (37) bekannt. Wir suchen dann die Wurzel ξ_m der transzendenten Gleichung (39) auf, setzen sie in die Formel (41) ein und erhalten die entsprechende Größe x_m.

Digitized by Google

Da diese Rechnungen kompliziert sind, so sind in der folgenden Tabelle X die Größen ξ_m und $F(\xi_m)$ für einige Werte des Parameters u aufgeführt.

ξ_m und $F(\xi_m)$ sind Funktionen von u.

Tabelle X.

u	ξ_m	$F(\xi_m)$	u	ξ_m	$F(\xi_m)$
0	3,1416 ($=\pi$)	2,000	0,4141*)	1,669	0,369
0,04	2,863	1,580	0,50	1,528	0,292
0,06	2,747	1,418	0,60	1,389	0,228
0,08	2,643	1,280	0,70	1,273	0,183
0,10	2,549	1,161	0,80	1,173	0,149
0,20	2,175	0,754	0,90	1,087	0,124
0,30	1,904	0,525	1,00	1,012	0,104
0,40	1,695	0,384			

Diese Größen sind unmittelbar nach den oben erwähnten Formeln berechnet. Um die Werte ξ_m und $F(\xi_m)$ für die Zwischengrößen u zu erhalten, kann man die Methode der graphischen Interpolation benutzen. Dazu trägt man auf der Abszissenachse die Größen u und auf der Ordinatenachse die Werte ξ_m und $F(\xi_m)$ auf und verbindet die entsprechenden Punkte durch Kurven, deren Lauf in Fig. 142 dargestellt ist.

Die obere Kurve gibt die Werte von ξ_m und die untere die von $F(\xi_m)$. Die beiden Funktionen sind ebenso wie u abstrakte Zahlen. Die Kurven sind auf Grund der Zahlen der Tabelle X konstruiert.

Mit Hilfe der unteren Kurve läßt sich sehr leicht der Wert von $F(\xi_m)$ nach der Größe u bestimmen, hat man diese Größen, so kann man leicht die gesuchte Größe x_m berechnen.

Die obere Kurve dient zur Kontrolle, und zwar in folgender Weise.

Entnimmt man y_m und T_p aus dem Seismogramm und berechnet man noch den Zeitraum t_m, der vom Anfange der ersten Phase P bis zum betreffenden Moment des Maximums auf dem Seismogramm verlaufen ist, so ergibt sich mit Berücksichtigung der Bezeichnung (29)

$$t_m = \frac{\xi_m}{p} = \frac{\xi_m}{2\pi} \cdot T_p.$$

Da aber

$$T_p = uT,$$

so ergibt sich

$$t_m = \frac{T}{2\pi} \cdot u \cdot \xi_m. \tag{42}$$

Vergleicht man nun die nach der Formel (42) berechnete Größe t_m mit der entsprechenden Größe aus dem Seismogramm, so kann man beurteilen, wie zuverlässig die Größe des Parameters u bestimmt worden ist.

*) $a_0 = -g = 0$.

Digitized by Google

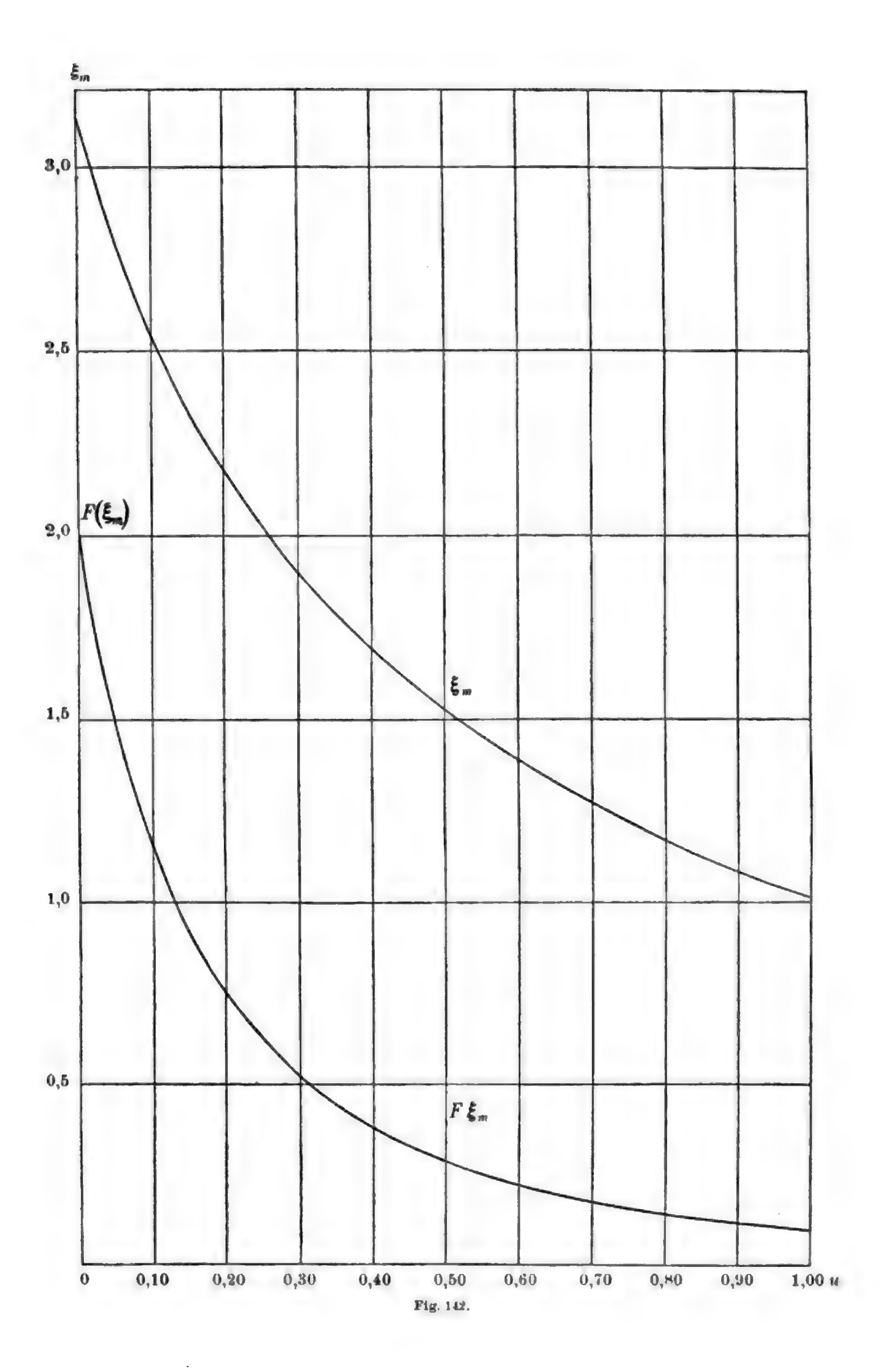


Fig. 142.

Digitized by Google

Tabelle XI.

u	ξ_m	Δ	u	ξ_m	Δ
0,01	3,065	−0,072	0,51	1,513	−0,015
0,02	2,998	67	0,52	1,498	14
0,03	2,926	63	0,53	1,484	14
0,04	2,863	60	0,54	1,470	14
0,05	2,803	56	0,55	1,456	14
0,06	2,747	53	0,56	1,442	14
0,07	2,694	51	0,57	1,428	13
0,08	2,643	48	0,58	1,415	13
0,09	2,595	46	0,59	1,402	13
0,10	2,549	44	0,60	1,389	13
0,11	2,505	42	0,61	1,376	12
0,12	2,463	41	0,62	1,364	12
0,13	2,422	39	0,63	1,352	12
0,14	2,383	38	0,64	1,340	12
0,15	2,345	36	0,65	1,328	11
0,16	2,309	35	0,66	1,317	11
0,17	2,274	34	0,67	1,306	11
0,18	2,240	33	0,68	1,295	11
0,19	2,207	32	0,69	1,284	11
0,20	2,175	31	0,70	1,273	11
0,21	2,144	30	0,71	1,262	10
0,22	2,114	29	0,72	1,252	10
0,23	2,085	28	0,73	1,242	10
0,24	2,057	27	0,74	1,232	10
0,25	2,030	27	0,75	1,222	10
0,26	2,003	26	0,76	1,212	10
0,27	1,977	25	0,77	1,202	10
0,28	1,952	24	0,78	1,192	10
0,29	1,928	24	0,79	1,182	9
0,30	1,904	23	0,80	1,173	9
0,31	1,881	23	0,81	1,164	9
0,32	1,858	22	0,82	1,155	9
0,33	1,836	22	0,83	1,146	9
0,34	1,814	21	0,84	1,137	9
0,35	1,793	20	0,85	1,128	9
0,36	1,773	20	0,86	1,119	8
0,37	1,753	20	0,87	1,111	8
0,38	1,733	19	0,88	1,103	8
0,39	1,714	19	0,89	1,095	8
0,40	1,695	19	0,90	1,087	8
0,41	1,676	18	0,91	1,079	8
0,42	1,658	18	0,92	1,071	8
0,43	1,640	17	0,93	1,063	8
0,44	1,623	17	0,94	1,055	8
0,45	1,606	16	0,95	1,047	7
0,46	1,590	16	0,96	1,040	7
0,47	1,574	16	0,97	1,033	7
0,48	1,558	15	0,98	1,026	7
0,49	1,543	15	0,99	1,019	7
0,50	1,528	15	1,00	1,012	

Digitized by Google

Tabelle XII.

u	$F(\xi_m)$	Δ	u	$F(\xi_m)$	Δ
0,01	1,879	−0,109	0,51	0,284	−0,007
0,02	1,770	99	0,52	0,277	7
0,03	1,671	91	0,53	0,270	7
0,04	1,580	84	0,54	0,263	6
0,05	1,496	78	0,55	0,257	6
0,06	1,418	72	0,56	0,251	6
0,07	1,346	66	0,57	0,245	6
0,08	1,280	61	0,58	0,239	6
0,09	1,219	58	0,59	0,233	5
0,10	1,161	54	0,60	0,228	5
0,11	1,107	51	0,61	0,223	5
0,12	1,056	47	0,62	0,218	5
0,13	1,009	45	0,63	0,213	5
0,14	0,964	41	0,64	0,208	5
0,15	0,923	39	0,65	0,203	4
0,16	0,884	36	0,66	0,199	4
0,17	0,848	34	0,67	0,195	4
0,18	0,814	31	0,68	0,191	4
0,19	0,783	29	0,69	0,187	4
0,20	0,754	28	0,70	0,183	4
0,21	0,726	26	0,71	0,179	4
0,22	0,700	25	0,72	0,175	4
0,23	0,675	24	0,73	0,171	4
0,24	0,651	23	0,74	0,167	3
0,25	0,628	22	0,75	0,164	3
0,26	0,606	21	0,76	0,161	3
0,27	0,585	21	0,77	0,158	3
0,28	0,564	20	0,78	0,155	3
0,29	0,544	19	0,79	0,152	3
0,30	0,525	18	0,80	0,149	3
0,31	0,507	17	0,81	0,146	3
0,32	0,490	16	0,82	0,143	3
0,33	0,474	15	0,83	0,140	3
0,34	0,459	14	0,84	0,137	3
0,35	0,445	13	0,85	0,134	2
0,36	0,432	13	0,86	0,132	2
0,37	0,419	12	0,87	0,130	2
0,38	0,407	12	0,88	0,128	2
0,39	0,395	11	0,89	0,126	2
0,40	0,384	11	0,90	0,124	2
0,41	0,373	10	0,91	0,122	2
0,42	0,363	10	0,92	0,120	2
0,43	0,353	10	0,93	0,118	2
0,44	0,343	9	0,94	0,116	2
0,45	0,334	9	0,95	0,114	2
0,46	0,325	9	0,96	0,112	2
0,47	0,316	8	0,97	0,110	2
0,48	0,308	8	0,98	0,108	2
0,49	0,300	8	0,99	0,106	2
0,50	0,292	8	1,00	0,104	

Digitized by Google

Um die Größen ξ_m und $F(\xi_m)$ nicht jedesmal aus der Kurve entnehmen zu brauchen, sind zur bequemeren Berechnung die vorstehenden zwei Tabellen XI und XII der Werte ξ_m und $F(\xi_m)$ für verschiedene Werte von u, von $u = 0{,}01$ an bis zu $u = 1{,}00$, zusammengestellt.

Nach Ableitung der vorstehenden theoretischen Grundlagen können wir zur Bestimmung des Azimuts des Epizentrums aus den Beobachtungen nur einer seismischen Station übergehen.

Wir setzen voraus, daß wir zwei aperiodische Pendel ($\mu^2 = 0$) mit galvanometrischer Registrierung haben, wobei die Eigenperiode eines jeden Pendels gleich der Periode des zugehörigen Galvanometers ist. Das eine Pendel registriert die Meridiankomponente $N-S$ und das andere die Komponente $E-W$ der horizontalen Bodenbewegung. Die Konstante C_1 für beide Seismographen bezeichnen wir mit C_N bzw. C_E, die ersten maximalen Ausschläge auf dem Seismogramm mit y_N und y_E und die Projektionen der ersten maximalen Bodenverschiebung bei P mit x_N und x_E.

Mit den bekannten Größen T_p, y_N und y_E bestimmen wir nach der Formel (41) x_N und x_E.

Bezeichnen wir nun mit α das gesuchte Azimut des Epizentrums, so ist

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{x_E}{x_N}. \tag{43}$$

Bei der Bestimmung von α nach der Formel (43) muß man immer das Vorzeichen der Größen x_N und x_E berücksichtigen, wobei man die Bodenverschiebungen nach Norden und Osten positiv und nach Süden und Westen negativ rechnet und außerdem beachtet, ob die erste longitudinale seismische Welle eine Kompressions- oder eine Dilatationswelle ist.

Die Frage der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums wird vereinfacht, wenn beide Pendel dieselbe Eigenperiode T besitzen, dann sind die Größen u und die Funktionen $F(\xi_n)$ für beide Pendel gleich, so daß bei der Bildung des Verhältnisses $\frac{x_E}{x_N}$ diese Funktion sich aufhebt.

In diesem Falle wird aus den Formeln (41) und (43)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{C_E}{C_N}\cdot\frac{y_E}{y_N}. \tag{44}$$

Es zeigt sich also, wie günstig es ist, bei der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums zwei Pendel mit gleichen Eigenperioden und gleicher Periode des Galvanometers anzuwenden, da wir dann die Periode der seismischen Welle T_p, die bei dem Einsetzen des ersten Vorläufers P zuweilen ziemlich schwer zu bestimmen ist, nicht zu kennen brauchen. Für die Bestimmung von α braucht man nur das Verhältnis der bekannten maximalen Ausschläge auf dem Seismogramm $\frac{y_E}{y_N}$ zu kennen und es mit dem Verhältnis der Seismographenkonstanten $\frac{C_E}{C_N}$ zu multiplizieren.

Digitized by Google

Zur Erläuterung des oben Erwähnten führen wir zwei Zahlenbeispiele an, die aus den Beobachtungen der Pulkovoer seismischen Station entnommen sind.

Beben in Nord-Japan am 22. Mai 1910.

Die Seismographenkonstanten.

Pendel $E-W$	Pendel $N-S$
$l = 186{,}2$ mm	$l = 185{,}8$ mm
$k = 48{,}4$	$k = 55{,}3$
$A_1 = 1104$ mm	$A_1 = 1099$ mm
$T = 23^s{,}0$	$T = 23^s{,}0$
$T_1 = 23{,}0$	$T_1 = 23{,}2$
$\mu^2 = -\ 0{,}02$	$\mu^2 = +\ 0{,}03$
$\log C_E = \bar{2}{,}0393$	$\log C_N = \bar{3}{,}9825$

$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0568.$$

Alle Perioden können als gleich betrachtet und die Pendel als an der Grenze der Aperiodizität befindlich angenommen werden.

Die Beobachtungen in Pulkovo haben geliefert

$$\left.\begin{aligned} P &= 6^h\ 34^m\ 48^s \\ S &= 6\quad 43\quad 27 \end{aligned}\right\} \text{Mittlere Greenwicher Zeit}$$

$$S - P = 0\quad 8\quad 39.$$

Die Epizentralentfernung ist $\Delta = 7200$ km (nach der Tabelle II von Zeißig).

Es war $y_E = -\ 7{,}89$ mm also ist $\log y_E = 0{,}8971\ (n)$

$y_N = -\ 8{,}39$ mm $\qquad \log' y_N = \bar{1}{,}0778\ (n)$

$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0568$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0317$$

$$\alpha = 47^0\ 5'.$$

Die Messungen von y_N und y_E wurden unter dem Mikroskop mit Hilfe eines besonderen Apparates, der zur Messung von Koordinaten dient, ausgeführt.

Die Bodenverschiebung war in der Richtung nach SW erfolgt. Da aber die erste Welle eine Kondensationswelle war, so ist das Azimut des Epizentrums

$$\alpha = NE - 47^0\ 5'.$$

Digitized by Google

Der Epizentralentfernung $\Delta = 7200$ km entspricht ein Bogen

$$\Delta^0 = 64^0 44' \text{ (S. 113).}$$

Mit diesen Angaben für α und Δ^0 ergibt sich nach den Formeln (48), (49), (50), (51) und (52) § 2 Kap. III

$$\chi = 55^0 16',$$

und für die geographischen Koordinaten des Epizentrums E

$$\varphi_e = 42^0 45' N,$$

$$\lambda_e = 145^0 55' E,$$

indem wir für die geographischen Koordinaten φ und λ von Pulkovo annehmen

$$\varphi = 59^0 46' N,$$

$$\lambda = 30^0 20' E.$$

Das Epizentrum liegt in der Nähe der Westküste der Insel Jesso, und zwar an derselben Stelle, an der das Beben tatsächlich gefühlt wurde.

Um einen Begriff von der Zuverlässigkeit dieser Bestimmungsmethode zu erhalten, vergleichen wir die Entfernungen Δ_e dieses Punktes von einigen zuverlässigeren seismischen Stationen mit den Epizentralentfernungen Δ_s, die die Stationen selbst nach ihren Beobachtungen der Momente P und S gegeben haben. Die Differenz $\Delta_e - \Delta_s$ kann bis zu gewissem Grade als Maß der Zuverlässigkeit dieser Art Bestimmung der Lage des Epizentrums nach den Beobachtungen nur einer seismischen Station betrachtet werden.

Es ergab sich

Stationen	$\Delta_e - \Delta_s$
Göttingen	− 20 km
Hamburg	− 30 „
Batavia	− 170 „
Straßburg	− 80 „
Wien	− 100 „

Die Übereinstimmung kann als befriedigend gelten, denn ein Fehler von 100 und mehr Kilometern für große Epizentralentfernungen ist immer möglich. Es können folgende vier Ursachen den Fehler hervorrufen: 1. das Epizentrum eines Bebens ist kein bestimmter Punkt, sondern immer eine mehr oder weniger ausgedehnte Fläche; 2. die Laufzeitkurven sind noch nicht mit solcher Genauigkeit bekannt, daß man völlig zuverlässig die Epizentralentfernungen Δ bestimmen kann (dazu gehört auch der Einfluß der Herdtiefe eines Bebens); 3. bei der Bestimmung des Azimuts können infolge

Digitized by Google

der Kleinheit von y_E und y_N die Messungen durch verschiedene zufällige Fehler verfälscht werden, was besonders dann eintreten kann, wenn sich die Pendel vor dem Beben nicht in vollständiger Ruhe befanden, sondern durch mikroseismische Unruhe in Bewegung gesetzt waren; und 4. die theoretischen Bedingungen $T = T_1$, $\mu^2 = 0$ und die Gleichheit der Eigenperioden beider Pendel sind nicht immer streng erfüllt.

Wir wollen nun ein Beispiel für eine solche Bestimmung geben, wenn zuerst eine Dilatationswelle auftritt.

Am 18. Februar 1911 wurde in der Nähe der Stadt Monastyr in Albanien auf der Balkanhalbinsel ein Beben gefühlt, das auch in Pulkovo registriert wurde. Die Konstanten der Seismographen waren

Pendel $E-W$		Pendel $N-S$	
$l =$	186,2 mm	$l =$	185,8 mm
$k =$	48,2	$k =$	56,5
$A_1 =$	1108 mm	$A_1 =$	1086 mm
$T =$	$23^s,4$	$T =$	$22^s,7$
$T_1 =$	23,0	$T_1 =$	22,8
$\mu^2 =$	0,00	$\mu^2 =$	+ 0,11
$\log C_E =$	$\bar{2},0395$	$\log C_N =$	$\bar{3},9783$

$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0612.$$

Für unsere Rechnung können wir in erster Annäherung annehmen, daß alle Perioden untereinander gleich und beide Pendel auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt sind; denn obwohl für das Pendel $N-S$ $\mu^2 = +0{,}11$ war, so ist doch nach Tabelle I der „Seismometrischen Tabellen“ die entsprechende Größe des Dämpfungsverhältnisses v gleich 7600 und bei einer so starken Dämpfung besitzt das Pendel die Eigenschaften eines aperiodischen Apparates.

Die Beobachtungen in Pulkovo lieferten:

$$\begin{aligned} P &= 21^h\,39^m\,49^s \\ S &= 21\;\;43\;\;34 \\ S - P &= \;\;0\;\;\;\;3\;\;45. \end{aligned}$$

Folglich

$$\Delta = 2260 \text{ km}.$$

$$y_E = -2{,}68 \text{ mm} \qquad \log y_E = 0{,}4281\ (n)$$

$$y_N = -7{,}31 \text{ mm} \qquad \log' y_N = \bar{1}{,}1361\ (n)$$

$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0612$$

$$\log \operatorname{tg} \alpha = \bar{1}{,}6254$$

$$\alpha = 22^0\,53'.$$

Digitized by Google

Aus den Zeichen bei y_E und y_N folgt, daß die Bodenverschiebung nach *SW* gerichtet war; da aber der Vertikalseismograph zeigte, daß die erste vertikale Bodenbewegung nach unten gerichtet war, die erste longitudinale Welle also eine Dilatationswelle war, so ist das Azimut des Epizentrums

$$\alpha = SW - 22^0 53'.$$

Der Epizentralentfernung $\Delta = 2260$ km entspricht ein Bogen

$$\Delta^0 = 20^0 19'.$$

Bei der Berechnung der geographischen Koordinaten des Epizentrums nach den Formeln des § 2 Kap. III muß man die Ergänzung von α zu 180^0 nehmen, d. h. $\alpha = 157^0 7'$ setzen. Berücksichtigt man ferner, daß das Epizentrum von Pulkovo westlich liegt, so muß man den berechneten Winkel γ von der Länge λ von Pulkovo abziehen.

Mit diesen Angaben für α und Δ^0 ergibt sich

$$\chi = 161^0 10'$$

$$\varphi_e = 40^0 29' N$$

$$\lambda_e = 20^0 7' E.$$

Dieser Punkt liegt tatsächlich auf der Balkanhalbinsel in der Nähe von Monastyr.

Die in der folgenden Tabelle enthaltenen Werte für $\Delta_e - \Delta_s$ schließen auch Stationen in verhältnismäßig geringer Entfernung von Monastyr ein.

Stationen	$\Delta_e - \Delta_s$
Hamburg	+ 10 km,
Wien.	+ 20 „
Tiflis	0 „
Triest	+ 10 „
Laibach	+ 30 „
Krakau	+ 50 „
Cartuja (Spanien) . . .	— 90 „

Die Übereinstimmung ist hier sehr befriedigend.

Für dasselbe Beben hat G. W. Walker in Eskdalemuir, wo dieselben Horizontalpendel wie in Pulkovo aufgestellt sind, unabhängig nach derselben Methode die geographischen Koordinaten des Epizentrums bestimmt; er fand

$$\varphi_e = 40^0 19' N$$

$$\lambda_e = 20^0 26' E,$$

was mit den Angaben aus Pulkovo sehr gut übereinstimmt.

Digitized by Google

Wie **Walker**[48]) gezeigt hat, kann man auch auf graphischem Wege mittels der aus dem Seismogramm abgeleiteten Werte für die Entfernung Δ und das Azimut α die geographische Lage des Epizentrums ableiten.

Die Methode gründet sich ebenso wie die weiter unten noch kurz zu besprechende Methode von **Rosenthal-Klotz** auf die Eigenschaft der stereo-

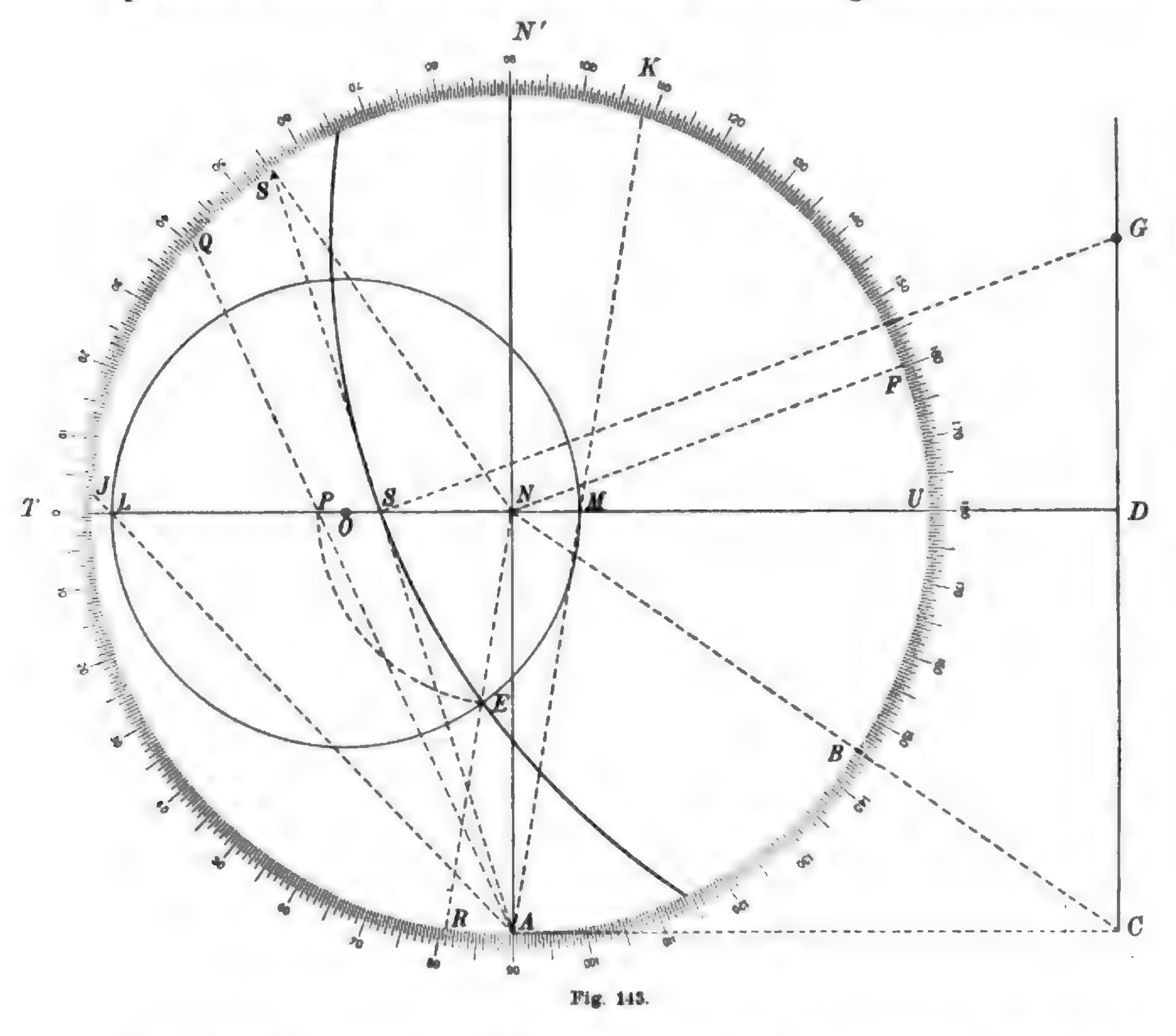


Fig. 143.

graphischen Polarprojektion, daß ein Kreis auf der Kugel wieder als Kreis abgebildet wird, und weiter darauf, daß die Projektion winkeltreu ist.

Es seien φ_s und λ_s die Koordinaten der Station, die aus dem Seismogramm abgeleitete Entfernung des Epizentrums sei Δ und das Azimut α.

Es falle dann in Fig. 143 die Projektion des Meridians der Station TN mit 0^0 zusammen. Man ziehe nun die Linie AN rechtwinklig zu TN, trage $\varphi_s = TS'$ auf dem Kreisbogen ab und verbinde A mit S', wodurch TN in S geschnitten wird. Dann ist S die Projektion der Station.

Alle größten Kreise, die durch die Station gelegt werden, projizieren sich als Kreise, die durch S gehen und deren Mittelpunkte auf einer geraden, rechtwinklig zu TNU verlaufenden Linie liegen, und zwar in der

Digitized by Google

Entfernung tang φ_s von N, wenn der Radius des Kreises als Einheit genommen wird.

Wir können nun diese Linie in folgender Weise konstruieren. Wir tragen $AB = \varphi_s$ auf dem Kreisbogen ab, ziehen in A eine Senkrechte zu AN, die die Verlängerung von NB in C schneidet. Wir ziehen dann weiter CD senkrecht zu AN, tragen $UF = 90^0 - \alpha$ ab, verbinden N mit F und ziehen SG parallel zu NF. Dann ist G der Mittelpunkt des Kreises, der durch S geht und auf dem das Epizentrum liegt.

Es ist nun noch die Projektion des Kreises mit dem Radius Δ und der Station als Mittelpunkt zu konstruieren.

Man trage $S'J = \Delta$ und $S'K = \Delta$, Δ in Graden, ab, verbinde J und K mit A. Die Schnittpunkte mit TU sind L und M. Die Halbierung von LM gibt O als den Mittelpunkt und OL als den Radius des projizierten Kreises, der durch die Projektion des Epizentrums geht.

Der Schnittpunkt der beiden Kreise LEM und SE ist die Projektion des Epizentrums, dessen geographische Länge relativ zur Station direkt am eingeteilten Kreise abgelesen werden kann, während seine geographische Breite durch die umgekehrte Konstruktion, wie sie bei der Konstruktion von S angewandt wurde, bestimmt werden kann.

Die Figur bezieht sich auf das große Beben in Turkestan vom 3. Januar 1911.

Das Seismogramm gab

$$\Delta = 5850 \text{ km} = 52^0\,37', \quad \alpha = 69^0\,49'.$$

Hieraus ergab sich das Epizentrum

$$\varphi_E = TQ = 41^0\,0'\,N, \quad \lambda_E = RT - 3^0\,12' = 77^0\,28'\,E.$$

Das durch Rechnung erhaltene Resultat war in guter Übereinstimmung

$$\varphi_E = 41^0\,4'\,N \quad \text{und} \quad \lambda_E = 77^0\,12'\,E.$$

Die Möglichkeit der Bestimmung des Azimuts des Epizentrums aus den ersten maximalen Bodenverschiebungen beim Einsatz P kann man als direkten Beweis dafür betrachten, daß die Wellen der ersten Vorphase tatsächlich den longitudinalen elastischen Schwingungen, die durch den Erdkörper sich fortpflanzen, zuzuschreiben sind.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß man die Formel (44) auch für die Bestimmung der Richtung der horizontalen Bodenverschiebung beim ersten Einsatz der transversalen Wellen der zweiten Vorphase S benutzen kann; daraus läßt sich dann ein Schluß auf die Schwingungsrichtung der Teilchen in den transversalen seismischen Wellen ziehen.

Auf diese Frage werden wir noch in § 3 zurückkommen.

Da die Bestimmung des Epizentrums für die Konstruktion der Laufzeitkurven von großer Wichtigkeit ist, sollen hier noch kurz zwei weitere Methoden für diese Bestimmung besprochen werden.

Rosenthal[49]) machte zuerst darauf aufmerksam, daß die stereographische Polarprojektion sich aus den im vorigen erwähnten Gründen besonders gut

Digitized by Google

zur raschen Bestimmung des Epizentrums eines Erdbebens eignet, wenn wenigstens von drei Stationen, die weit voneinander entfernt liegen, Beobachtungen vorliegen. Man braucht nämlich nur um jede dieser Stationen mit der zugehörigen Entfernung, die aus der Registrierung mittels der *P*- und *S*-Wellen zu ermitteln ist, einen Kreis zu ziehen. Der Schnittpunkt der drei Kreise gibt die Lage des Epizentrums. Wenn Station und Epizentrum auf verschiedenen Halbkugeln liegen, so hat man sich die andere Halbkugel auf die Rückseite des Blattes projiziert zu denken und den Kreis dementsprechend zu ziehen. Erweitert und wesentlich erleichtert hat O. Klotz[50]) die Anwendung dieser Methode durch die Berechnung von Hilfstafeln für eine größere Reihe von seismischen Stationen.

Wir wollen auf diese Methode noch etwas näher eingehen.

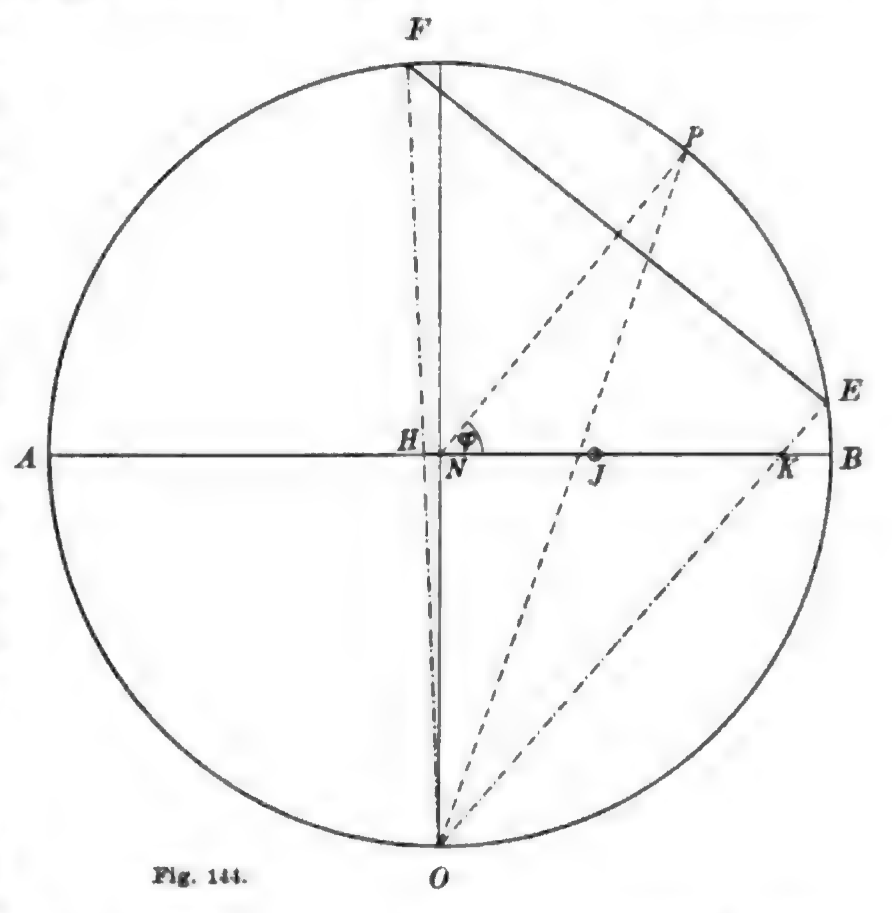


Fig. 144.

In Fig. 144 sei *O* der Projektionspunkt, *P* die Station, φ deren Breite, $PF = PE$ die Epizentraldistanz Δ in Graden angegeben

(10,000 km = 90°),

AB der Schnitt unserer Projektionsebene; *FE* ist dann die orthogonale Projektion des Kreises mit Δ um *P*. Dieser Kreis auf die Ebene *AB* projiziert, schneidet sie in *H* und *K*, d. h. *HK* ist der Durchmesser und der Mittelpunkt, *I* ist das Zentrum des projizierten Kreises, es sind also *IH* und *IK* Radien. *NI* ist die Entfernung vom geographischen Pol, von wo aus unser Epizentralkreis beschrieben werden soll, wie gleich ersichtlich wird. *IH*, *NI* sind die zwei Unbekannten, die wir für unseren Zweck entweder auf graphischem Wege oder rechnerisch bestimmen. Bei der graphischen Bestimmung darf man dem Kreise *OAPB* nicht weniger als 10 cm Radius geben; für die Rechnung benutzt man die Formeln

$$d = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\Delta}, \quad r = \frac{\sin\Delta}{\sin\varphi + \cos\Delta},$$

wo $d = NI$, $r = IH$ ist, in Einheiten des Radius $NO = NA = NB$ ausgedrückt.

Die Formeln ergeben sich leicht aus der Figur. Wir wollen nun zu einem Beispiel übergehen und nehmen das Turkestanbeben vom 3.—4. Januar 1911.

Digitized by Google

Von den veröffentlichten Berichten wählen wir die von Straßburg, Pulkovo und Ottawa.

Δ erhalten wir aus dem entsprechenden Zeitunterschied des Eintretens der *S*- und *P*-Wellen, d. h. des zweiten und ersten Vorläufers; wir entnehmen es der Tabelle von Zeißig.

Wir haben:

Straßburg	$\varphi = 48^\circ 35'$,	$\lambda = 7^\circ 40' E$,	$\Delta = 5300$ km $= 47^\circ 42'$,
Pulkovo	$\varphi = 59^\circ 46'$,	$\lambda = 30^\circ 20' E$,	$\Delta = 3690$ km $= 33^\circ 13'$,
Ottawa	$\varphi = 45^\circ 24'$,	$\lambda = 75^\circ 43' W$,	$\Delta = 9800$ km $= 88^\circ 12'$,

und berechnen nun oder entnehmen aus den von Klotz berechneten Tabellen die respektiven d und r.

Es ergibt sich für

Straßburg	$d = 4{,}65$,	$r = 5{,}20$,
Pulkovo	$d = 2{,}95$,	$r = 3{,}16$,
Ottawa	$d = 9{,}45$,	$r = 13{,}45$.

in Einheiten des Radius = 10 cm.

In Fig. 145 haben wir den Kreis, der im Original 10 cm Radius hat.

Wir ziehen die Radien für die drei Stationen entsprechend den Längengraden. Es werden dann die drei d vom Zentrum abgemessen und zuletzt von jedem so erhaltenen Punkt der entsprechende Bogen mit r beschrieben. Theoretisch sollten die drei Bogen einen gemeinsamen Schnittpunkt haben, was jedoch selten genau zutrifft. Wir nehmen mithin den Schwerpunkt des kleinen Dreiecks.

In Wirklichkeit ist der Herd ja auch kein mathematischer Punkt, sondern wohl eine Fläche, so daß ein gemeinsamer Schnittpunkt von drei oder mehr Stationen kaum zu erwarten ist.

Die Linie vom Zentrum durch diesen Schwerpunkt gibt sofort den Längengrad des Epizentrums, da sie den Winkel mit dem Nullmeridian angibt; die Entfernung des Schwerpunkts vom Zentrum (4,28 cm) ist gleich

$$\operatorname{tang}(45^\circ - \tfrac{1}{2}\varphi_0),$$

wo φ_0 die geographische Breite des Epizentrums ist.

Bei der Entnahme des entsprechenden Winkels γ, ($23^\circ 10'$), ist nicht zu vergessen, daß unsere Einheit 10 cm ist.

Aus dem so gefundenen Winkel ergibt sich dann φ_0,

$$\varphi_0 = 90^\circ - 2\gamma = 43^\circ 40'.$$

Die Lage des Epizentrums ist mithin $\varphi = 43^\circ 40'$, $\lambda = 78^\circ 20' E$.

Die Bestimmung nach der früher (S. 416f.) besprochenen Methode gibt in guter Übereinstimmung $\varphi = 43^\circ 14'$, $\lambda = 78^\circ 24' E$.

Wir haben also die geographischen Koordinaten des Epizentrums nicht nur in einfacher und rascher Weise graphisch bestimmt, sondern auch mit einer Genauigkeit, die ganz gut vergleichbar ist mit der der Daten.

Digitized by Google

Es ist besonders hervorzuheben, daß die Zeichnung mit größter Genauigkeit und Vorsicht ausgeführt werden muß, da sich sonst ziemlich große Fehler in das Resultat einschleichen können. Kleiner als 10 cm Radius darf man den Kreis nicht wählen. Zu groß wäre auch zwecklos, denn man kann keine größere Genauigkeit erreichen als die der Daten. Man muß sich dabei mit dem halben Grad begnügen.

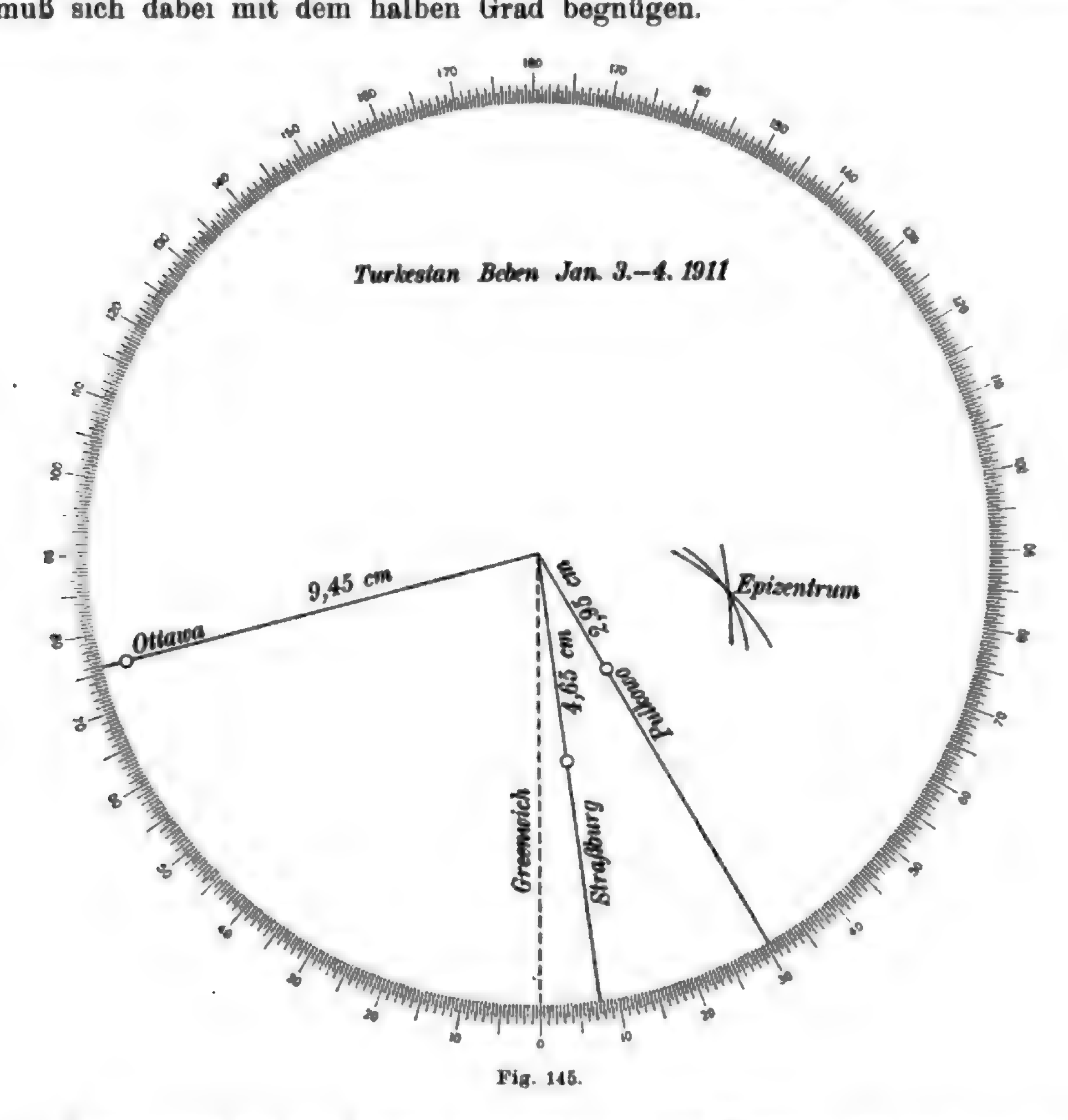


Fig. 145.

Ferner muß auf das Zeichen von $\cos\Delta$ und das Zeichen von $\sin\varphi + \cos\Delta$ geachtet werden, wonach die Richtung des Ablegens von d vom Zentrum abhängt.

Erwähnenswert ist, daß bei dieser Methode die absolute Zeit nicht ins Spiel kommt, indem wir Δ aus $S - P$ bestimmen, mithin die Uhrkorrektion überhaupt ausgeschaltet wird. Bei der gegenwärtigen Unsicherheit der genauen Zeit an manchen Stationen ist dieser Umstand von Bedeutung.

Die Methode hat ihre praktischen Grenzen; wenn nämlich $\sin\varphi + \cos\Delta$ sehr klein wird, dann erreichen d und r zu große Werte für die praktische Verwendung.

Nachdem wir wie oben die geographische Lage des Epizentrums bestimmt

Digitized by Google

haben, können wir auch graphisch das Azimut bestimmen. Das Azimut ist der Winkel zwischen dem Meridian und der Tangente an der Station zum großen Kreis durch Station und Epizentrum. Zur Bestimmung des großen Kreises haben wir drei Punkte:

die Station, ihr Gegenpunkt und das Epizentrum.

Die Station ist projiziert in die Meridianlinie in der Entfernung vom Pol gleich $\operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$: der Gegenpunkt, gemessen in entgegengesetzter Richtung, gleich $\operatorname{cotang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$. Mithin haben wir unsere drei Punkte, welche der große Kreis schneidet. Die drei Punkte bilden ein Dreieck im Kreis, und mithin ist der Winkel am Herd gleich $180^\circ - A$, eine einfache geometrische Relation, wo A das Azimut des Epizentrums von der betreffenden Station bezeichnet.

Die Punkte für $\operatorname{tang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ und $\operatorname{cotang}(45^\circ - \frac{1}{2}\varphi)$ für die drei Stationen sind in Fig. 145 nicht eingezeichnet.

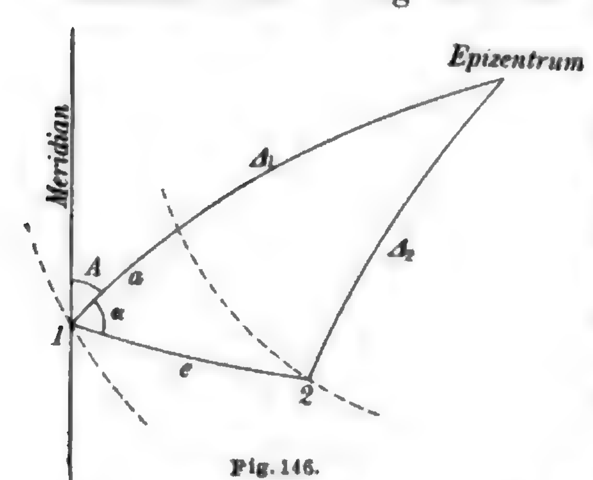


Fig. 146.

Aus der Originalzeichnung ergibt sich graphisch für Ottawa $A = 18^\circ$ trigonometrisch, durch Berechnen des sphärischen Dreiecks, Pol, Herd, Ottawa $A = 18^\circ 27'$. Ebenso ergibt sich für Pulkovo graphisch $A = 97^\circ 45'$, rechnerisch $A = 97^\circ 28'$; aus den Beobachtungen ergab sich im Mittel aus den Ausschlägen der ersten P-Welle $A = 97^\circ 57'$, also eine gute Übereinstimmung.

Die obigen Azimute sind von Nord über Ost gezählt.

Während bei der vorigen Methode die Kenntnis der Eintrittszeiten der P- und S-Wellen erforderlich ist, hat C. Zeißig[51]) eine Methode gegeben, die zur Azimutbestimmung nur die Kenntnis der Eintrittszeiten der P-Wellen, die erfahrungsgemäß genauer zu bestimmen sind, als die der S-Wellen sowie der angenäherten Epizentralentfernung erfordert. Allerdings müssen die Stationen ihre absolute Zeit genau kennen.

Es seien in Fig. 146 1 und 2 die beiden Stationen und es sei e ihre Entfernung.

Die Strecke a läßt sich dann aus der Differenz $P_1 - P_2$ auch bei nur angenähert bekannter Epizentraldistanz mit ausreichender Genauigkeit berechnen.

Es ist dann der Richtungswinkel α zu bestimmen aus

$$\cos\alpha = \frac{\cos(\Delta_1 - a)}{\sin\Delta_1 \sin e} - \operatorname{cotg}\Delta_1 \operatorname{cotg} e.$$

Berechnet man nun für eine bestimmte Epizentraldistanz die zueinander gehörigen Werte von $P_1 - P_2$ und α, und zwar für das Intervall von $\alpha = 0^\circ$ bis $\alpha = 180^\circ$ und $P_1 - P_2 = 0$ Sek. bis etwa $P_1 - P_2 = 70$ Sek. und trägt die Werte auf Millimeterpapier auf, so erhält man eine Kurve, aus der man

Digitized by Google

rückwärts die den Werten von $P_1 - P_2$ entsprechenden Richtungswinkel α für diese bestimmte Epizentraldistanz entnehmen kann. Aus dem Richtungswinkel ergibt sich mit dem bekannten Azimut der Station das Azimut des Epizentrums. Über zwei andere von Zeißig angegebene Methoden siehe Literaturübersicht.

Berechnet man für eine Reihe von Epizentraldistanzen $\Delta = 500$, 1000, 2000, ... 10000 km, solche Kurven, so kann man für eine jede Entfernung, wenn sie auch nur angenähert bekannt ist, mit ausreichender Genauigkeit interpolarisch die Werte von d entnehmen. Es erfordert also diese Methode die Berechnung einer besonderen Kurventafel für jede Station, die zur Bestimmung des Epizentrums herangezogen werden soll.

Aus Azimut und Epizentraldistanz kann man ebenfalls graphisch die geographischen Koordinaten bestimmen, wenn man für die Ausgangsstation ein Netz von Linien gleichen Azimuts und gleicher Entfernung von der Station in eine Weltkarte einträgt, wie es zuerst von G. Grablovitz[52]) für seismische Zwecke ausgeführt wurde.

Für eine genaue Herdbestimmung wird man jedoch, wenn ein ausreichendes Material vorliegt, außer der graphischen Bestimmung, die nur Näherungswerte ergibt, noch eine exaktere rechnerische Ableitung unter Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate vornehmen. Eine eingehende Darlegung des anzuwendenden Verfahrens hat L. Geiger[53]) gegeben.

§ 2. **Bestimmung des Emergenzwinkels.**

Im Kapitel III haben wir die Bedeutung des Emergenzwinkels kennen gelernt, d. h. des Winkels, den die Tangente an die Trajektorie des seismischen Strahles im Punkte ihrer Ankunft an der Erdoberfläche mit dem Horizont im Beobachtungsort bildet (Fig. 147).

Fig. 147.

Dieser Winkel ist der wahre Emergenzwinkel. Er ist in Fig. 147 durch den Winkel ABH dargestellt, E ist das Epizentrum, B der Beobachtungsort.

Wir haben auch gesehen, daß man den Winkel e sehr einfach aus der Laufzeitkurve für die Wellen der ersten Vorphase nach der Formel

$$\cos e = V_1 \frac{dT_1}{d\Delta} \tag{45}$$

ermitteln kann, wobei V_1 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der seismischen Wellen in den obersten Erdschichten (Formel (54) § 3 Kapitel III) ist.

Unter dem Einflusse der longitudinalen Welle, die von unten in B anstößt, erfährt ein Element der Erdoberfläche eine maximale Verschiebung s in der Richtung BA_1.

Wir wollen nun ein rechtwinkliges Koordinatensystem nehmen und richten die x-Achse in der Horizontalebene nach N, die y-Achse nach E und die z-Achse nach dem Zenit. Die Projektionen der ersten maximalen

Digitized by Google

Bodenverschiebung s auf diese drei Richtungen bezeichnen wir mit x_N, x_E und x_z.

Mit Hilfe zweier aperiodischer Horizontalpendel mit galvanometrischer Registrierung kann man die Größen x_N und x_E nach der Formel (41) berechnen, indem man y_N, y_E und T_p aus dem Seismogramm entnimmt.

Die totale horizontale Verschiebung x_h eines Bodenteilchens ergibt sich nach der Formel

$$x_h = \sqrt{x_N^2 + x_E^2} \qquad (46)$$

Verfügt man auch über einen aperiodischen Vertikalseismographen, dessen Bewegungsgleichung sich nicht wesentlich von der Gleichung der Bewegung eines aperiodischen Horizontalseismographen unterscheidet, so kann man auch die absolute Größe der vertikalen Komponente x_z der ersten maximalen Bodenverschiebung ermitteln. In Fig. 131 bedeuten BH und BD bzw. x_h und x_z.

Das Verhältnis $\frac{x_z}{x_h}$ gibt uns die Tangente des Winkels A_1BH, den wir mit $\bar{e}$ bezeichnen wollen.

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{x_z}{\sqrt{x_N^2 + x_E^2}}. \qquad (47)$$

Den Winkel $\bar{e}$ nennt man den scheinbaren Emergenzwinkel; diesen kann man sehr leicht aus den Beobachtungen mit drei geeigneten Seismographen ermitteln.

Der Winkel $\bar{e}$ ist dem Winkel e nicht gleich, denn an der Erdoberfläche im Punkte B können verschiedene komplizierte Änderungen der seismischen Energie erfolgen; so tritt unter anderem dort eine partielle Reflexion des seismischen Strahles in der Richtung BF ein.

Die Frage nach der Beziehung zwischen diesen Winkeln e und $\bar{e}$ ist gegenwärtig eine der verwickeltsten Fragen der theoretischen Seismometrie und bis jetzt noch nicht streng gelöst worden.

Wiechert[54]) gibt folgende Formel:

$$\cos e = \frac{V_1}{V_2}\sqrt{\frac{1 - \sin \bar{e}}{2}}, \qquad (48)$$

wo V_1 und V_2 die Fortpflanzungsgeschwindigkeiten der longitudinalen und der transversalen Wellen in den oberen Erdschichten bedeuten. Hat man also aus den Beobachtungen den scheinbaren Emergenzwinkel $\bar{e}$ bestimmt, so kann man nach Formel (48) auch den wahren Winkel e bestimmen.

Setzt man in die Formel (48) den Ausdruck $\cos e$ aus Formel (45) ein, so ergibt sich

$$V_2 = \frac{\sqrt{\frac{1 - \sin \bar{e}}{2}}}{\frac{d T_1}{d \Delta}}. \qquad (49)$$

Digitized by Google

Diese Formel gibt eine direkte Methode der Bestimmung der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der transversalen seismischen Wellen V_2 in den obersten Erdschichten, unabhängig von irgendwelchen Voraussetzungen über die Größe der Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Wellen V_1. Infolgedessen erhält die unmittelbare Bestimmung des Winkels $\bar{e}$ aus den Beobachtungen ein besonderes Interesse.

Obwohl wir aus den Beobachtungen an der Erdoberfläche unabhängig von jeglichen theoretischen Erwägungen direkt nur den scheinbaren Emergenzwinkel $\bar{e}$ ermitteln können, so hat doch dieser Umstand keine wesentliche Bedeutung, da der Unterschied zwischen den Winkeln $\bar{e}$ und e nach der Wiechertschen Formel für Epizentralentfernungen Δ, die 1500 km übersteigen, sehr unbedeutend ist.

Um sich von der Richtigkeit des Gesagten zu überzeugen, sind in der Tabelle XIII mit Abrundung bis auf 1° für verschiedene Epizentralentfernungen Δ die Größen des wahren Emergenzwinkels e, die von Zoeppritz und Geiger aus der Laufzeitkurve der longitudinalen Wellen (Tabelle III, S. 118) abgeleitet sind, mit den Größen des scheinbaren Winkels $\bar{e}$, die nach der folgenden, unmittelbar aus der Formel (48) sich ergebenden Formel (50)

$$\sin \bar{e} = 1 - 2 \cdot (0{,}559)^2 \cos^2 e \qquad (50)$$

berechnet sind, zusammengestellt, indem für die oberen Erdschichten $V_1 = 7{,}17$ km/Sek. und $V_2 = 4{,}01$ km/Sek. und folglich $\frac{V_2}{V_1} = 0{,}559$ gesetzt wurde.

Tabelle XII.

Δ	e	$\bar{e}$	Δ	e	$\bar{e}$
0 km	0°	22°	7000 km	65°	63°
500	11	23	7500	66	68
1000	21	27	8000	66	64
1500	30	32	8500	67	64
2000	37	37	9000	67	65
2500	44	42	9500	68	66
3000	49	47	10000	69	67
3500	53	52	10500	70	67
4000	57	54	11000	70	68
4500	60	58	11500	71	69
5000	63	60	12000	72	70
5500	65	62	12500	73	71
6000	65	62	13000	74	72
6500	65	63			

Diese Tabelle zeigt, daß für die Epizentralentfernungen, die kleiner als 2000 km sind, $\bar{e} > e$, für alle größeren Werte von Δ dagegen $\bar{e} < e$ ist; die Differenz übersteigt im letzteren Falle nirgends 2—3°, ist also gering.

Nur für sehr nahe Beben ist $\bar{e}$ bedeutend größer als e. An der

Digitized by Google

Grenze bei $\Delta = 0$, ist $e = 0$ und $\bar{e} = 22^0$. Es kann somit der scheinbare Emergenzwinkel nach der Wiechertschen Theorie niemals kleiner als 22^0 sein.

Der erste, der sich experimentell mit der Bestimmung des Winkels $\bar{e}$ aus Beobachtungen beschäftigte, war der leider schon früh verstorbene Seismologe Schlüter. Bei der Ableitung der Projektionen der Bodenverschiebungen x_N, x_E und x_z bei P bediente er sich einer Formel zur Bestimmung der maximalen Bodenverschiebungen bei harmonischen Schwingungen, die die Anfangsbedingungen der Bewegung des Apparates nicht berücksichtigen. Dieses ist jedoch nicht zulässig, da das erste Maximum auf dem Seismogramm sehr bald nach dem Einsatz P eintritt, wenn der Einfluß der Eigenbewegung des Apparates noch von Bedeutung ist, die Glieder mit dem Exponentialfaktor also noch nicht genügend klein geworden sind.

Nach Schlüter hat sich niemand mehr mit dieser Frage beschäftigt.

In neuester Zeit ist an der seismischen Station in Pulkovo nach der im Sommer 1910 erfolgten Aufstellung eines aperiodischen Vertikalseismographen der früher beschriebenen Konstruktion Beobachtungsmaterial gesammelt, aus dem die Größe des scheinbaren Emergenzwinkels $\bar{e}$ für verschiedene Epizentralentfernungen ermittelt werden konnte.

Zur besseren Erläuterung dessen, wie man den Winkel $\bar{e}$ aus den Beobachtungen bestimmt, geben wir ein Zahlenbeispiel wieder, das sich auf das Beben am 24. VI. 1910 bezieht, dessen Epizentrum in Algerien lag.

Bei allen drei Seismographen unterscheiden sich die Eigenperioden der Schwingungen (ohne Dämpfung) und die Eigenperiode des betreffenden Galvanometers sehr wenig voneinander, so daß sie als übereinstimmend angenommen werden konnten; jedoch war die Periode des Vertikalseismographen wesentlich kleiner, als die der Horizontalseismographen.

Die Seismographenkonstanten waren die folgenden

Pendel $E - W$		$N - S$		Z	
$l =$	186,2 mm	$l =$	185,8 mm	$l =$	377,6 mm
$k =$	48,6	$k =$	54,3	$k =$	236,5
$A_1 =$	1105 mm	$A_1 =$	1099 mm	$A_1 =$	915 mm
$T = T_1 =$	$23^s,2$	$T = T_1 =$	$23^s,2$	$T = T_1 =$	$13^s,7$
$\mu^2 =$	+ 0,02	$\mu^2 =$	+ 0,12	$\mu^2 =$	− 0,01
$\log C_E =$	$\bar{2},0371$	$\log C_N =$	$\bar{3},9904$	$\log C_z =$	$\bar{3},7389$

$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0,0467.$$

In erster Annäherung können wir annehmen, daß $\mu^2 = 0$ ist

Digitized by Google

Die Beobachtungen in Pulkovo lieferten:

$$P = 13^h\,33^m\;\;0^s$$
$$S = 13\;\;37\;\;53$$
$$S - P = \;0\;\;\;4\;\;53$$
$$\Delta = 3140 \text{ km.}$$

Die ersten maximalen Ausschläge bei P waren

$$y_E = +0{,}55 \text{ mm},\quad y_N = +0{,}54 \text{ mm},\quad y_z = +0{,}95 \text{ mm},\qquad T_p = 4^s{,}4 \text{ und } t_m = 1^s{,}3,$$

die horizontale Bodenverschiebung erfolgte also nach NE.

Da y_z positiv ist, so war die erste Welle eine Kondensationswelle und das Azimut des Epizentrums ist folglich SW.

$$\log y_E = \bar{1}{,}7404$$
$$\log' y_N = 0{,}2676$$
$$\log \frac{C_E}{C_N} = 0{,}0467$$
$$\log \operatorname{tg} \alpha = 0{,}0547.$$
$$\alpha = SW - 48^0 36'.$$

Aus Δ und α ergeben sich die folgenden Koordinaten des Epizentrums

$$\varphi_e = 37^0\;\;8' N$$
$$\lambda_e = \;3^0\,54' E.$$

Dieser Punkt liegt in Algerien.

Die Berechnung von $\bar{e}$ nach den Formeln (41) und (47) gestaltet sich nun wie folgt:

	$E-W$	$N-S$	$Z.$	
T_p	$4^s{,}4$	$4^s{,}4$	$4{,}^s4$	
T	23,2	23,2	13,7	
$u = \frac{T_p}{T}$	0,190	0,190	0,321	(Tabelle II)
$F(\xi_m)$	0,783	0,783	0,488	(Tab. XII S. 415)
y_m	0,55 mm	0,54 mm	0,95 mm	
$\log y_m$	$\bar{1}{,}7404$	$\bar{1}{,}7324$	$\bar{1}{,}9777$	
$\log' T_p$	$\bar{1}{,}3565$	$\bar{1}{,}3565$	$\bar{1}{,}3565$	
$\log C_1$	$\bar{2}{,}0371$	$\bar{3}{,}9904$	$\bar{3}{,}7389$	
$\log' F(\xi_m)$	0,1062	0,1062	0,3116	
$\log x_m$	$\bar{3}{,}2402$	$\bar{3}{,}1855$	$\bar{3}{,}3847$	
x_m	0,00174 mm	0,00153 mm	0,00242 mm.	

Digitized by Google

In μ ausgedrückt haben wir also

$$x_E = 1^{\mu},74$$
$$x_N = 1\ ,53$$
$$x_z = 2\ ,42$$
$$x_h = \sqrt{x_E^2 + x_N^2} = 2^{\mu},32.$$
$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{x_z}{x_h}.$$
$$\log x_z = 0,3838$$
$$\log' x_h = \bar{1},6345$$
$$\log \operatorname{tg} \bar{e} = 0,0183$$
$$\bar{e} = 46^{\circ}\,12'$$

für

$$\Delta = 3140 \text{ km}.$$

Wir berechnen nun t_m nach der Formel (42) für den Vertikalseismographen.

$u = 0,321$	$\log u = \bar{1},5065$
$\xi_m = 1,856$	$\log \xi_m = 0,2686$
$T = 13,7$	$\log T = 1,1367$
	$\log' 2\pi = \bar{1},2018$
	$\log t_m = 0,1136$
	$t_m = 1^s,3.$

t_m fällt in diesem Falle genau mit der Differenz der Momente des Maximums auf dem Seismogramm und des Anfanges der Bewegung (P) zusammen; ein Unterschied von einigen Zehnteln Sekunden ist hierbei zuzulassen.

Dieses Beispiel zeigt anschaulich, daß die Bestimmung des scheinbaren Emergenzwinkels $\bar{e}$ aus den Beobachtungen mit drei Seismographen keine Schwierigkeiten bietet.

Nach dieser Methode wurde das gesamte Beobachtungsmaterial in Pulkovo bearbeitet, wobei die Resultate der Berechnungen graphisch aufgetragen wurden. Längs der Abszissenachse waren die Epizentralentfernungen und längs der Ordinatenachse die zugehörigen Winkel $\bar{e}$ aufgetragen und durch eine Kurve verbunden.

Wenn auch keine genügend große Zahl von Beobachtungen hierbei zugrunde gelegt werden konnte, um zuverlässige Schlüsse aus denselben zu ziehen, so sind doch die erhaltenen Resultate von einigem Interesse.

In der folgenden Tabelle XIV sind die Größen des Winkels $\bar{e}$, die aus der erwähnten Kurve entnommen sind, mit den Zahlen Schlüters verglichen.

Digitized by Google

Tabelle XIV.

Δ	$\bar{e}$ nach Pulkovo	$\bar{e}$ nach Schlüter	Δ	$\bar{e}$ nach Pulkovo	$\bar{e}$ nach Schlüter
2000 km	—	29°—39° bei Δ = 2000—2100 km	8000 km	62°	69°
2500	48°	57	8500	65	73
3000	44	59	9000	67	75
3500	43	—	9500	68	—
4000	42	—	10000	70	—
4500	43	—	10500	71	—
5000	44	—	11000	72	—
5500	46	—	11500	72	78
6000	48	—	12000	73	—
6500	51	—	12500	73	—
7000	54	—	13000	74	—
7500	58	64			

Vergleicht man die aus den Beobachtungen in Pulkovo berechneten Werte für $\bar{e}$ mit den Größen e und $\bar{e}$ der Tabelle XIII, so sieht man, daß bei Δ = 2500—3000 km und von Δ = 8000 km an die Übereinstimmung der Werte befriedigend ist. Die Tabelle XIII weist jedoch darauf hin, daß e und $\bar{e}$ stetig mit Δ zunehmen, während die Pulkovoer Beobachtungen andeuten, daß der Winkel $\bar{e}$ bei etwa Δ = 4000 km durch ein Minimum von 42° geht.

Zurzeit läßt sich wegen Mangels an geeignetem Beobachtungsmaterial noch nicht mit Sicherheit behaupten, daß dieses Minimum reell ist und daß es nicht eine Folge der Ungenauigkeit der Beobachtungen und anderer zufälliger Einflüsse ist. Zweifellos kann die Größe des Winkels $\bar{e}$ durch die speziellen geologischen Verhältnisse, denen der Strahl auf seinem Wege begegnet, beeinflußt werden; ebenso kann die Richtung, aus der die seismische Welle kommt, von Einfluß sein. Es kann also auch möglich sein, daß es ein Gesetz für die Abhängigkeit des Winkels e von Δ gar nicht gibt, und daß man jeden in der Praxis vorkommenden Fall einzeln behandeln muß. Man kann aber von einer mittleren Abhängigkeit $\bar{e}$ von Δ reden; auch die Zahlen der Tabelle stellen ja eine mittlere Abhängigkeit dar. Nur sorgfältige Beobachtungen über den scheinbaren Emergenzwinkel können diesen neuen Weg zur Erforschung der geologischen Eigentümlichkeiten des inneren Baues des Erdkörpers eröffnen. Die Fortführung solcher Untersuchungen muß daher als sehr wichtig bezeichnet werden.

Die oben beschriebene Methode der Bestimmung des Winkels $\bar{e}$ leidet nun an einigen wesentlichen Mängeln.

Zunächst setzt die Formel (41), die zur Bestimmung von x_m dient, voraus, daß die erste einfallende longitudinale seismische Welle genau dem Gesetze der harmonischen Schwingungen Genüge leistet.

Weiter erfordert die Bestimmung der Projektionen der maximalen Bodenverschiebungen in allen drei Koordinatenrichtungen eine vorläufige Berechnung der Funktion $F(\xi_m)$.

Digitized by Google

Schließlich ist bei der Berechnung von $F(\xi_m)$ die genaue Kenntnis der Periode der entsprechenden seismischen Welle T_p zur Bestimmung von u nötig. Hierbei ist die Feststellung von T_p in der Nähe der ersten Phase P, wo die harmonische Bewegung des Apparates noch nicht stattfindet und die Anfangsbedingungen der Bewegung noch von Einfluß sind, bisweilen sehr schwer, ganz abgesehen davon, daß bei P keine einfache seismische Welle, sondern eine Superposition zweier oder mehrerer Wellen mit verschiedenen Perioden T_p vorkommen kann.

Man kann jedoch eine Methode zur Bestimmung des scheinbaren Emergenzwinkels $\bar{e}$ angeben, die die angeführten Mängel nicht hat und sowohl unabhängig von jeglichen Voraussetzungen über den Charakter der Bodenbewegung ist, als auch die Bestimmung von T_p und die Berechnung von $F(\xi_m)$ nicht erfordert.

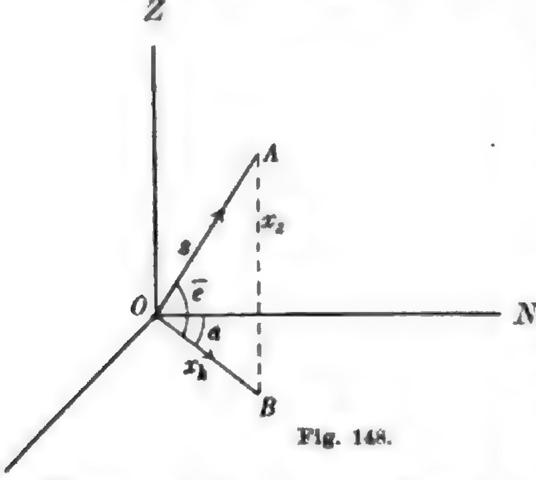


Fig. 148.

Zur Darstellung dieser Methode wollen wir nun übergehen.

Wir setzen dazu voraus, daß wiederum alle drei Seismographen — zwei horizontale und ein vertikaler — genau auf die Grenze der Aperiodizität ($\mu^2 = 0$) eingestellt sind und daß sie alle dieselbe Eigenperiode T haben, die genau gleich der Periode T_1 der zugehörigen Galvanometer ist.

Die absolute Verschiebung eines Elementes der Erdoberfläche im Moment t sei s, wobei s eine willkürliche Funktion von t ist.

$$s = f(t). \tag{51}$$

Der Winkel, den die Richtung s mit dem Horizont im Beobachtungsort bildet, sei $\bar{e}$, und der Winkel, den die Ebene, welche durch s und die Lotlinie geht, mit der Meridianebene einschließt, also das Azimut, sei α, vgl. Fig. 148.

Die Projektion von s auf die Richtung des Meridians (nach N) bezeichnen wir mit x_N, die auf die Richtung des ersten Vertikals (nach E) mit x_E und die vertikale Projektion (nach z) mit x_z.

Dann ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} x_N &= s\cos\bar{e}\cos\alpha \\ x_E &= s\cos\bar{e}\sin\alpha \\ x_z &= s\sin\bar{e} \end{aligned}\right\}. \tag{52}$$

Die totale horizontale Bodenverschiebung ist

$$x_h = \sqrt{x_N^2 + x_E^2}. \tag{53}$$

Wir wollen nun die Bewegung eines Galvanometers, z. B. desjenigen, mit dem die N—S-Komponente des registrierenden Seismographen gekoppelt ist, betrachten.

Digitized by Google

Auf Grund der Voraussetzungen erhalten wir folgende zwei Differentialgleichungen

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2n\frac{d\theta}{dt} + n^2\theta + \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2} = 0 \tag{54}$$

und

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 2n\frac{d\varphi}{dt} + n^2\varphi + k\frac{d\theta}{dt} = 0, \tag{55}$$

wo θ der Winkelausschlag des Pendels, φ der entsprechende Winkelausschlag des Galvanometers und

$$n = \frac{2\pi}{T} \tag{56}$$

ist; n ist für alle drei Apparate dasselbe.

Wir führen nun eine neue Variable ein:

$$\xi = nt, \tag{57}$$

dann wird

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\theta}{d\xi} \cdot n,$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2\theta}{d\xi^2} \cdot n^2,$$

und unsere Differentialgleichungen erhalten folgende Gestalt:

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2\frac{d\theta}{d\xi} + \theta + \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha\frac{d^2s}{dt^2} \cdot \frac{1}{n^2} = 0 \tag{58}$$

und

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi + \frac{k}{n} \cdot \frac{d\theta}{d\xi} = 0. \tag{59}$$

Führen wir nun folgende Bezeichnung ein

$$\frac{1}{n^2} \cdot \frac{d^2s}{dt^2} = -\Phi(\xi, n), \tag{60}$$

dann kann die Gleichung (58) folgendermaßen geschrieben werden

$$\frac{d^2\theta}{d\xi^2} + 2\frac{d\theta}{d\xi} + \theta = \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \Phi(\xi, n). \tag{61}$$

Auf Grund der Formeln (70) und (77) des § 3 Kapitel VII lautet das allgemeine Integral dieser Gleichung

$$\theta = e^{-\xi}[\Gamma_1 + \Gamma_2\xi] - \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \psi(\xi, n), \tag{62}$$

wo

$$\psi(\xi, n) = e^{-\xi}\left[\int \xi e^{\xi}\Phi(\xi, n)d\xi - \xi\int e^{\xi}\Phi(\xi, n)d\xi\right] \tag{63}$$

ist. Zur Bestimmung der Konstanten Γ_1 und Γ_2 dienen die Anfangsbedingungen der Bewegung.

Digitized by Google

Für $t = 0$ oder $\xi = 0$ ist $\theta_0 = 0$ und auf Grund der Gleichungen (54) und (57)

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{t=0} = \left(\frac{d\theta}{d\xi}\right)_{\xi=0} \cdot n = -\frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0}.$$

Wir erhalten folglich

$$0 = \Gamma_1 - \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \psi(o, n)$$

und

$$-\frac{1}{l}\cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \frac{1}{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} = -\Gamma_1 + \Gamma_2 - \frac{1}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha\left[\frac{d\psi(\xi, n)}{d\xi}\right]_{\xi=0}$$

oder

$$\Gamma_1 = \frac{1}{l}\cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \psi(o, n)$$

und

$$\Gamma_2 = \frac{1}{l}\cos\bar{e}\cos\alpha\left[\psi(o, n) - \frac{1}{n}\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=0} + \left(\frac{d\psi(\xi, n)}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right].$$

Es kann also θ durch eine Funktion der folgenden Gestalt ausgedrückt werden:

$$\theta = \frac{1}{l}\cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \chi(\xi, n). \tag{64}$$

Wenden wir uns nun zur Differentialgleichung (59)

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} + 2\frac{d\varphi}{d\xi} + \varphi = \frac{k}{l}\cos\bar{e}\cos\alpha \cdot \Omega(\xi, n), \tag{65}$$

wo

$$\Omega(\xi, n) = -\frac{1}{n} \cdot \frac{d\chi(\xi, n)}{d\xi} \tag{66}$$

ist. Behandelt man die Gleichung (65) in derselben Weise wie (61) und berücksichtigt, daß die Anfangsbedingungen für φ die folgenden sind,

$$\text{für } t = 0 \text{ oder } \xi = 0 \text{ ist } \varphi = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\xi} \cdot n = 0,$$

so kann φ schließlich in folgender Form ausgedrückt werden:

$$\varphi = \frac{k}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha \cdot F(\xi, n). \tag{67}$$

Das erste Maximum für φ, nämlich φ_m, läßt sich aus der Bedingung

$$\frac{dF(\xi, n)}{d\xi} = 0 \tag{68}$$

bestimmen.

Bezeichnen wir die entsprechende Wurzel dieser Gleichung mit ξ_m, so ergibt sich

$$\varphi_m = \frac{k}{l} \cdot \cos\bar{e}\cos\alpha \cdot F(\xi_m, n).$$

Ist A_1 wie zuvor die Entfernung des Spiegels am Galvanometer von der Fläche der Registriertrommel in der Richtung des normal einfallenden

Digitized by Google

Strahles, y_m der dem Winkelausschlag φ_m des Galvanometers entsprechende Ausschlag des Lichtpunktes auf der Trommel, so ist

$$y_m = 2 A_1 \varphi_m$$

oder

$$y_m = \frac{k A_1}{l} \cdot \cos \bar{e} \cos \alpha \cdot 2 F(\xi_m, n). \tag{69}$$

Bezeichnet man nun die ersten maximalen Ausschläge der drei Seismographen in gleicher Weise wie ihre Konstanten mit den Indizes N, E und z, so ergibt sich

$$y_N = \left(\frac{k A_1}{l}\right)_N \cos \bar{e} \cos \alpha \cdot 2 F(\xi_m, n)$$

$$y_E = \left(\frac{k A_1}{l}\right)_E \cos \bar{e} \sin \alpha \cdot 2 F(\xi_m, n)$$

$$y_z = \left(\frac{k A_1}{l}\right)_z \sin \bar{e} \cdot 2 F(\xi_m, n).$$

Da $F(\xi_m, n)$ für alle drei Seismographen denselben Zahlenwert hat, so haben wir

$$\cos \bar{e} = \frac{1}{2 F(\xi_m, n)} \sqrt{\left(\frac{l}{k A_1}\right)_N^2 y_N^2 + \left(\frac{l}{k A_1}\right)_E^2 y_E^2}$$

und

$$\sin \bar{e} = \frac{1}{2 F(\xi_m, n)} \cdot \left(\frac{l}{k A_1}\right)_z y_z$$

und schließlich

$$\operatorname{tg} \bar{e} = \frac{\left(\frac{l}{k A_1}\right)_z y_z}{\sqrt{\left(\frac{l}{k A_1}\right)_N^2 y_N^2 + \left(\frac{l}{k A_1}\right)_E^2 y_E^2}}. \tag{70}$$

Nach dieser letzten Formel kann man den scheinbaren Emergenzwinkel $\bar{e}$ für willkürliche Werte der Funktion $s = f(t)$ berechnen.

Die Berechnung der Funktion $F(\xi_m, n)$ fällt bei dieser Methode fort, außerdem können die Pendelkonstanten l, k und A verschiedene Werte haben. Eins wird hier jedoch vorausgesetzt, daß nämlich die Eigenperioden T ohne Dämpfung bei allen drei Seismographen untereinander und der Periode T_1 gleich sind und daß alle drei Apparate auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt sind.

Diese Methode ist bisher in der Praxis noch nicht angewandt worden, sie wird jedoch zweifellos als theoretisch sicher begründet zuverlässige Resultate ergeben.

§ 3. Bestimmung der Schwingungsebene der Bodenteilchen in den transversalen Wellen der zweiten Vorphase.

Die in den zwei ersten Paragraphen vorgeführten Methoden der Bestimmung der absoluten Verschiebung eines Bodenteilchens beim Einsatz der longitudinalen seismischen Wellen, nämlich die Bestimmung des Azimuts

Digitized by Google

α und des scheinbaren Emergenzwinkels $\bar{e}$, können unmittelbar auf die erste transversale Welle der zweiten Vorphase S angewandt werden. Es bietet sich hierbei die Möglichkeit, die Frage nach der Lage der Schwingungsebene der Bodenteilchen in der transversalen elastischen Welle im Moment ihres Auftreffens auf die Erdoberfläche zu lösen.

In der Fig. 149 bedeutet E das Epizentrum des Bebens, B den Beobachtungsort und ELB die Bahn der seismischen Strahlen.

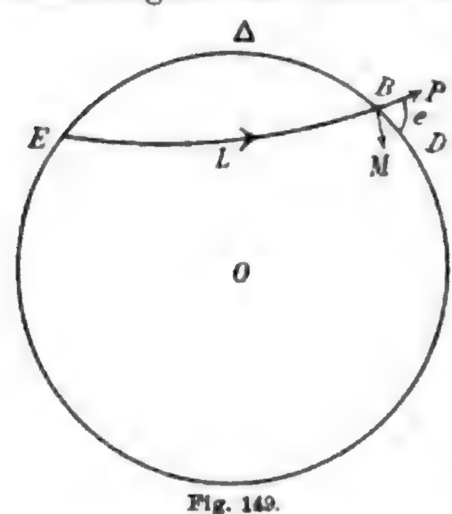


Fig. 149.

Der Winkel PBD, den die im Durchschnittspunkte mit der Erdoberfläche an die Bahn des Strahles gezogene Tangente mit dem Horizonte bildet, ist der wahre Emergenzwinkel e.

Die Richtung BM der Schwingungen der Bodenteilchen in der transversalen Welle ist senkrecht zu BP; Schwingungsebene nennen wir die Ebene, welche durch PB und BM geht.

Nach Analogie der Optik können wir der Neumannschen Theorie entsprechend diese Ebene als Polarisationsebene der transversalen seismischen Strahlen bezeichnen.

Es ist nun sehr interessant, die Größe des Winkels β zwischen dieser Polarisationsebene und der Ebene des größten Kreises, der durch das Epizentrum und den Beobachtungsort hindurchgeht, zu bestimmen.

Würde der Erdkörper aus völlig homogenen konzentrischen Schichten bestehen, deren physikalische Eigenschaften nur von der Entfernung vom Erdzentrum abhängig sind, so könnte man aus Symmetriegründen erwarten, daß der Winkel β gleich 0° oder gleich 90° wäre, d. h. daß die Schwingungen der Teilchen entweder in der Ebene des größten Kreises EOB, oder senkrecht zu ihr erfolgen. Die Abweichung der wahren Größe β von diesen theoretischen Grenzwerten kann uns interessante Hinweisungen auf die Unregelmäßigkeit der Anordnung der oberen Erdschichten geben.

Zur Bestimmung des Winkels β braucht man nur das Azimut der Verschiebung eines Bodenteilchens im Momente des Einsatzes der transversalen seismischen Wellen zu kennen. Dasselbe bezeichnen wir mit α_s. Dieses läßt sich in gleicher Weise bestimmen wie das Azimut α der ersten longitudinalen Wellen P. Im folgenden werden wir die Winkel α und α_s von N über E, S und W von 0° bis 360° zählen. Den wahren Emergenzwinkel für P bezeichnen wir mit e.

Wir führen im folgenden statt e den Winkel

$$i = 90 - e$$

ein, d. h. den Winkel, den die Tangente zur Bahn der seismischen Strahlen im Punkte B mit der Richtung nach dem Zenith bildet. Für die Wellen der zweiten Vorphase bezeichnen wir den entsprechenden Winkel mit i_s.

Der Winkel $e_s = 90^\circ - i_s$ entspricht etwa dem Winkel e für die longitudinalen Wellen; in Wirklichkeit bezeichnet er aber den Winkel, welchen

Digitized by Google

die Richtung der wahren Bodenverschiebung mit dem Horizonte beim Einsatz der Wellen S gebildet hätte, wenn an der Erdoberfläche keine Umwandlungen der seismischen Energie vor sich gegangen wären. In der Praxis können wir aber ebenso wie für die longitudinalen Wellen den wahren Wert des Winkels e aus den Beobachtungen nicht bestimmen; hat man aber die absoluten Werte der Projektionen der Bodenverschiebung in den drei Koordinatenrichtungen ermittelt, so kann man den scheinbaren Winkel $\bar{e}_s$ nach der oben beschriebenen Methode berechnen.

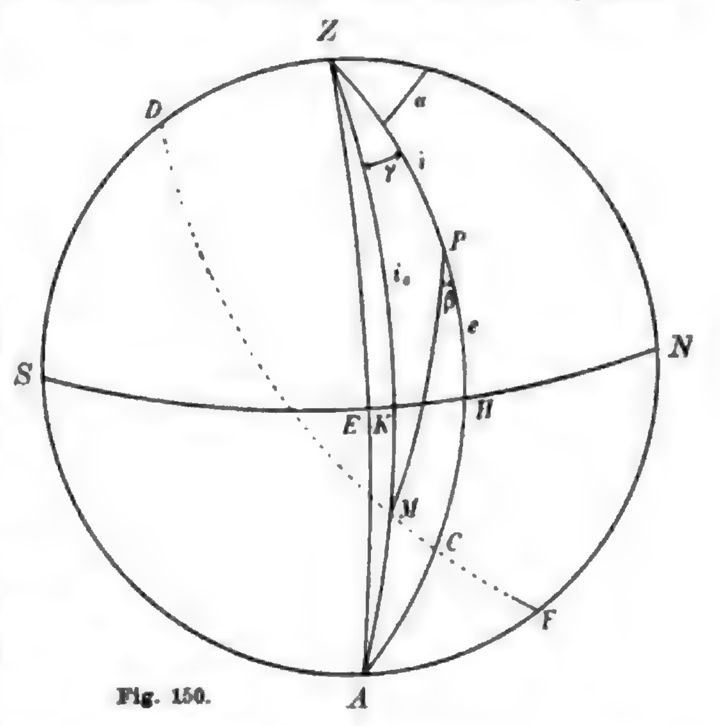


Fig. 150.

Wir wollen nun die Abhängigkeit zwischen dem gesuchten Winkel β und dem Azimut α aufsuchen.

In Fig. 150 bedeutet der Punkt Z die Richtung nach dem Zenith des Beobachtungsortes B (Fig. 149), N die Richtung nach Norden und E die nach Osten. Der größte Kreis NES stellt den Horizont dar.

Der Punkt P entspricht der Richtung der Tangente zur Trajektorie des seismischen Strahles im Schnittpunkte mit der Erdoberfläche; der Bogen NH, der dem Winkel NZH entspricht, ist das Azimut der Bodenverschiebung beim ersten Einsatz der longitudinalen Wellen, der Bogen $PH = e$ ist der entsprechende wahre Emergenzwinkel. Es ist also der Bogen

$$ZP = i = 90 - e.$$

Die Richtung der Schwingungen der Bodenteilchen in der transversalen Welle muß senkrecht zur Richtung P sein, folglich liegt sie irgendwo in der Ebene des größten Kreises DMF, der einen Abstand von 90^0 vom Punkte P hat.

Die gesuchte Richtung der Schwingungen möge mit M zusammenfallen.

Das entsprechende Azimut α_s wird durch den Bogen NK, der gleich dem Winkel NZK ist, ausgedrückt.

Den Winkel α_s können wir aus den Beobachtungen nach derselben Methode, der wir uns zur Bestimmung von α bedient haben, ermitteln. Dazu sind nur die ersten maximalen Ausschläge des Lichtpunktes auf den Seismogrammen für die E—W- und N—S-Komponenten nach dem Einsatz der ersten transversalen Wellen zu messen.

Den Winkel PZM, der gleich der Differenz von α_s und α ist, bezeichnen wir mit γ

$$\gamma = \alpha_s - \alpha. \tag{71}$$

Digitized by Google

Die Lage der gesuchten Polarisationsebene läßt sich durch die Lage der Ebene, welche durch die Richtungen PM geht, bestimmen; in Fig. 150 ist das der Kreisbogen PM. Die Ebene des größten Kreises, der durch das Epizentrum und den Beobachtungsort geht, die wir zur Abkürzung die Hauptebene nennen werden und in der die Richtung BP (Fig. 149) liegt, ist in Fig. 150 durch den Bogen des großen Kreises ZPH dargestellt.

Also ist der gesuchte Winkel β, welcher von der Polarisationsebene der transversalen Wellen mit der Hauptebene gebildet wird, durch den Winkel MPH dargestellt.

Der Bogen ZM ist dieselbe Größe, die wir früher mit i_s bezeichnet haben.

Aus dem sphärischen Dreieck MZP, in welchem $PM = 90^0$ ist, erhalten wir folgende zwei Beziehungen:

$$\cos i_s = -\sin i \cdot \cos \beta \tag{72}$$

$$0 = \cos i_s \cdot \cos i + \sin i_s \sin i \cos \gamma. \tag{73}$$

Aus der Formel (73) folgt

$$\cos^2 i_s \cos^2 i = \sin^2 i \cos^2 \gamma \cdot (1 - \cos^2 i_s)$$

oder

$$\cos^2 i_s [\cos^2 i + \sin^2 i \cos^2 \gamma] = \sin^2 i \cos^2 \gamma,$$

oder noch

$$\cos^2 i_s = \frac{\sin^2 i \cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2 \gamma}.$$

Hieraus finden wir

$$\cos i_s = -\frac{\sin i \cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2 \gamma}}. \tag{74}$$

Aus der Figur folgt, daß man in dem vorigen Ausdruck der Wurzel das Minuszeichen geben muß, denn wenn $\gamma = 0$ ist, so fällt M mit C zusammen und es ist $i_s = 90^0 + i$.

Setzen wir Formel (72) und (74) einander gleich, so folgt

$$\cos \beta = \frac{\cos \gamma}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2 \gamma}}. \tag{75}$$

Hieraus finden wir

$$\sin^2 \beta = 1 - \frac{\cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 i \sin^2 \gamma}$$

$$= \frac{1 - \sin^2 i \sin^2 \gamma - \cos^2 \gamma}{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2 \gamma}$$

oder

$$\sin \beta = \frac{\sin \gamma \cos i}{\sqrt{1 - \sin^2 i \cdot \sin^2 \gamma}}. \tag{76}$$

Dividiert man den Ausdruck (76) durch (75), so ergibt sich schließlich der einfache Ausdruck

$$\operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \gamma \cdot \cos i. \tag{77}$$

Mit Hilfe der Formel (77) kann man also mit dem aus den Beobachtungen bestimmten Winkel γ den gesuchten Winkel β ermitteln. Allerdings

Digitized by Google

müssen wir dazu noch den Winkel i kennen, der sich, wie wir früher gesehen haben, für nicht zu kleine Epizentralentfernungen Δ sehr wenig von dem scheinbaren Winkel $\bar{i} = 90^0 - \bar{e}$, den man unmittelbar aus den Beobachtungen erhalten kann, unterscheidet.

Man könnte für die Berechnung von s übrigens auch die Werte des Winkels i, welche aus den Laufzeitkurven abgeleitet worden sind, benutzen.

Kennt man nun β und i, so kann man nach der Formel (72) auch den wahren Winkel i_s berechnen und ihn mit dem scheinbaren Winkel $\bar{i}_s = 90^0 - \bar{e}_s$, der aus den Beobachtungen der absoluten Größen der Projektionen der maximalen Bodenverschiebungen nach dem Einsatz der transversalen Wellen der zweiten Vorphase S abgeleitet werden kann, vergleichen.

Bei diesen Berechnungen muß man folgendes berücksichtigen.

Wenn das Seismogramm des Vertikalseismometers zeigt, daß die erste Bodenbewegung bei P nach unten gerichtet war, so muß man $i = 90^0 + \bar{e}$ setzen, da wir unter α das unmittelbar gemessene Azimut der Bodenverschiebung in der ersten Vorphase P verstehen.

Außerdem muß man bei der Berechnung von i_s nach der Formel (72) darauf achten, welchem Quadranten der Winkel β entspricht, worauf die Zeichen vor $\sin\beta$ und $\cos\beta$ in den Formeln (75) und (76) hinweisen.

Im endgültigen Resultat hat man die Werte des Winkels β in den Grenzen von -90^0 bis zu $+90^0$ anzugeben.

Zur Erläuterung führen wir hier zwei Zahlenbeispiele an, die den Beobachtungen in Pulkovo entnommen sind.

Beben am 14. August 1909.

Das Epizentrum lag in der Nähe von Kioto in Japan. Die erste Welle war eine Dilatationswelle.

Die Bodenverschiebung erfolgte bei $P: NE - 59^0 52'$

" " " " $S: SW - 40 \quad 8$

$$\gamma = +160^0 16'$$

$$\Delta = 7430 \text{ km.}$$

Dieser Epizentralentfernung entspricht nach der früher angeführten Tabelle XIV (S. 433) der Winkel $\bar{e} = 57^0$.

Nehmen wir an, daß

$$\bar{e} = e$$

sei. Dann ist, da die erste Welle eine Dilatationswelle war,

$$i = 147^0.$$

Hieraus finden wir, daß

$$\sin\beta < 0 \quad \text{und} \quad \cos\beta < 0$$

ist, es ist folglich nach den oben abgeleiteten Formeln mit Abrundung bis auf 1^0

$$\beta = 17^0 \ (+180^0)$$

und

$$i_s = 59^0.$$

Digitized by Google

Beben am 7. Juni 1910.

Das Epizentrum lag bei Calitri in Süditalien. Die erste Welle war eine Kondensationswelle.

Die Bodenverschiebung erfolgte bei $P: NE - 36^0\ 1'$
" " " " $S: SE - 28\ 15$

$$\gamma = 115^0 44'$$

$$\Delta = 2330 \text{ km}$$

$$\bar{e} = e = 49^0$$

$$i = 41^0.$$

$$\sin\beta > 0 \qquad \cos\beta < 0$$

$$\beta = 123^0 \quad (\text{oder } -57^0)$$

$$i_s = 69^0.$$

In der folgenden Tabelle XV sind die Größen des Winkels β, der die Lage der Polarisationsebene der transversalen Wellen charakterisiert, für verschiedene Beben angeführt.

Tabelle XV.

Datum	Δ	Azimut nach dem Epizentrum	Angenäherte Lage des Epizentrums	Charakter der Bebenwelle	β
29./X. 1909	2090 km	$SW - 6^0 51'$	Konstantinopel	Kond.	-57^0
18./II. 1911	2260	$SW - 22\ 53$	Monastir	Dil.	$+83$
7./VI. 1910	2330	$SW - 36\ 1$	Calitri (Italien)	Kond.	-57
18./II. 1910	2580	$SW - 14\ 21$	Kreta	Kond.	-78
11./V. 1910	3400	$SE - 72\ 44$	Turkestan	Kond.	-58
1./I. 1911	3440	$SE - 77\ 49$	Ost-Turkestan	Dil.	$+22$
1./I. 1911	3460	$SE - 55\ 24$	in der Nähe von Nord-Afganistan	Dil.	$+55$
12./VII. 1910	3840	$SE - 63\ 58$	Nord-Afganistan	Kond.	-84
17./VIII. 1910	4430	$SE - 55\ 13$	Nord-Beludschistan	Kond.	$+17$
17./VII. 1910	5800	$NE - 39\ 33$	Ochotskisches Meer	Dil.	$+21$
22./V. 1910	7200	$NE - 47\ 5$	Jesso	Kond.	-13
10./XI. 1909	7200	$NE - 60\ 54$	Süd-Japan	Kond.	-33
12./II. 1910	7260	$NE - 62\ 25$	Süd-Japan	Dil.	-36
14./VIII. 1909	7430	$NE - 59\ 52$	Kioto	Dil.	$+17$
9./IX. 1910	7470	$NE - 35\ 39$	Kurilen	Kond.	-47
11.—12./IV. 1910	7580	$NE - 73\ 13$	Formosa	Dil.	-77
10./IX. 1910	7710	$NE - 57\ 8$	Nippon	Dil.	-20
1./IX. 1910	7770	$NE - 77\ 38$	Formosa	Kond.	-9
13./V. 1911	8270	$NE - 75\ 17$	nicht weit von Formosa	Kond.	-41
9./XII. 1909	8410	$NE - 61\ 30$	im Süden von Japan	Dil.	$+3$
5./VIII. 1910	8540	$NW - 25\ 20$	in d. Nähe v. Kalifornien	Dil.	-80
31./V. 1910	9440	$NW - 51\ 6$	Mexikanischer Busen	Kond.	$+15$
7. VI. 1911	10050	$NW - 47\ 43$	Mexiko	Kond.	$+8$

Digitized by Google

Die Tabelle zeigt, daß für kleine Epizentralentfernungen Δ der Winkel β ziemlich groß ist, wobei er in weiten Grenzen variiert.

Von $\Delta = 4430$ km an wird β mit wenigen Ausnahmen erheblich kleiner.

Die Größe des Winkels β muß zweifellos von den geologischen Eigentümlichkeiten des Bodens sowohl am Beobachtungsort wie im Epizentralgebiet beeinflußt werden, und es ergeben sich daher für β für verschiedene Orte sehr verschiedene Werte.

Liegen aber die Epizentren von zwei Beben sehr nahe beieinander, so ergibt sich der Winkel β fast gleich. Als Beispiel hierfür können die beiden Beben in Japan am 10. November 1909 und am 12. Februar 1910 dienen.

Für geringe Epizentralentfernungen, wenn also der bedeutendste Teil der Bahn des seismischen Strahles in die obersten Erdschichten fällt, kann man große Schwankungen in den Werten des Winkels β erwarten, was auch durch die Beobachtungen der seismischen Station in Pulkovo bestätigt wird.

Eine systematische Untersuchung des Winkels β ist mit den Seismometern neuester Art noch nicht ausgeführt worden, sondern bleibt noch der Zukunft vorbehalten.

§ 4. Bestimmung der Bodenverschiebungen in der Maximalphase eines Bebens und bei der mikroseismischen Unruhe.

Bei Fernbeben tritt auf dem Seismogramm nach dem Einsatz der langen Oberflächenwellen gut ausgeprägt die sogenannte Maximalphase des Bebens ein, in der die Ausschläge die größten sind und die Kurve an einigen Stellen einen ziemlich regelmäßigen sinusartigen Charakter hat; die Registrierungen sind hier ebenfalls auszumessen.

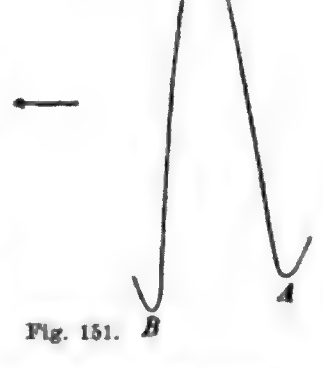


Fig. 151.

Zunächst ist aber die Zeit des Anfanges der langen Wellen L zu bestimmen, was jedoch nicht immer genau möglich ist, da ihr Einsatz oft undeutlich ist; man beschränkt sich daher bei der Bestimmung von L auf die Zehntel-Minute.

Das Seismogramm des Bebens in Kleinasien am 9. Februar 1909, das in Fig. 25 reproduziert ist, stellt ein charakteristisches Diagramm eines Fernbebens dar, bei dem die verschiedenen Phasen — P, S, L und M (Maxima) — besonders deutlich ausgeprägt sind.

Bei der Bestimmung der maximalen Bodenverschiebung x_m, die irgendeinem Maximum M auf dem Seismogramm entspricht, ist zu beachten, daß der entsprechende Teil der Kurve selten eine regelmäßige Sinuslinie darstellt, sondern es liegen meistenteils die benachbarten Scheitel A und B der Kurven (Fig. 151) in verschiedenen Entfernungen von der Nullinie. Man mißt daher bei der Bestimmung von y_m aus dem Seismogramm die Ordinaten der Punkte M und A und M und B und bildet aus diesen Größen das Mittel, das also die doppelte Amplitude $2y_m$ angibt, die das Maximum M aufweist.

Digitized by Google

Der Moment, welcher dem Punkte M entspricht, und die Periode der Welle T_p werden aus dem Seismogramm entnommen, was mit Hilfe der Minutenmarken in der Kurve leicht auszuführen ist. Bei der Bestimmung des wahren Momentes t_m muß man natürlich die Uhrkorrektion berücksichtigen. Die Zeit wird ausgedrückt in mittlerer Greenwicher Zeit von 0 bis 24 Stunden, gezählt von Mitternacht bis zur Mitternacht. T_p soll möglichst bis auf 0,1 Sekunde und t_m bis auf 1 Sekunde genau gemessen werden.

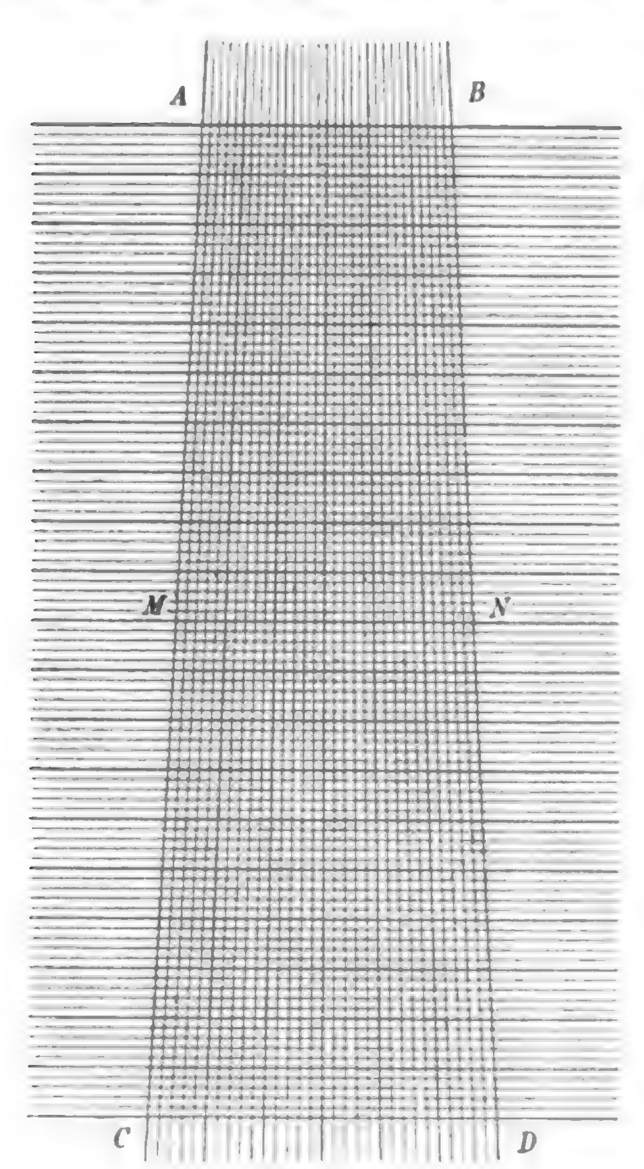


Fig. 152.

Wenn die betreffende Kurve keine Zeitmarken hat, so kann man die Zeitmarken auf der benachbarten Kurve desselben Seismogramms benutzen, muß dabei aber die Parallaxe der Lichtpunkte berücksichtigen. Diese Parallaxe läßt sich beim Papierwechsel durch Vorschieben eines Schirmes vor die Lichtquelle, wodurch die beiden Kurven plötzlich unterbrochen werden, leicht bestimmen.

Für die Bestimmung von y_m, T_p und t_m aus dem Seismogramm bedient man sich am bequemsten eines Koordinatennetzglases, das in Quadratmillimeter eingeteilt ist, und bei dem die Höhe und Breite des Netzes etwa 20 cm beträgt. Die Kurven werden mit einer Lupe betrachtet und die Zehntel des Millimeters geschätzt.

Wird jedoch eine besondere Genauigkeit der Messungen verlangt, so benutzt man mit Vorteil einen besonderen Apparat, der für Messungen in rechtwinkligen Koordinaten bestimmt ist und bei dem die Kurven unter einem Mikroskop betrachtet werden. Dieser Apparat gestattet die Hundertstel des Millimeters zu bestimmen.

Für die Bestimmung von T_p kann mit Vorteil ein besonderer Glasmaßstab dienen, den Fig. 152 darstellt. Er besteht aus einer Reihe horizontaler Linien, wie AB, MN und CD, die im Abstande eines Millimeters voneinander aufgetragen sind. Diese Linien werden von geneigten Linien AC und BD durchschnitten und bilden mit den horizontalen Linien eine Reihe von Quadraten, deren Zahl in horizontaler Richtung 30 beträgt. Der Abstand zwischen den äußersten geneigten Linien AC und BD beträgt

Digitized by Google

für eine mittlere Registriergeschwindigkeit von 30 mm pro Sekunde oben 25 mm und unten 35 mm.

Zur Bestimmung der Periode der seismischen Welle T_p verfährt man folgendermaßen.

Man stellt zuerst durch Verschieben der Platte nach oben oder unten die zwei äußersten Linien AC und BD auf zwei benachbarte Minutenmarken auf der Zeitachse ein und merkt sich den entsprechenden Horizontalstrich. Es sei die Linie MN.

Alsdann legt man die Linie MN an zwei benachbarte Scheitel der Kurve A und B (Fig. 151) an.

Sind A und B nicht gleich weit von der Zeitachse entfernt, ist aber der Unterschied nicht groß, so legt man MN in die Mitte zwischen A und B und zählt dann die Zahl der vertikalen Striche, die längs der Linie MN zwischen A und B sich befinden; die Zehntel liest man nach dem Augenmaß ab. Multipliziert man die erhaltene Zahl mit 2, so erhält man direkt die gesuchte Periode in Sekunden.

Dieses Verfahren ist besonders bequem bei der Bestimmung der Periode T_p bei der mikroseismischen Bewegung 1. Art, bei der gewöhnlich auf dem Seismogramm eine Reihe aufeinander folgender regelmäßiger Wellen auftritt. In diesem Falle braucht man nur die Zahl der Teile und der Zehntel auf der Linie MN abzulesen, die zwei volle Wellen umfassen, wodurch dann das Multiplizieren mit 2 wegfällt und die erhaltene Zahl direkt die gewünschte Periode T_p liefert.

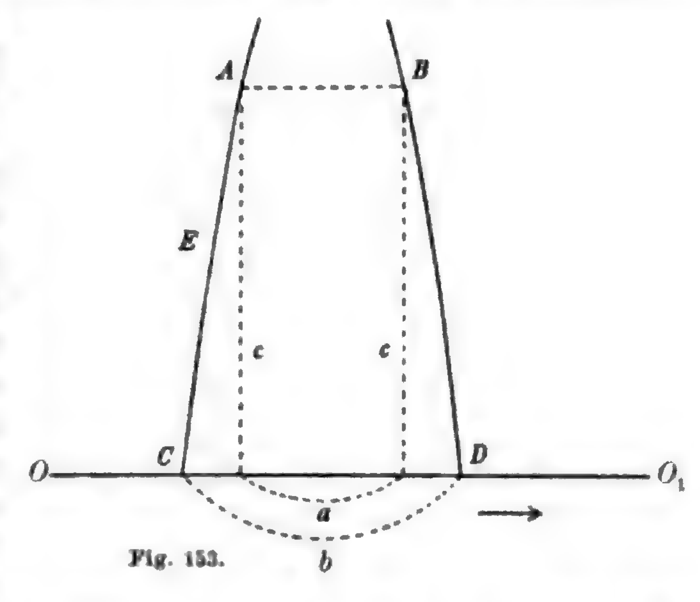


Fig. 153.

Bei der Bestimmung von M aus dem Seismogramm ist zu bemerken, auf welcher Seite der Zeitachse der Punkt M liegt. Der Bequemlichkeit halber reguliert man die Seismographen so, daß die Verschiebung des Lichtpunktes in den Seismogrammen nach oben einer Bodenverschiebung nach N, nach E oder nach dem Zenit entspricht. Man gibt diesen Richtungen das Vorzeichen +, den nach S, W und nach unten das Vorzeichen —.

Diese Messungen müssen natürlich für alle drei Projektionen der Bodenverschiebung ausgeführt werden; man beschränkt sich dabei aber nicht nur auf Teile der Kurve, wo die Ausschläge in der Maximalphase die größten sind, sondern mißt möglichst alle die Stellen der Maximalphase aus, wo die Bewegung einen regelmäßigen sinusartigen Charakter aufweist.

Bei starken Beben kommt es besonders bei Anwendung der galvanometrischen Registriermethode zuweilen vor, daß die Ausschläge des Galvanometers so groß werden, daß der Lichtstrahl über den Rand der Zylinder-

Digitized by Google

linse, die vor der Registriertrommel angebracht ist, hinausgeht und daß dadurch die Kurve abgeschnitten wird, wie es Fig. 153 zeigt; OO_1 ist hier die Zeitachse.

Die maximale Amplitude y_m kann hier also nicht unmittelbar gemessen werden, man kann sie jedoch durch Extrapolation bestimmen. Dazu wählt man irgend zwei Punkte z. B. A und B in gleicher Entfernung c von der Achse OO_1 und bestimmt mit dem Koordinatennetz die Größen c, $AB = a$ und $CD = b$. Ist die entsprechende Kurve ein Teil einer regelmäßigen Sinuslinie, so kann mit diesen Größen die gesuchte maximale Amplitude y_m berechnet werden.

Nimmt man nämlich in C den Koordinatenanfang an und bezeichnet die Abszisse irgendeines willkürlichen Punktes E mit ξ und die entsprechende Ordinate mit y, so kann die Gleichung der Kurve durch folgende Funktion ausgedrückt werden:

$$y = y_m \cdot \sin \pi \frac{\xi}{b} \cdot \tag{78}$$

Die Abszisse des Punktes A sei ξ_1, dann ergibt sich

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2}(b - a)$$

$$c = y_m \, . \sin \left\{ \frac{\pi}{2} \cdot \frac{b-a}{b} \right\} .$$

Hieraus finden wir

$$y_m = \frac{c}{\sin \left\{ \frac{b-a}{b} \cdot \frac{\pi}{2} \right\}} \cdot \tag{79}$$

Die Extrapolation ist jedoch nur dann anwendbar, wenn die betreffende Kurve sich wenig von einer Sinuslinie unterscheidet; außerdem darf man natürlich mit der Extrapolation nicht zu weit gehen.

Man kann die Sicherheit der Extrapolation verbessern, wenn man mehrere Punkte wie A und B nimmt und aus den so erhaltenen Größen y_m das Mittel bildet. Die Erfahrung zeigt, daß dieses Verfahren zu befriedigenden Resultaten führt, wie aus nebenstehender Tabelle XVI hervorgeht; sie gibt die Resultate der Extrapolation für sechs verschiedene Maxima, die aus der Aufzeichnung des Messinabebens am 26.—27. März 1908 abgeleitet worden sind.

Die Übereinstimmung der einzelnen Größen y_m für dasselbe Maximum kann man als befriedigend betrachten, und zwar um so mehr, als die y_m sehr groß sind, ein Fehler von einigen Millimetern für y_m also von keiner Bedeutung ist.

Hat man die Größen y_m, T_p und t_m aus dem Seismogramm entnommen, so kann man die Berechnung der absoluten Größe der entsprechenden Amplituden der Projektion der wahren Bodenverschiebung x_m vornehmen.

Digitized by Google

Tabelle XVI.

a	b	c	$b-a$	y_m	Mittelwerte y_m
3,76 mm		50 mm	1,38 mm	122,1 mm	
3,47	5,14 mm	60	1,67	122,8	122,5 mm
3,15		70	1,99	122,5	
2,84		50	2,26	78,0	
2,27	5,10	60	2,83	78,4	78,4
1,56		70	3,54	78,9	
3,29		70	2,10	121,8	
2,96	5,39	80	2,43	123,0	122,6
2,57		90	2,82	122,9	
3,66		70	1,58	153,5	
3,44	5,24	80	1,80	155,7	154,0
3,14		90	2,10	152,9	
3,32		70	2,09	122,8	
2,99	5,41	80	2,42	123,8	122,7
2,54		90	2,87	121,6	
3,55		70	2,25	122,3	
3,15	5,80	80	2,65	121,6	122,4
2,78		90	3,02	123,3	

Bei direkter optischer Registrierung sind die entsprechenden Formeln im § 4 Kapitel V (Formel (106), (107) und (112)) gegeben

$$x_m = \frac{l}{L} \cdot U \cdot y_m, \tag{80}$$

wo

$$U = (1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)},$$

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1 + u^2}\right)^2$$

und

$$u = \frac{T_p}{T}$$

ist. Die Verspätung des Maximums auf dem Seismogramm ist

$$\tau = \frac{T_p}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1 - \mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2 - 1}\right\} \cdot \tag{81}$$

Im Falle der galvanometrischen Registrierung sind die zugehörigen Formeln im § 3 Kapitel VI (Formel (46), (47) und (43)) angegeben.

$$x_m = C_1(1 + u_1^2)\, U \cdot \frac{y_m}{T_p}, \tag{82}$$

wo

$$C_1 = \frac{\pi l}{k A_1} \tag{83}$$

Digitized by Google

und

$$u_1 = \frac{T_p}{T_1}$$

ist. Die hinzukommende Verspätung des Maximums ist

$$\tau_1 = T_p \left[\frac{\operatorname{arctg} \left\{ \frac{2 u_1}{u_1^2 - 1} \right\}}{2\pi} + \frac{1}{4} \right]. \tag{84}$$

In diesem Falle läßt sich also der wahre Moment t_{x_m}, der dem Maximum x_m der Bodenverschiebung entspricht, nach der folgenden Formel bestimmen:

$$t_{x_m} = t_m - \tau - \tau_1. \tag{85}$$

In diesen Formeln bedeutet T die Eigenperiode des Seismographen, und T_1 die Eigenperiode des entsprechenden Galvanometers (beide ohne Dämpfung), μ^2 — die Dämpfungskonstante, A_1 — die Entfernung des Galvanometerspiegels von der Fläche der Registriertrommel in der Richtung des normal einfallenden Strahles, l die reduzierte Pendellänge und k den Übertragungsfaktor.

Diese Formeln können bei den Horizontal- wie auch bei den Vertikalseismographen angewandt werden.

Bei mechanischer Registrierung der Bewegung des Pendels erfordert die Formel (80) eine ergänzende Korrektion für die Reibung der Schreibfeder, was im Kapitel XII noch näher erörtert werden wird.

Zur Erläuterung der Anwendung der oben abgeleiteten Formeln für die galvanometrische Registrierung geben wir als Schema für solche Berechnungen hier ein Zahlenbeispiel der Bearbeitung von vier Maxima M_1, M_2, M_3 und M_4, die in der Kurve Fig. 25 auftreten.

Die Pendelkonstanten waren an diesem Tage die folgenden:

$$T = 22^s,1$$

$$T_1 = 23^s,7$$

$$\mu^2 = +0,17$$

$$\log C_1 = \bar{3},9958.$$

Die Berechnung dieser vier Maxima ist in nebenstehender Tabelle XVII ausgeführt.

Nach derselben Methode lassen sich die Amplituden der Bodenbewegungen bei der mikroseismischen Unruhe bestimmen; hier braucht man aber nicht genau die Momente t_m oder t_{x_m} zu kennen, sondern es ist nur die genaue Kenntnis der Amplitude x_m und der Periode T_p erforderlich.

Auf die Maximalphase folgt der Teil des Seismogramms, der gewöhnlich „coda" oder Nachläufer genannt wird. Die Amplituden sind hier bedeutend kleiner und die Bewegung ist unregelmäßiger.

Digitized by Google

Tabelle XVII.

Maxima →	M_1 (oben)	M_2 (unten)	M_3 (oben)	M_4 (unten)	
t_m	$11^h\,38^m\,4^s$	$11^h\,38^m\,48^s$	$11^h\,40^m\,9^s$	$11^h\,40^m\,52^s$	aus dem Seismogramm
T_p	$18^s,3$	$16^s,4$	$12^s,2$	$13^s,1$	
$2y_m$	+ 89,25 mm	− 88,6 mm	+ 50,5 mm	− 49,25 mm	
u	0,828	0,742	0,552	0,593	aus Tab. II.
u_1	0,772	0,692	0,515	0,553	
$\log(1+u_1^2)$	0,2080	0,1699	0,1022	0,1159	aus Tab. III.
$\log U$	0,1878	0,1538	0,0878	0,1004	aus Tab. V.
$\log 2y_m$	1,9506	1,9474 (n)	1,7033	1,6924 (n)	
$\log \frac{1}{T_p}$	$\bar{2},7375$	$\bar{2},7852$	$\bar{2},9136$	$\bar{2},8827$	
$\log C_1$	$\bar{3},9958$	$\bar{3},9958$	$\bar{3},9958$	$\bar{3},9958$	
$\log 2x_m$	$\bar{1},0747$	$\bar{1},0521$ (n)	$\bar{2},8022$	$\bar{2},7872$ (n)	
$2x_m$	+ 0,1188	− 0,1127	+ 0,0634	− 0,0613	
$\frac{\tau}{T_p}$	0,283	0,301	0,347	0,337	aus Tab. VI.
$\frac{\tau_1}{T_p}$	0,541	0,558	0,598	0,589	aus Tab. VII.
$\frac{\tau+\tau_1}{T_p}$	0,824	0,859	0,945	0,926	
$\tau+\tau_1$	$15^s,1$	$14^s,1$	$11^s,5$	$12^s,1$	
Das Resultat t_{x_m}	$11^h\,37^m\,49^s$	$11^h\,38^m\,34^s$	$11^h\,39^m\,57^s$	$11^h\,40^m\,40^s$	
T_p	$18^s,3$	$16^s,4$	$12^s,2$	$13^s,1$	
x_m in Mikron	$+59_\mu$	-56_μ	$+32_\mu$	-31_μ	

Nach Wiecherts[55]) Meinung entsprechen die Bodenschwingungen in der „coda" nicht den langen Oberflächenwellen, die vom Epizentrum ausgehen, sondern den Eigenschwingungen der Erdrinde, die auf einer Magmaschicht ruht. Nach Roesener[56]) treten in den Nachläufern vorzugsweise Perioden von 18 und 12 Sekunden auf. Bei den asiatischen Beben überwiegen hierbei Perioden von 12 Sekunden und bei den amerikanischen von 18 Sekunden.

Aus dem Seismogramm soll auch das Ende des Bebens mit F (finis) bezeichnet, entnommen werden. Da aber die Bodenschwingungen bei Fernbeben niemals plötzlich aufhören, sondern in ihrer Intensität allmählich abnehmen, so kann F nur angenähert bestimmt werden, und zwar höchstens mit einer Genauigkeit von einer Viertelstunde. Übrigens hat F keine besondere praktische Bedeutung.

In den Seismogrammen von starken Beben finden sich zuweilen Wellen der Maximalphase, welche vom Epizentrum nach der Umkreisung des Erdballs durch das Antiepizentrum hindurch an den Beobachtungsort gelangt sind, die W_2-Wellen.

Sind sie deutlich ausgeprägt, so soll man auch für sie x_m, T_p und t_{x_m} bestimmen, denn man kann hieraus die mittlere Fortpflanzungsgeschwindig-

Digitized by Google

keit V der seismischen Oberflächenwellen (§ 2 Kapitel II), und den Dämpfungskoeffizienten der seismischen Energie (Formel (89) und (103) Kapitel II) ermitteln.

Dieselbe Bemerkung bezieht sich auch auf die W_3-Wellen, die vom Epizentrum zum Beobachtungsort gelangt sind, noch einmal ganz die Erde umkreist haben und wiederum am Beobachtungsort registriert werden.

Nach Auswertung des Seismogrammes werden von vielen seismischen Stationen die Resultate in wöchentlichen oder monatlichen Berichten zusammengefaßt und veröffentlicht.

Da die große Verschiedenheit sowohl der Bezeichnungsweise als auch der Form dieser Berichte eine Vergleichung der Erdbebenregistrierungen außerordentlich erschwerte, so hat die Permanente Kommission der Internationalen Seismologischen Assoziation bei ihrer Tagung im Juli 1911 in Manchester beschlossen, den seismischen Stationen dringend anzuempfehlen, ihre Veröffentlichungen nach dem unten angegebenen, von einer zu diesem Zwecke zusammenberufenen Kommission aufgestellten, einheitlichen Schema einzurichten und die durch den Kommissionsbeschluß international festgelegte Bezeichnungsweise von jetzt ab anzuwenden.

Die Berichte sollen etwa das Format 19×33 cm haben und einseitig bedruckt sein.

Der Kopf des Formulars soll als Überschrift in großen Lettern den Namen der Station tragen; darunter werden ihre Koordinaten, die Höhe über dem Meere und die Art des Untergrundes angegeben.

Ferner sollen die benutzten Instrumente angegeben sein. Bei den Farb- und Rußschreibern ist ihre Vergrößerung, ihre Eigenperiode ohne Dämpfung, ihr Dämpfungsverhältnis und ihre Reibung anzugeben. Für die direkt optisch registrierenden Seismometer ist die Angabe der drei zuerst aufgeführten Größen zu empfehlen. Es soll durch diese Angaben vor allem auch ermöglicht werden, ein Urteil über die Güte des Instrumentes und sein Funktionieren zu gewinnen. Für die Seismometer nach Galitzin brauchen nähere Angaben nicht gemacht zu werden.

Die folgenden Zeichen wurden international vereinbart:

P = erster Vorläufer;

S = zweiter Vorläufer;

L = lange Wellen;

$M_1 M_2 \cdot\cdot$ = die aufeinander folgenden Momente der Maxima der Bodenbewegung, korrigiert wegen der Verspätung der Instrumente;

$C_1 C_2 \ldots$ = die der Hauptphase folgenden sekundären Maxima; von diesen sind jedoch nur die Perioden und angenäherten Zeiten anzugeben;

F = Ende;

i = scharfes Auftreten einer Phase;
e = undeutliches Auftreten einer Phase; } wird in extremen Fällen vor das Phasensymbol gesetzt, kann aber, falls die Natur der Phase undeutlich ist, als selbständiges Symbol verwendet werden.

T = Periode = Dauer einer Doppelschwingung in Sekunden;

Digitized by Google

A_N = Amplitude der $N-S$-Komponente der wahren Bodenbewegung in μ von der Ruhelage (+ nach N);

A_E = Amplitude der $E-W$-Komponente der wahren Bodenbewegung in μ von der Ruhelage (+ nach E);

A_Z = Amplitude der Vertikalkomponente der wahren Bodenbewegung in μ von der Ruhelage (+ nach dem Zenit);

Δ = Epizentralentfernung in Kilometern;

Zeit = mittlere Greenwicher, von Mitternacht bis Mitternacht, gezählt von 0^h bis 24^h, Zeiten korrigiert;

μ = Mikron = 0,001 mm.

? = fraglich, wird hinter das betreffende Symbol gesetzt.

Für die Eintragung der Werte ist die Tabelle der Berichte in die folgenden Spalten eingeteilt, die man sich auf die Breite der Berichte auseinandergezogen zu denken hat.

Datum	Phase	Zeit	Periode	Amplitude			Δ	Bemerkungen
				A_N	A_E	A_Z		

Die zweite und dritte Spalte sind zur Bezeichnung der Phase und der Zeit ihres Eintritts, die vierte und fünfte Spalte zur Eintragung ihrer Periode und ihrer Amplitude, letztere wenn möglich mit Angabe der Richtung der wahren Bodenbewegung, bestimmt. Bei Fernbeben ist der Einsatz von P in den Seismogrammen der Vertikalseismometer im allgemeinen sehr deutlich. In der Spalte Δ gibt man die Entfernung des Epizentrums in Kilometern an und schließlich in der Spalte „Bemerkungen" Mitteilungen über das Azimut, die Koordinaten des Epizentrums und bemerkenswerte Einzelheiten.

Mitteilungen über die mikroseismische Bodenunruhe sind in diesem Schema noch nicht vorgesehen. Es empfiehlt sich jedoch, wie es die russischen Stationen erster Ordnung tun, die Amplitude und Periode der drei Komponenten der Bodenbewegungen für 0^h, 6^h, 12^h, 18^h Gr. Z. anzugeben.

Man bezieht diese Angaben jedoch nicht auf einen genau bestimmten Moment, sondern man nimmt das Mittel aus den größten Amplituden in der Nähe der betreffenden Beobachtungsstunde, etwa von 10 Minuten vor bis 10 Minuten nach der vollen Stunde.

Tritt aber in der Zeit zwischen den in der Tabelle angegebenen Beobachtungsstunden eine plötzliche Zunahme oder Abnahme der mikroseismischen Bewegung I. Art ein, so wird das besonders bemerkt und es werden ihre Perioden und Amplituden angegeben.

Außerdem können noch Mitteilungen über die mikroseismischen Bewegungen II. Art gegeben werden mit kurzen Andeutungen über die meteorologischen Faktoren, besonders der Windstärke.

Digitized by Google

Schließlich ist noch zu erwähnen, daß die verschiedenen Apparate, wenn sie nur mit genügend starker Dämpfung versehen sind, im ganzen sehr gut übereinstimmende Werte für die Größe der maximalen Bodenverschiebungen x_m geben. Es wird sehr interessant sein, die Bodenverschiebungen auf den verschiedenen seismischen Stationen von ganz gleichen aperiodischen Seismographen registrieren zu lassen. Aus dem Vergleich solcher Seismogramme könnte man wahrscheinlich interessante Schlüsse über die Gesetze der Fortpflanzung der verschiedenen seismischen Wellentypen ziehen.

§ 5. **Methode der gliedweisen Integration.**

Die moderne Seismometrie beschränkt sich zurzeit bei der Auswertung von Seismogrammen nur auf die Bestimmung der absoluten Bodenverschiebungen bei den einfachen harmonischen Schwingungen. Es würde nun interessant und wichtig sein, nicht nur die einfachen sinusartigen Wellen, sondern auch die Superposition der seismischen Wellen verschiedener Perioden und Amplituden näher zu untersuchen. Auf diesem Wege würden zweifellos manche bedeutsame Beziehungen und Gesetze entdeckt werden, die uns gestatten würden, die komplizierten Vorgänge bei den Schwingungen unserer Erdrinde näher zu erklären.

Eine allgemeine Aufgabe wäre das Studium des Ganges der Veränderlichkeit irgendeiner der drei Komponenten der Bodenverschiebung als Funktion der Zeit für die ganze Dauer des Bebens, oder wenigstens für einen bestimmten Zeitraum.

Diese Aufgabe bietet wohl große praktische Schwierigkeiten, die aber vollständig zu überwinden sind, obwohl die Lösung dieser Frage sehr zeitraubend ist. Mit dieser Frage beschäftigten sich I. Pomeranzeff[57]), A. Orlov[58]) und H. Arnold[59]).

Die Theorie dieser Methode gründet sich auf die gliedweise Integration der Differentialgleichung der Bewegung des Seismographen mittels mechanischer Quadratur.

Wir wollen auf diese Theorie näher eingehen.

Wir beginnen mit dem einfachsten Fall der direkten optischen Registrierung und gehen dann zur galvanometrischen über.

Die mechanische Registrierung der Bewegung des Seismographen werden wir hierbei nicht berücksichtigen, da sie ein variables Element, die Reibung der Feder am berußten Papier, einführt, was die Anwendung der im höchsten Grade empfindlichen Methode der gliedweisen Integration bei der Analyse der Seismogramme fast unmöglich macht.

Wir nehmen irgendeine Projektion der Bodenverschiebung x und setzen voraus, daß x eine Funktion der Zeit t ist, deren Gestalt man bestimmen soll,

$$x = f(t). \tag{86}$$

Die Differentialgleichung der Bewegung des Seismographen lautet:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0. \tag{87}$$

Digitized by Google

Wir werden hier keine Voraussetzungen über die Größe der Dämpfungskonstante ε machen, setzen dagegen voraus, daß die drei Seismographenkonstanten ε, n und l bekannt sind.

Bezeichnen wir den Ausschlag des Lichtpunktes mit y, die Entfernung des Spiegels von der Seismographen-Registrierfläche mit A, so ist die Länge des entsprechenden optischen Hebels

$$L = 2A$$

und

$$y = L\theta. \tag{88}$$

Multipliziert man die Gleichung (87) mit L und berücksichtigt, daß nach Formel (114) des § 4 Kap. V das Verhältnis $\frac{L}{l}$ die normale Vergrößerung $\mathfrak{V}_0$ des Apparates für Schwingungen unendlich kleiner Periode bedeutet, so ergibt sich

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \mathfrak{V}_0 x'' = 0. \tag{89}$$

y ist als Funktion von t bekannt; es ergibt sich aus der Kurve des Seismogramms.

Also setzen wir

$$y = F(t). \tag{90}$$

Die Aufgabe der Seismometrie besteht nun darin, aus der bekannten Funktion $F(t)$ die unbekannte Funktion $f(t)$ zu bestimmen, und zwar einzeln für jede der drei Komponenten der Bodenverschiebung.

Wir beginnen mit dem einfachsten Falle, wenn $t = 0$ ist, d. h. alles sich in Ruhe befindet.

Dann ist

$$x_0 = 0$$

und

$$y_0 = 0.$$

Im Moment $t = 0$ beginnt die Bewegung des Bodens. Die entsprechende Anfangsgeschwindigkeit sei x_0' und y_0'.

y_0' kann man aus der Gleichung (89) nach der Methode der gliedweisen Integration zwischen $t = 0$ und einer sehr kleinen Größe τ bestimmen.

Wir erhalten also

$$y_0' = -\mathfrak{V}_0 x_0'. \tag{91}$$

Um x als Funktion von t zu finden, integrieren wir die Gleichung (89) innerhalb der Grenzen 0 und t.

Das gibt uns die folgende Gleichung

$$y' - y_0' + 2\varepsilon(y - y_0) + n^2\int_0^t y\,dt + \mathfrak{V}_0(x' - x_0') = 0.$$

Digitized by Google

Unter Bezugnahme auf die Beziehung (91) und $y_0 = 0$ ergibt sich

$$y' + 2\varepsilon y + n^2\int_0^t y\,dt + \mathfrak{V}_0 x' = 0.$$

Diese letzte Gleichung integrieren wir wieder partiell zwischen denselben Grenzen 0 und t.

Dann ergibt sich mit Berücksichtigung, daß $x_0 = 0$ und $y_0 = 0$ ist,

$$y + 2\varepsilon\int_0^t y\,dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y\,dt + \mathfrak{V}_0 x = 0$$

oder

$$x = -\frac{1}{\mathfrak{V}_0}\left[y + 2\varepsilon\int_0^t y\,dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y\,dt\right]. \qquad (92)$$

Die bestimmten Integrale dieser Formel können nach der Methode der mechanischen Quadratur, z. B., durch Messung einer Reihe äquidistanter Ordinaten (Simpsons Gesetz) oder mit Hilfe eines Integraphen berechnet werden.

Die Formel (92) gibt also die Möglichkeit, x als Funktion von t zu bestimmen, anders ausgedrückt, wir können für jeden angegebenen Moment t den entsprechenden Wert von x finden. Sie setzt aber voraus, daß im Anfangsmoment $t = 0$ alles in Ruhe war und daß die erste Derivierte von x nach der Zeit in den gegebenen Integrationsgrenzen eine stetige Funktion der Zeit t ist. Das letztere trifft jedoch selten zu. In Wirklichkeit hat man es beim Beben immer mit Superposition verschiedener Systeme seismischer Wellen zu tun, welche dabei den Beobachtungsort in verschiedener Zeit erreichen. Deswegen besitzt die Kurve $x = f(t)$ im Moment des Eintreffens einer neuen Welle einen singulären Punkt, in welchem die entsprechende Kurve 2 Tangenten hat; anders ausgedrückt, die Größe der ersten Derivierten $\frac{dx}{dt}$ macht beim Passieren durch diesen Punkt einen plötzlichen Sprung, es ist also eine unstetige Funktion, was man unbedingt zu berücksichtigen hat.

Wir nehmen nun einen allgemeinen Fall.

Es sei im Moment $t = t_1$

$$x = x_1,\ x' = x_1',\ y = y_1,\ y' = y_1'.$$

In diesem Moment möge eine neue Welle ankommen, durch die das Bodenteilchen eine resultierende Geschwindigkeit x_2' erhält. Es war also im Moment $t = t_1$ bis zum Eintreffen der neuen Welle die Geschwindigkeit x_1' und nach dem Eintreffen wurde sie gleich x_2', wobei die Differenz $x_2' - x_1'$ eine endliche Größe ist.

Auf dem Seismogramm muß in diesem Moment ein scharfer Knick der Kurve eintreten, wobei die neue Geschwindigkeit y_2' von y_1' um eine endliche Größe sich unterscheidet.

Digitized by Google

Zur Bestimmung von y_2' benutzen wir wieder die gliedweise Integration der Gleichung (89) zwischen den Grenzen $t = t_1 - \frac{\tau}{2}$ und $t = t_1 + \frac{\tau}{2}$ und gehen dann zur Grenze über, indem wir $\tau = 0$ setzen.

Wir finden also, daß

$$y_2' - y_1' + \mathfrak{B}_0(x_2' - x_1') = 0$$

oder

$$y_2' = y_1' - \mathfrak{B}_0(x_2' - x_1') \tag{93}$$

ist. Wir nehmen nun den Moment $t = t_1$ für den neuen Anfang der Zeitzählung an und integrieren die Gleichung (89) zwischen den Grenzen 0 und t in der Voraussetzung, daß zwischen diesen neuen Grenzen die Funktion $x = f(t)$ keine singulären Punkte hat.

Die neuen Anfangsbedingungen der Bewegung bei $t = 0$ sind

$$x_0 = x_1 \qquad y_0 = y_1$$

$$x_0' = x_2' \qquad y_0' = y_2' = y_1' - \mathfrak{B}_0(x_2' - x_1').$$

Beim ersten Integrieren erhalten wir

$$y' - \{y_1' - \mathfrak{B}_0(x_2' - x_1')\} + 2\varepsilon(y - y_1) + n^2\int_0^t y\,dt + \mathfrak{B}_0(x' - x_2') = 0$$

oder

$$y' + 2\varepsilon y + n^2\int_0^t y\,dt + \mathfrak{B}_0 x' = [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1']. \tag{94}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung ist eine konstante Größe.

Wir wollen nun wieder diese Gleichung (94) zwischen denselben Grenzen integrieren.

Dann ergibt sich

$$y - y_1 + 2\varepsilon\int_0^t y\,dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y\,dt + \mathfrak{B}_0(x - x_1) = [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1']t$$

oder

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\Big[\Big\{y + 2\varepsilon\int_0^t y\,dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y\,dt\Big\} - y_1 - \{y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1'\}t\Big]. \tag{95}$$

Sind die Konstanten x_1, y_1, x_1' und y_1' bekannt, so kann nach dieser Formel x als Funktion von t berechnet werden.

Die Formel (95) behält ihre Gültigkeit bis zum Eintreffen einer neuen seismischen Welle, wonach die Anfangsbedingungen der Bewegung sich von neuem ändern.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß alle Ordinaten der Kurve richtig gemessen worden sind, anders gesagt, daß wir die genaue Lage der Nulllinie kennen. Tatsächlich können aber alle Ordinaten einen kleinen kon-

Digitized by Google

stanten Fehler α enthalten und in den vorigen Formeln muß man zu allen Größen y die Korrektion α hinzuaddieren.

Es ist außerdem möglich, daß die Nullinie, von der aus wir alle Ordinaten messen, eine kleine Neigung besitzt. Dann muß man noch eine zweite Korrektion, die der Zeit proportional ist, hinzuaddieren.

Also muß y in der Formel (95) um

$$\alpha + \beta t$$

korrigiert werden, wo α und β zwei Konstanten sind, die positiv oder negativ sein können.

Dann ergibt sich

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\Big[\{y + \alpha + \beta t\} + 2\varepsilon\Big\{\int_0^t y\,dt + \alpha t + \tfrac{1}{2}\beta t^2\Big\}$$
$$+ n^2\Big\{\int_0^t dt\int_0^t y\,dt + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 + \tfrac{1}{6}\beta t^3\Big\} - \{y_1 + \alpha\}$$
$$- \{y_1' + \beta + 2\varepsilon y_1 + 2\varepsilon\alpha + \mathfrak{B}_0 x_1'\}t\Big].$$

Hier bedeutet y die Größe der gemessenen Ordinate.

In diesem Ausdruck heben sich einige Glieder auf und unsere Größe x kann in folgender Form ausgedrückt werden:

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}\Big[y + 2\varepsilon\int_0^t y\,dt + n^2\int_0^t dt\int_0^t y\,dt - \{A + Bt + Ct^2 + Dt^3\}\Big]. \quad (96)$$

Hier haben die Konstanten A, B, C und D folgende Bedeutung:

$$\left.\begin{aligned} A &= + y_1 \\ B &= + [y_1' + 2\varepsilon y_1 + \mathfrak{B}_0 x_1'] \\ C &= - \tfrac{1}{2}[n^2\alpha + 2\varepsilon\beta] \\ D &= - \tfrac{1}{6} n^2\beta \end{aligned}\right\}. \quad (97)$$

Bei der Ableitung der Formel (96) haben wir vorausgesetzt, daß im Moment $t = 0$ eine neue seismische Welle eintritt. Diese Voraussetzung ist zwar ganz unwesentlich und von keiner Bedeutung, denn die anfängliche Geschwindigkeit x_2' tritt in der Formel (96) gar nicht auf, es sind nur die Größen x_1, x_1', y_1 und y_1' von Bedeutung. Es kann also der Punkt, von dem aus wir unsere Zeitzählung beginnen, ein ganz willkürlicher Punkt des Seismogrammes sein.

Die Formel (96) ist also eine allgemeine.

Man hat jedoch eins zu beachten, daß nämlich bei einem jeden Eintreffen einer neuen Welle die Konstante (B), die durch die Beziehung (97) definiert wird, ihren Wert ändert.

Digitized by Google

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$I = y + 2\varepsilon \int_0^t y\,dt + n^2 \int_0^t dt \int_0^t y\,dt \tag{98}$$

und

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3, \tag{99}$$

wo P ein Polynom dritten Grades ist.

Dann ist

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{B}_0}[I - P]. \tag{100}$$

Wir wollen diese Formel näher betrachten, wobei wir der Einfachheit halber annehmen, daß α und β gleich Null sind, d. h., daß die Ordinaten der Kurve richtig gemessen sind.

Die Funktion I läßt sich aus der Kurve des Seismogramms mit Hilfe von mechanischen Quadraturen bestimmen und ist folglich eine bestimmte Funktion.

Der Natur der Sache nach kann x nicht mit t stetig zunehmen; da aber die Formel (100) das Polynom P enthält, so kann man daraus schließen, daß die Funktion I selbst außer periodischen Gliedern auch ein Polynom enthalten muß.

Diejenigen Fachgelehrten, die sich mit der Berechnung der Funktion I aus dem Seismogramm beschäftigt haben, bemerkten, daß mit der Zunahme von t auch I immer mehr und mehr anwächst. Sie schrieben diese Erscheinung dem Einflusse der Fehler α und β zu.

Die Ursache liegt aber jedenfalls wohl nicht in den fehlerhaften Messungen der Ordinaten y, da α und β klein und zudem in dem Ausdruck der Konstanten A und B nicht mitenthalten sind, sondern hauptsächlich darin, daß die Berechnung von x ausgeführt wurde, ohne daß auf die Anfangsbedingungen der Bewegung genügend geachtet wurde, d. h. ohne daß der Einfluß des Polynoms P, dessen einer Koeffizient beim Eintreffen jeder neuen Welle sich ändert, berücksichtigt wurde.

Diese variablen Anfangsbedingungen kann man jedoch keineswegs vernachlässigen, und eine stetige Integration der Kurve $y = F(t)$ ohne Rücksicht auf die singulären Punkte der Funktion $x = f(t)$ ist ganz unzulässig.

Die Richtigkeit dieser Annahme kann man an folgendem Beispiele zeigen.

Wir nehmen der Einfachheit halber an, daß der Seismograph ganz ungedämpft ist. Dann lautet die Differentialgleichung seiner Bewegung

$$y'' + n^2 y + \mathfrak{B}_0 x'' = 0. \tag{101}$$

Wir setzen nun voraus, daß bis zum Moment $t = t_1$ die Bodenbewegung vollständig willkürlich ist und wir in diesem Moment folgende Gruppe der Größen x_1, x_1', y_1 und y_1' haben.

Digitized by Google

Vom Momente t_1 an, den wir als Anfang der Zeitzählung annehmen, leistet die Bodenbewegung dem Gesetze der einfachen harmonischen Schwingungen Genüge

$$x = x_1 + x_m \sin pt. \tag{102}$$

Die neuen Anfangsbedingungen der Bewegung sind in diesem Falle

$$x_0 = x_1, \quad x_0' = p x_m,$$

$$y_0 = y_1, \quad y_0' = y_1' - \mathfrak{V}_0(x_0' - x_1') \quad \text{(s. Form. (93))}.$$

Genügt x der Gleichung (102), so läßt sich das allgemeine Integral der Gleichung (101) in folgender Form ausdrücken:

$$y = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^2}{n^2 - p^2} \sin pt, \tag{103}$$

wo Γ_1 und Γ_2 zwei willkürliche Integrationskonstanten sind.

Von der Richtigkeit dieser Formel kann man sich leicht durch einfaches Einsetzen überzeugen.

Nach Formel (103) ist

$$y'' = -n^2 \Gamma_1 \cos nt - n^2 \Gamma_2 \sin nt - \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^4}{n^2 - p^2} \sin pt.$$

Setzt man y'' und y in die Formel (101) ein, so ergibt sich

$$\Gamma_1(-n^2 + n^2) \cos nt + \Gamma_2(-n^2 + n^2) \sin nt$$

$$- \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^4}{n^2 - p^2} \sin pt + \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^2 n^2}{n^2 - p^2} + \mathfrak{V}_0 x'' = 0$$

oder

$$\mathfrak{V}_0 x_m \cdot \sin pt \left\{ -\frac{p^4}{n^2 - p^2} + \frac{p^2 n^2}{n^2 - p^2} - p^2 \right\}$$

$$= \frac{p^2}{n^2 - p^2} \cdot \mathfrak{V}_0 x_m \cdot \sin pt \{ -p^2 + n^2 - n^2 + p^2 \} = 0.$$

Diese Gleichung ist identisch gleich Null für beliebige Werte von t.

Zur Bestimmung von Γ_1 und Γ_2 betrachten wir die Anfangsbedingungen der Bewegung.

Aus der Gleichung (103) haben wir

$$y' = -\Gamma_1 n \sin nt + \Gamma_2 n \cos nt + \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^3}{n^2 - p^2} \cos pt. \tag{104}$$

Setzen wir nun in den Gleichungen (103) und (104) $t = 0$, so ergibt sich

$$\Gamma_1 = y_1 \tag{105}$$

und

$$y_1' - \mathfrak{V}_0(x_0' - x_1') = y_1' - \mathfrak{V}_0(p x_m - x_1') = \Gamma_2 n + \mathfrak{V}_0 x_m \frac{p^3}{n^2 - p^2}$$

oder

$$\Gamma_2 = \frac{1}{n}\left[y_1' + \mathfrak{V}_0 x_1' - p \mathfrak{V}_0 x_m \left\{ 1 + \frac{p^2}{n^2 - p^2} \right\} \right]$$

Digitized by Google

oder noch

$$\Gamma_2 = \frac{1}{n}\left[y_1' + \mathfrak{B}_0 x_1' - \mathfrak{B}_0 x_m \frac{pn^2}{n^2 - p^2}\right]. \tag{106}$$

Setzt man diese Werte Γ_1 und Γ_2 in die Formel (103) ein, so erhält man y als Funktion von t

$$y = F(t).$$

Diese Kurve entspricht etwa der Seismogrammkurve. In unserem Falle stellt sie eine Superposition zweier einfacher Sinuslinien mit verschiedenen Perioden

$$T = \frac{2\pi}{n}$$

und

$$T_p = \frac{2\pi}{p}$$

dar.

Die Aufgabe besteht nun darin, mit Hilfe der bekannten Funktion $F(t)$ die unbekannte Bodenbewegung $x = f(t) = x_1 + x_m \sin pt$ aufzusuchen.

Dazu benutzen wir die allgemeine Integralformel (100). Wir brauchen in diesem Falle keine Quadraturen anzuwenden, weil die analytische Form der Funktion $y = F(t)$ gegeben ist.

Wir wollen zuerst den Wert der Funktion I (s. Form. (98)) bestimmen. Dazu haben wir folgende Beziehungen:

$$\int_0^t \cos nt\, dt = \frac{1}{n} \sin nt$$

$$\int_0^t dt \int_0^t \cos nt\, dt = \frac{1}{n^2}[1 - \cos nt]$$

$$\int_0^t \sin nt\, dt = -\frac{1}{n}[\cos nt - 1]$$

$$\int_0^t dt \int_0^t \sin nt\, dt = \frac{1}{n}\left[t - \frac{\sin nt}{n}\right].$$

Folglich erhalten wir aus den Formeln (98) und (103)

$$I = y + n^2 \int_0^t dt \int_0^t y dt = \Gamma_1 \cos nt + \Gamma_2 \sin nt + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p^2}{n^2 - p^2} \sin pt$$

$$+ n^2\left[\Gamma_1 \frac{1}{n^2}\{1 - \cos nt\} + \Gamma_2 \frac{1}{n}\left\{t - \frac{\sin nt}{n}\right\} + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{p}{n^2 - p^2}\left\{t - \frac{\sin pt}{p}\right\}\right]$$

$$= \mathfrak{B}_0 x_m \left\{\frac{p^2}{n^2 - p^2} - \frac{n^2}{n^2 - p^2}\right\} \sin pt + \Gamma_1 + n\left\{\Gamma_2 + \mathfrak{B}_0 x_m \frac{pn}{n^2 - p^2}\right\} t$$

Digitized by Google

oder, wenn man hier die Werte von Γ_1 und Γ_2 aus den Formeln (105) und (106) einsetzt,

$$I = -\mathfrak{V}_0 x_m \sin pt + y_1 + [y_1' + \mathfrak{V}_0 x_1']t. \qquad (107)$$

Diese Formel zeigt uns, daß die Funktion I außer dem periodischen Gliede noch eine lineare Funktion der Zeit t enthält.

Daraus folgt, daß mit der Zunahme von t die Funktion I ständig anwächst, sogar bei Abwesenheit irgendwelcher Fehler in den ausgemessenen Ordinaten (α und β sind gleich Null), worauf früher hingewiesen worden war.

Um die gesuchte Funktion x zu erhalten, muß man nach Formel (100) das Polynom P von I abziehen.

Aus den Formeln (99) und (97) folgt bei Berücksichtigung, daß nach der Voraussetzung die Koeffizienten C und D und auch ε gleich Null sind,

$$P = A + Bt = y_1 + [y_1' + \mathfrak{V}_0 x_1']t.$$

Setzt man nun den Wert I aus der Formel (107) und den vorstehenden Wert P in die Formel (100) ein, so hebt sich die lineare Funktion auf und man erhält schließlich

$$x = x_1 + x_m \sin pt,$$

d. h. die wahre Bodenbewegung, die durch die Gleichung (102), von der wir ausgegangen sind, definiert wird.

Dieses Beispiel zeigt anschaulich, daß man bei der Anwendung der Methode der gliedweisen Integration zur Bestimmung der Funktion $x = f(t)$ den Einfluß der Anfangsbedingungen der Bewegung in Betracht ziehen muß. Sonst kann man zu ganz falschen Resultaten kommen.

Es fragt sich nun, wie sich das in der Praxis verwirklichen läßt, wenn einige der Konstanten in dem Ausdrucke des Polynoms unbestimmt sind und außerdem noch eine von ihnen sich jedesmal beim Eintreten einer neuen seismischen Welle ändert.

Dazu nimmt man einen beliebigen Punkt des Seismogramms als Anfang der Zeitzählung und bestimmt mit Hilfe von mechanischen Quadraturen die Funktion I, indem man die Kurve von 0 an bis zu den verschiedenen Werten von t integriert.

Es ergibt sich dann die Kurve

$$I = \Phi(t), \qquad (108)$$

die man auf Koordinatenpapier aufträgt, wobei man die x-Achse als Zeitachse wählt.

Die Kurve $\Phi(t)$, welche ein Polynom enthält, wird sich allmählich von der Zeitachse entfernen und schwankt hierbei um eine mittlere Kurve, die nichts anderes darstellt, als das Polynom P, welches man von I abziehen muß, um nach Formel (100) x als Funktion von t zu erhalten. Diese mittlere Kurve kann man mehr oder weniger genau mit der Hand durch die Kurve $I = \Phi(t)$ ziehen. Dem Wesen der Sache nach soll die Kurve P

Digitized by Google

aus einer Reihe von einzelnen Zweigen bestehen. In denjenigen Punkten, wo zwei solche Zweige zusammenstoßen, befindet sich ein singulärer Punkt der Kurve P, in welchem es 2 Tangenten gibt; er entspricht dem Momente des Eintreffens einer neuen seismischen Welle.

Nach dieser Methode kann man den Wert des Polynoms P für verschiedene Werte t bestimmen.

Zieht man P von I ab, so ergibt sich x als Funktion von t:

$$x = x_1 - \frac{1}{\mathfrak{V}_0}[I - P].$$

Diese Formel enthält noch die unbekannte Größe der absoluten Bodenverschiebung x_1 im Moment des Anfanges der Zeitzählung, ein Umstand, der keine wesentliche Bedeutung hat.

Man kann nach Bedarf x_1 bestimmen, indem man die Werte der Funktionen I und P für irgendeinen entfernten Punkt des Seismogramms, wo die Bewegung des Bodens und des Apparates schon aufgehört hat, berechnet. In diesem Falle ist $x = 0$. Bezeichnet man die entsprechenden Werte I und P mit I_f und P_f, so ergibt sich

$$x_1 = \frac{1}{\mathfrak{V}_0}(I_f - P_f). \tag{109}$$

Nehmen wir aber als Moment des Anfanges der Zeitzählung den Anfang der ersten Phase, so haben wir $x_1 = 0$.

Bei Anwendung der oben erwähnten Methode der Bestimmung der Funktion $x = f(t)$ ist es gar nicht notwendig, die Größen y absolut genau zu bestimmen, weil die entsprechenden Korrektionen in dem Ausdruck des Polynoms P enthalten sind, das aber direkt aus dem Versuch bestimmt wird.

Wir sehen also, daß die Methode der gliedweisen Integration zwar die Größe x als eine Funktion von t für die ganze Dauer des Bebens und bei willkürlichem Charakter der Bewegung des Bodens zu bestimmen gestattet, daß aber die praktische Anwendung der Methode mit vielen Schwierigkeiten verknüpft ist und jedenfalls eine ziemlich komplizierte und mühevolle Aufgabe darstellt. Eine solche Untersuchung würde jedoch für charakteristische Beben fraglos ein hohes Interesse bieten.

Wir wollen nun die Anwendung dieser Methode der Analyse des Seismogrammes im Falle der galvanometrischen Registrierung der Bewegung des Seismographen untersuchen. Die Aufgabe wird dadurch noch komplizierter, denn statt einer Differentialgleichung haben wir zwei Gleichungen

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{1}{l}x'' = 0 \tag{110}$$

und

$$\varphi'' + 2n_1\varphi' + n_1^2\varphi + k\theta' = 0. \tag{111}$$

Nach der Voraussetzung ist das Galvanometer genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt, obwohl diese Bedingung bei Anwendung dieser Methode der Kurvenanalyse keine wesentliche Bedeutung hat.

Digitized by Google

Bezeichnet man den Ausschlag des Lichtpunktes von der Ruhelage mit y_1, die Entfernung des Spiegels am Galvanometer von der Fläche der Registriertrommel in der Richtung des normal einfallenden Strahles mit A_1, so ist

$$y_1 = 2A_1\varphi.$$

Multipliziert man die Gleichung (111) mit $2A_1$, so ergibt sich

$$y_1'' + 2n_1y_1' + n_1^2y_1 + 2A_1k\theta' = 0. \tag{112}$$

Nun eliminieren wir aus der Gleichung (112) mit Hilfe der Gleichung (110) die Variable θ. Das führt uns zu einer linearen Differentialgleichung vierter Ordnung für y_1.

Dazu nehmen wir die Derivierte von der Gleichung (112) nach t.

$$y_1''' + 2n_1y_1'' + n_1^2y_1' + 2A_1k\theta'' = 0. \tag{113}$$

Aus der Gleichung (110) erhalten wir

$$\theta'' = -2\varepsilon\theta' - n^2\theta - \frac{1}{l}x'' \tag{114}$$

und aus der Gleichung (112)

$$\theta' = -\frac{1}{2A_1k}[y_1'' + 2n_1y_1' + n_1^2y_1]. \tag{115}$$

Setzen wir nun diesen letzten Ausdruck in die Gleichung (114) ein,

$$\theta'' = \frac{\varepsilon}{A_1k}[y_1'' + 2n_1y_1' + n_1^2y_1] - n^2\theta - \frac{1}{l}x'',$$

und setzen dann diesen Ausdruck für θ'' in die Gleichung (113) ein, so ergibt sich

$$y_1''' + 2(n_1+\varepsilon)y_1'' + (n_1^2 + 4n_1\varepsilon)y_1' + 2\varepsilon n_1^2y_1 - 2A_1kn^2\theta = 2A_1\frac{k}{l}x''.$$

Wir nehmen nochmals die Derivierte dieser Gleichung nach t.

$$y_1'''' + 2(n_1+\varepsilon)y_1''' + (n_1^2 + 4n_1\varepsilon)y_1'' + 2\varepsilon n_1^2y_1' - 2A_1kn^2\theta' = 2A_1\frac{k}{l}x'''.$$

Setzen wir nun hier den Ausdruck für θ' aus der Formel (115) ein, so ergibt sich

$$y_1'''' + 2(\varepsilon + n_1)y_1''' + (n^2 + n_1^2 + 4n_1\varepsilon)y_1'' + 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2)y_1'$$
$$+ n^2n_1^2y_1 = 2\frac{A_1k}{l}x'''. \tag{116}$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} a &= 2(\varepsilon + n_1) \\ b &= (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1) \\ c &= 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2) \\ \partial &= n^2n_1^2 \end{aligned}\right\} \tag{117}$$

Digitized by Google

Dann kann die Gleichung (116) schließlich in folgender Form ausgedrückt werden

$$y_1'''' + ay_1''' + by_1'' + cy_1' + \partial y_1 = \frac{2A_1}{l} kx''' \tag{118}$$

Alle Koeffizienten in dieser Gleichung sind bekannte Größen.

Ist der Seismograph genau auf die Grenze der Aperiodizität eingestellt, so ist $\mu^2 = 0$ und $\varepsilon = n_1$ und wenn außerdem die Eigenperiode T_1 des Galvanometers gleich der Eigenperiode T des Seismographen ohne Dämpfung ist $(n = n_1)$, welche Bedingungen für die Bestimmung des Azimuts des Epizentrums nach der in §1 unseres Kapitels beschriebenen Methode erforderlich sind, so nehmen die Koeffizienten a, b, c und d folgende einfache Werte an:

$$a = 4n$$

$$b = 6n^2$$

$$c = 4n^3$$

$$\partial = n^4.$$

Nun beginnen wir mit der gliedweisen Integration der Gleichung (118).

Wir betrachten gleich einen allgemeineren Fall, indem wir für den Anfang der Zeitzählung einen beliebigen Punkt des Seismogramms wählen und setzen voraus, daß im Moment $t = 0$

$$x = x_1 \qquad x' = x_1'$$

$$y_1 = (y_1)_1 \quad y_1' = (y_1')$$

ist. Außerdem müssen wir noch in diesem Falle den anfänglichen Wert von x'' kennen.

Wir setzen nun voraus, daß im Moment $t = 0$ eine neue seismische Welle aufgetreten ist und daß infolgedessen die neue resultierende anfängliche Geschwindigkeit gleich x_2' und die anfängliche Beschleunigung gleich x_2'' ist.

Die entsprechenden Anfangswerte von y_1 und der Derivierten nach dem Eintreffen einer neuen Welle bezeichnen wir mit

$$(y_1)_2, \ (y_1')_2, \ (y_1'')_2 \quad \text{und} \quad (y_1''')_2.$$

Wir wollen nun diese drei Größen berechnen.

Es bedeute θ_1 den Ausschlag des Seismographen von der Ruhelage im Moment $t = 0$ und θ_1' die entsprechende Winkelgeschwindigkeit der Bewegung vor dem Eintreffen, ferner θ_2 und θ_2' die entsprechenden Größen nach dem Eintreffen der neuen seismischen Welle.

Die Abhängigkeit zwischen θ_2' und θ_1' läßt sich durch gliedweise Integration der Gleichung (110) zwischen den Grenzen $-\frac{\tau}{2}$ und $+\frac{\tau}{2}$ feststellen.

Digitized by Google

Wir haben

$$\theta_2' - \theta_1' + \frac{1}{l}(x_2' - x_1') = 0$$

oder

$$\theta_2' = \theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1'). \tag{119}$$

Anderseits haben wir

$$\theta_2 = \theta_1$$

und

$$(y_1)_2 = (y_1)_1 \tag{120}$$

Integriert man die Gleichung (112) Glied für Glied zwischen denselben Grenzen $-\frac{\tau}{2}$ und $+\frac{\tau}{2}$ und geht dann zur Grenze $\tau = 0$ über, so findet man

$$(y_1')_2 = (y_1')_1. \tag{121}$$

Es erübrigt nun noch $(y_1'')_2$ und $(y_1''')_2$ zu bestimmen.

Die Gleichung (112) gibt uns direkt die Größe $(y_1'')_2$.

$$(y_1'')_2 = -2n_1(y_1')_2 - n_1^2(y_1)_2 - 2A_1 k\theta_2'$$

oder mit Berücksichtigung der Beziehungen (119), (120) und (121)

$$(y_1'')_2 = -2n_1(y_1')_1 - n_1^2(y_1)_1 - 2A_1 k\left\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\right\}. \tag{122}$$

Zur Ermittlung der Größe $(y_1''')_2$ nehmen wir die Derivierte der Gleichung (112) nach t.

$$y_1''' + 2n_1 y_1'' + n_1^2 y_1' + 2A_1 k\theta'' = 0.$$

Hieraus finden wir

$$(y_1''')_2 = -2n_1(y_1'')_2 - n_1^2(y_1')_2 - 2A_1 k\theta_2''$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehungen (121) und (122)

$$(y_1''')_2 = -2n_1\left[-2n_1(y_1')_1 - n_1^2(y_1)_1 - 2A_1 k\left\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\right\}\right] - n_1^2(y_1')_1 - 2A_1 k\theta_2'',$$

oder schließlich

$$(y_1''')_2 = 3n_1^2(y_1')_1 + 2n_1^3(y_1)_1 + 4n_1 A_1 k\left\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\right\} - 2A_1 k\theta_2''. \tag{123}$$

Dieser Ausdruck enthält noch θ_2'', das sich aus der Formel (110) ergibt

$$\theta_2'' = -2\varepsilon\theta_2' - n^2\theta_2 - \frac{1}{l}x_2'',$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (119) und darauf, daß die Winkel θ_2 und θ_1 einander gleich sind

$$\theta_2'' = -2\varepsilon\left\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\right\} - n^2\theta_1 - \frac{1}{l}x_2''.$$

Digitized by Google

Setzt man nun diesen Ausdruck für θ_2'' in die Formel (123) ein, so ergibt sich

$$(y_1''')_2 = 3n_1^2(y_1')_1 + 2n_1^3(y_1)_1$$
$$+ 2A_1 k\Big[2(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\Big\} + n^2\theta_1 + \frac{1}{l}x_2''\Big]. \qquad (124)$$

Die Anfangsbedingungen sind folgende

$$x_0 = x_1 \quad x_0' = x_2' \quad x_0'' = x_2''$$
$$(y_1)_0 = (y_1)_2 \quad (y_1')_0 = (y_1')_2 \quad (y_1'')_0 = (y_1'')_2 \quad \text{und} \quad (y_1''')_0 = (y_1''')_2,$$

wo sich die Anfangswerte der Ordinate (y_1) und ihrer Derivierten aus den Beziehungen (120), (121), (122) und (124) bestimmen lassen.

Wenn im Moment $t = 0$ keine neue seismische Welle eingetreten wäre, so hätten wir gehabt $x_2' = x_1'$ und $x_2'' = x_1''$, und die vorigen Formeln würden eine einfachere Form angenommen haben.

Sind nun diese Bedingungen festgesetzt, so können wir die gliedweise Integration der Gleichung (118) zwischen den Grenzen 0 und t vornehmen; hierbei setzen wir voraus, daß während dieses Zeitraumes keine neue seismische Welle eintritt.

Aus der Gleichung (118) finden wir

$$2\frac{A_1}{l}k(x'' - x_2'') = \{y_1''' - (y_1''')_2\} + a\{y_1'' - (y_1'')_2\} + b\{y_1' - (y_1')_2\}$$
$$+ c\{y_1 - (y_1)_2\} + \delta\int_0^t y_1\,dt$$

oder

$$\frac{2A_1}{l}kx'' = y_1''' + ay_1'' + by_1' + cy_1 + \delta\int_0^t y_1\,dt$$
$$- \Big[(y_1''')_2 + a(y_1'')_2 + b(y_1')_2 + c(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_2''\Big].$$

Der Ausdruck in der eckigen Klammer ist eine konstante Größe.

Wir wollen nun diese Gleichung nochmals zwischen denselben Grenzen 0 und t integrieren.

Dann ergibt sich

$$\frac{2A_1}{l}kx' = y_1'' + ay_1' + by_1 + c\int_0^t y_1\,dt + \delta\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt$$
$$- \Big[(y_1''')_2 + a(y_1'')_2 + b(y_1')_2 + c(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_2''\Big]t$$
$$- \Big[(y_1'')_2 + a(y_1')_2 + b(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_2'\Big].$$

Digitized by Google

Eine ergänzende gliedweise Integration dieser Gleichung zwischen den Grenzen 0 und t liefert uns die gesuchte Größe x.

$$\frac{2A_1}{l}kx = y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt$$
$$-\frac{1}{2}\left[(y_1''')_2 + a(y_1'')_2 + b(y_1')_2 + c(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_2''\right]t^2$$
$$-\left[(y_1'')_2 + a(y_1')_2 + b(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_2'\right]t$$
$$-\left[(y_1')_2 + a(y_1)_2 - \frac{2A_1}{l}kx_1\right].$$

Ersetzt man nun in dieser Gleichung $(y_1)_2$, $(y_1')_2$, $(y_1'')_2$ und $(y_1''')_2$ durch ihre Ausdrücke aus den Gleichungen (120), (121), (122) und (124), so erhält man unter Berücksichtigung der Beziehung (117)

$$\frac{2A_1}{l}kx = y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt$$
$$-\frac{1}{2}\Big[3n_1^2(y_1')_1 + 2n_1^3(y_1)_1 + 4A_1k(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\Big\}$$
$$+ 2A_1kn^2\theta_1 + \frac{2A_1}{l}kx_2'' - 4n_1(n_1+\varepsilon)(y_1')_1 - 2n_1^2(n_1+\varepsilon)(y_1)_1$$
$$- 4A_1k(n_1+\varepsilon)\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\Big\} + (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1')_1$$
$$+ 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_2''\Big]t^2$$
$$-\Big[-2n_1(y_1')_1 - n_1^2(y_1)_1 - 2A_1k\Big\{\theta_1' - \frac{1}{l}(x_2' - x_1')\Big\}$$
$$+ 2(n_1+\varepsilon)(y_1')_1 + (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_2'\Big]t$$
$$-\Big[(y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 - \frac{2A_1}{l}kx_1\Big]$$

oder

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt + c\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1 dt\Big\}$$
$$-\frac{n^2}{2}\{(y_1')_1 + 2n_1(y_1)_1 + 2A_1k\theta_1\}t^2 - \Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1$$
$$-2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big)\Big\}t - \{(y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1\}\Big]. \qquad (125)$$

Diese Formel dient zur Berechnung von x.

Wir sehen, daß diese Gleichung außer y_1 und dessen Derivierten und drei Integralen, von denen das eine ein einfaches, das zweite ein doppeltes und das dritte ein dreifaches ist, noch ein Polynom zweiten Grades enthält.

Bei der Ableitung der Formel (125) haben wir vorausgesetzt, daß im Moment $t = 0$ eine neue Welle eintritt. Aber der Ausdruck (125) enthält

Digitized by Google

gar nicht die Größen x_2' und x_2'' nach dem Eintreten der Welle; folglich können wir als Anfangsmoment $t = 0$ einen ganz willkürlichen Punkt des Seismogramms annehmen. Die Formel (125) ist daher eine allgemeine; die Werte der konstanten Koeffizienten des Polynoms hängen nicht nur von den Konstanten des Seismographen, sondern auch von den Größen x_1', θ_1, θ_1', $(y_1)_1$ und $(y_1')_1$ ab.

Bis jetzt haben wir vorausgesetzt, daß alle Ordinaten richtig gemessen sind.

Wir setzen nun aber voraus, daß die Zeitachse falsch angenommen worden ist. Infolgedessen muß man zu jeder Ordinate y_1 die Korrektion $\alpha + \beta t$ hinzuaddieren.

Dann haben wir in die vorhergehenden Gleichungen

statt	y_1	. . . .	$y_1 + \alpha + \beta t$
"	y_1'	. . . .	$y_1' + \beta$
"	$(y_1)_1$	. . . .	$(y_1)_1 + \alpha$
"	$(y_1')_1$	. . . .	$(y_1')_1 + \beta$

einzusetzen, indem wir unter y_1 die gemessene Ordinate verstehen.

Tut man das, so ergibt sich:

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + \beta + ay_1 + a\alpha + a\beta t + b\int_0^t y_1\,dt + b\alpha t + \frac{1}{2}b\beta t^2$$

$$+ c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \tfrac{1}{2}c\alpha t^2 + \tfrac{1}{6}c\beta t^3 + e\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + \tfrac{1}{6}e\alpha t^3 + \tfrac{1}{24}e\beta t^4\Big\}$$

$$- \frac{n^2}{2}\{(y_1')_1 + \beta + 2n_1(y_1)_1 + 2n_1\alpha + 2A_1k\theta_1\}t^2$$

$$- \Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + 2\varepsilon\beta + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha - 2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big)\Big\}t$$

$$- \{(y_1')_1 + \beta + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 + 2(\varepsilon + n_1)\alpha\}$$

oder unter Berücksichtigung der Beziehung (117),

$$x = x_1 + \frac{l}{2A_1k}\Big[\Big\{y_1' + ay_1 + b\int_0^t y_1\,dt + c\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt + e\int_0^t dt\int_0^t dt\int_0^t y_1\,dt\Big\}$$

$$-\{(y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 + 2(\varepsilon + n_1)\alpha + \beta - \beta - 2(\varepsilon + n_1)\alpha\}$$

$$-\Big\{2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - 2A_1k\Big(\theta_1' + \frac{1}{l}x_1'\Big) + 2\varepsilon\beta + (n^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha$$

$$- 2(\varepsilon + n_1)\beta - (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)\alpha\Big\}t$$

$$- \tfrac{1}{2}\{n^2(y_1')_1 + 2n_1n^2(y_1)_1 + 2n^2A_1k\theta_1 + n^2\beta + 2n_1n^2\alpha$$

$$- (n^2 + n_1^2 + 4\varepsilon n_1)\beta - 2(\varepsilon n_1^2 + n_1n^2)\alpha\}t^2$$

$$+ \tfrac{1}{6}\{c\beta + e\alpha\}t^3$$

$$+ \tfrac{1}{24}e\beta t^4.$$

Digitized by Google

Nach Zusammenfassung der Glieder kann man die unbekannte Größe x durch eine Funktion folgender Form ausdrücken:

$$x = x_1 + \frac{l}{2 A_1 k} [I - P], \tag{126}$$

wo

$$I = y_1' + a y_1 + b \int_0^t y_1 \, dt + c \int_0^t dt \int_0^t y_1 \, dt + \partial \int_0^t dt \int_0^t dt \int_0^t y_1 \, dt \tag{127}$$

und

$$P = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 + Et^4 \tag{128}$$

ist. Die Koeffizienten dieses Polynoms haben folgende Bedeutungen:

$$\left. \begin{aligned} A &= (y_1')_1 + 2(\varepsilon + n_1)(y_1)_1 \\ B &= 2\varepsilon(y_1')_1 + (n^2 + 4\varepsilon n_1)(y_1)_1 - 2 A_1 k \left(\theta_1' + \frac{1}{l} x_1'\right) - n_1^2 \alpha - 2 n_1 \beta \\ C &= \tfrac{1}{2} \{ n^2 (y_1')_1 + 2 n_1 n^2 (y_1)_1 + 2 n^2 A_1 k \theta_1 - 2 \varepsilon n_1^2 \alpha - (n_1^2 + 4 \varepsilon n_1) \beta \} \\ D &= - \tfrac{1}{6} \{ \partial \alpha + c \beta \} \\ E &= - \tfrac{1}{24} \partial \beta \end{aligned} \right\} \tag{129}$$

Die Formel (126) zeigt, daß die Funktion I unbedingt ein Polynom enthält, sonst würde x mit dem Zunehmen von t unbegrenzt anwachsen, was dem Wesen der Sache nach unmöglich ist.

Die Analyse eines Seismogramms bei galvanometrischer Registrierung wird ganz so ausgeführt wie bei der optischen Registriermethode und zwar werden die Koeffizienten des Polynoms P, von denen der eine beim Eintreten jeder neuen Welle seinen Wert ändert, nicht voraus berechnet, sondern direkt aus dem Versuch bestimmt.

Dazu muß man nach der Methode der mechanischen Quadratur zuerst die Funktion I bestimmen.

Trägt man sie graphisch auf und zieht durch die erhaltene Kurve die oben erwähnte mittlere Kurve, die aus einzelnen Zweigen besteht, so erhält man nichts anderes, als das Polynom P, welches man von I abziehen muß, um gemäß der Formel (126) x zu erhalten. Die singulären Punkte der Kurve P entsprechen den Momenten des Eintreffens neuer seismischer Wellen.

Die Größe x_1 in dem Ausdrucke (126) läßt sich nach derselben Methode wie bei der direkten optischen Registrierung bestimmen.

Die Anwendung der Methode der gliedweisen Integration bei der galvanometrischen Registrierung erfordert allerdings eine weitläufige Quadratur. Außerdem enthält der Ausdruck I noch die Derivierte y_1' (s. Form. (127)). Letzteres ist aber von keiner wesentlichen Bedeutung, denn man kann, wie A. Orlov gezeigt hat, unter Anwendung einer besonderen Ausgleichungsmethode, die verschiedene Unregelmäßigkeiten ausgleicht, eine beliebige, empirisch erhaltene Kurve immer differentiieren. Dieser Differentiation kann man auch vollständig ausweichen, wenn man die verschiedenen Momente t,

Digitized by Google

bis zu denen die Integration ausgeführt wird, so auswählt, daß sie den einzelnen Maxima oder Minima der Seismogrammkurve entsprechen. Dann ist in diesen Punkten y_1' gleich Null und die Berechnung der Derivierten fällt für diese Momente ganz weg.

Wir erhalten so eine Reihe von Näherungswerten von x, nach denen man sehr gut die Kurve der wahren Bodenbewegung $x = f(t)$ konstruieren kann.

Wenn auch die Analyse der Seismogramme bei der galvanometrischen Registrierung komplizierter ist, so wird dieses doch bis zu einem gewissen Grade durch die größere Deutlichkeit der Kurven kompensiert; es ist nämlich der prozentuale Fehler in der Messung der Ordinaten der Kurve kleiner.

Es bleibt jedoch die Analyse der Seismogramme nach der Methode der gliedweisen Integration sowohl bei der optischen als auch bei der galvanometrischen Registrierung stets ein ekomplizierte und mühevolle Aufgabe.

Elftes Kapitel.

Untersuchungen der Schwankungen der Lotlinie unter dem Einflusse der Attraktion der Sonne und des Mondes.

Im IV. Kapitel haben wir gesehen, daß die Lotlinie unter dem Einfluß der Attraktion der Sonne und des Mondes ihre Lage ändert; jedoch ist diese Ablenkung ψ der Lotlinie von ihrer normalen Lage sehr klein.

Wäre die Erde ein absolut starrer Körper, so würden wir mittels zweier senkrecht zueinander an der Erdoberfläche aufgestellter Horizontalpendel von genügender Empfindlichkeit die Schwankungen der Lotlinie messen können.

Bei normaler Lage der Lotlinie steht diese senkrecht auf der Horizontebene, durch die Attraktion eines Himmelskörpers verändert sie jedoch ihre Lage und bildet mit dem Horizont den Winkel $90^0 - \psi$. Für die Wirkung auf die Horizontalpendel bedeutet dieses dasselbe, als wenn die Erdoberfläche sich gegen die Richtung der Lotlinie um den Winkel ψ geneigt hätte. Wir haben aber schon im V. Kapitel gesehen, daß die Horizontalpendel solche langsamen Bodenneigungen zu messen gestatten.

Wenn die Erdoberfläche um eine zum Pendelarm parallele Achse um den Winkel ψ sich geneigt hat, so wird das Pendel um den Winkel θ aus seiner Ruhelage abgelenkt, wobei nach Formel (17) Kap. V

$$\theta = \frac{\psi}{i} \tag{1}$$

ist. Hier bedeutet i den Winkel, den die Drehungsachse des Pendels mit der normalen Lage der Lotlinie bildet.

Digitized by Google

In Kap. VII ist gezeigt, wie man i unmittelbar durch Versuche bestimmen kann.

Aus der Formel (6) des VII. Kapitels folgt,

$$i = n^2 \frac{l}{g}, \tag{2}$$

wo l die bekannte reduzierte Pendellänge und g die Beschleunigung der Schwerkraft ist.

Bezeichnet man die Eigenperiode der Schwingungen des Pendels ohne Dämpfung mit T, so ist

$$n = \frac{2\pi}{T}.$$

Setzt man nun diese Größe in die Formel (2) ein, so ergibt sich

$$i = \frac{4\pi^2 \cdot l}{g} \cdot \frac{1}{T^2}. \tag{3}$$

Zur Erhöhung der Genauigkeit dieser Beobachtungen hat man den Winkel i möglichst klein zu machen, d. i. die Eigenperiode des Pendels T zu verlängern. Die Bewegung des Pendels muß man bei diesen Beobachtungen stets optisch registrieren. Die mechanische Registriermethode ist deswegen nicht zulässig, weil sie verschiedene fälschende Einflüsse, wie die Reibung der Schreibfeder am Papier, einführt, und die galvanometrische Methode kann in diesem Falle nicht zur Anwendung kommen, weil die langsamen Schwankungen der Lotlinie oder die entsprechenden relativen Bodenneigungen zur Klasse der bradyseismischen Erscheinungen gehören, bei denen infolge der äußerst geringen Winkelgeschwindigkeit der Bewegung des Pendels die Induktionsströme so schwach sind, daß auch die empfindlichsten Galvanometer sie nicht zu messen gestatten.

Bezeichnet man den Ausschlag des Lichtpunktes auf der Registrierwalze von seiner Ruhelage, die der normalen Lage der Lotlinie entspricht, mit y, die Entfernung des Spiegels am Pendel bis zur Oberfläche der Registrierwalze in der Richtung des normal einfallenden Strahles mit A, so ergibt sich

$$\theta = \frac{y}{2A}.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (1) ein, so ergibt sich

$$y = \frac{2A}{i} \cdot \psi$$

oder

$$\psi = \frac{i}{2A} \cdot y. \tag{4}$$

Nach dieser Formel lassen sich die Winkel ψ aus den Beobachtungen bestimmen.

Um die Größe y messen zu können, muß man die Lage der Nullinie gleichzeitig registrieren, wozu ein Spiegel, der fest an dem Pendelstativ

angebracht ist, dient. Bei diesen Untersuchungen genügt eine geringe Registriergeschwindigkeit.

Wäre jedoch der Erdball nicht starr, sondern besäße er die Eigenschaften eines flüssigen Körpers, so würde seine Oberfläche stets eine zur Richtung der Lotlinie normale Lage annehmen. Es würden also in diesem Falle gar keine Änderungen der Richtung der Lotlinie zu beobachten sein, und die Beobachtungen würden stets $\psi = 0$ ergeben.

Der maximale Wert des Winkels ψ, den wir mit ψ_m bezeichnen wollen, wird also bei einer absolut starren Erde beobachtet werden. Die Größe dieses Winkels wird bestimmt durch die Stellung von Sonne und Mond in bezug auf den Beobachtungsort. Dieser Winkel kann nun theoretisch für einen jeden gegebenen Moment t berechnet werden. Vergleicht man diesen Wert von ψ_m mit dem beobachteten ψ, so kann man interessante und wichtige Schlüsse in betreff der elastischen Eigenschaften des Erdballes ziehen und bestimmen, welchen Widerstand sie ihren Formveränderungen entgegensetzen.

Wir wollen nun untersuchen, wie der Winkel ψ_m berechnet werden kann.

Der erste, der die Aufmerksamkeit der Astronomen darauf hinlenkte, daß die Richtung der Lotlinie nicht konstant bleibt, sondern unter dem Einfluß der Attraktion verschiedener Himmelskörper sich ändert, war der berühmte Mathematiker Abel.

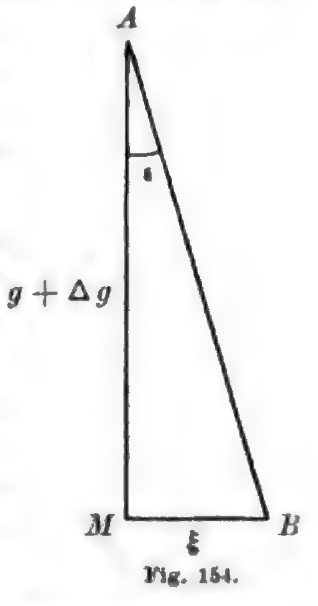


Fig. 154.

Betrachten wir im folgenden die Einwirkung irgendeines Himmelskörpers, z. B. des Mondes, auf die Lage der Lotlinie und setzen wir dabei voraus, daß die Erde ein absolut starrer Körper ist. Nehmen wir weiter an, daß die Lotlinie immer sofort eine Lage annimmt, die mit der Richtung der Resultierenden aller auf die Masseneinheit in dem betreffenden Punkte der Erdoberfläche einwirkenden Kräfte übereinstimmt.

Wenn auf die Masseneinheit nur die Schwerkraft einwirkte, so würde die Lotlinie die normale Lage MA annehmen (Fig. 154). Sie entspricht der Resultante der Anziehungskraft aller einzelnen Massenteile der Erde auf die Masseneinheit an der Erdoberfläche und der Zentrifugalkraft, die durch die Rotation der Erde um ihre Achse entsteht.

Infolge der Attraktion des Mondes wird die Richtung der Lotlinie mit der Richtung der Diagonalen AB des Rechtecks, dessen eine Seite MA gleich $g + \Delta g$ und dessen andere $MB = \xi$ ist, zusammenfallen, wo g die Beschleunigung der Schwerkraft, Δg die vertikale und ξ die horizontale Komponente der anziehenden Kraft des Mondes, auf die Masseneinheit berechnet, bedeuten.

Es sei ε der Winkel, den die neue Lage der Lotlinie mit ihrer normalen Lage bildet.

Aus dem Dreieck MAB ergibt sich

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\xi}{g + \Delta g}$$

Digitized by Google

oder angesichts der Kleinheit von ξ und Δg

$$\varepsilon = \frac{\xi}{g}. \qquad (5)$$

Wir wollen nun ξ berechnen.

Es bedeute in Fig. 155 T das Erdzentrum, M den Beobachtungsort, MZ die Richtung nach dem Zenit und L den Mondmittelpunkt.

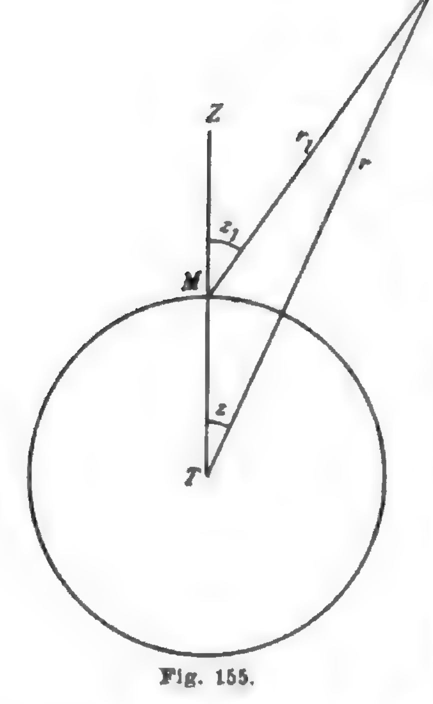


Fig. 155.

Die Entfernung LM bezeichnen wir ferner mit r_1 und LT mit r und die geozentrische und die beobachtete Zenitdistanz mit z und z_1.

Bei der Berechnung von ξ ist zu berücksichtigen, daß der Mond nicht nur das Pendel, sondern auch die ganze Erde anzieht; wenn daher die Anziehungskraft des Mondes in den Punkten M und T der Richtung und Größe nach ganz gleich wäre, so würden wir keine Ablenkung der Lotlinie beobachten, denn die Größe der in den Punkten M und T auftretenden Beschleunigung wäre dieselbe. Es hängt folglich die Änderung der Lotlinie nur von der Differenz der Attraktion des Mondes auf das Pendel und der Attraktion auf die Erde (die Flutwirkung) ab, wobei die Größen dieser Attraktionen auf die Masseneinheit bezogen sind.

Nimmt man der Einfachheit halber als Masseneinheit die Masse der Erde an und bezeichnet die Masse des Mondes mit m, die Newtonsche Gravitationskonstante mit f, so findet man, daß ξ die Differenz der horizontalen Komponenten zweier Kräfte $f\frac{m}{r_1^2}$ und $f\frac{m}{r^2}$, jede auf Masseneinheit wirkend, ist.

Folglich ist

$$\xi = f\frac{m}{r_1^2}\sin z_1 - f\frac{m}{r^2}\sin z. \qquad (6)$$

Von der Richtigkeit des eben erwähnten kann man sich folgendermaßen überzeugen.

Die Größe $f\frac{m}{r^2}\sin z$ ist die wahre Größe der Beschleunigung der Bewegung des Erdzentrums unter dem Einfluß der Attraktion des Mondes in der Richtung senkrecht zur Linie TZ.

Dieselbe Beschleunigung hat auch der Punkt M, weil wir die Erde als absolut starren Körper betrachten.

Die Pendelmasse, die gleichsam mit der Erde verbunden ist, wird in derselben Richtung senkrecht zu MZ die Beschleunigung $f\frac{m}{r_1^2}\sin z_1$ besitzen.

Also ist die relative Beschleunigung des Pendels in bezug auf die Erdoberfläche, die wir nur beobachten können, gleich der Differenz der ge-

Digitized by Google

nannten Beschleunigungen. Alles, was für die Beschleunigungen gilt, gilt auch für die entsprechenden Kräfte, die auf die Masseneinheit wirken.

Setzen wir den Erdradius gleich der Einheit, d. h. $MT = 1$, dann ergibt sich bei den angenommenen Bezeichnungen, indem wir $m = 1$ und $r = 1$ setzen,

$$f = g. \tag{7}$$

Aus Fig. 155 folgt, daß

$$r_1 \sin z_1 = r \sin z$$

oder

$$\sin z_1 = \frac{r}{r_1} \sin z$$

ist. Andererseits ist

$$r_1^2 = r^2 + 1 - 2r \cos z = r^2 \left(1 - \frac{2 \cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right). \tag{8}$$

Folglich ist nach der Formel (6)

$$\xi = f \frac{m r \sin z}{r_1^3} - f \frac{m \sin z}{r^2} = f \frac{m \sin z}{r^2} \left[\frac{r^3}{r_1^3} - 1\right]. \tag{9}$$

Aus der Formel (8) folgt

$$\frac{r^2}{r_1^2} = \left[1 - \frac{2 \cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right]^{-1}$$

oder

$$\frac{r^3}{r_1^3} = \left[1 - \frac{2 \cos z}{r} + \frac{1}{r^2}\right]^{-\frac{3}{2}}.$$

Entwickelt man diesen Ausdruck in eine Reihe und behält nur die Glieder erster Ordnung $\left(\frac{1}{r} \text{ ist ungefähr gleich } \frac{1}{60}\right)$ bei, so ergibt sich

$$\frac{r^3}{r_1^3} = 1 + 3 \frac{\cos z}{r}.$$

Setzt man diese Größe in die Formel (9) ein, so ergibt sich

$$\xi = f \frac{m \sin z}{r^3} \cdot 3 \cos z = \frac{3}{2} f \frac{m \sin 2z}{r^3}. \tag{10}$$

Bezeichnet man noch die horizontale Parallaxe des Mondes, d. h. den Winkel, unter welchem man vom Monde aus den Erdradius senkrecht zur Gesichtslinie sieht, mit p, so ergibt sich

$$r = \frac{1}{\sin p}. \tag{11}$$

Ersetzt man nun in der Formel (10) die Größe f durch g (Formel (7)), so erhält man schließlich

$$\xi = \tfrac{3}{2} g m \cdot \sin^3 p \cdot \sin 2z. \tag{12}$$

Diese Formel ist zuerst von Peters angegeben worden.

Setzt man diese Größe in die Formel (5) ein, so ergibt sich

$$\varepsilon = \tfrac{3}{2} m \sin^3 p \cdot \sin 2z$$

oder in Bogensekunden

$$\varepsilon'' = \frac{3}{2} \cdot \frac{m \sin^3 p}{\sin 1''} \cdot \sin 2z. \tag{13}$$

Die Formel (13) zeigt, daß die maximale Ablenkung der Lotlinie ε''_m dem Falle entspricht, wenn die Zenitdistanz $z = 45^0$ ist.

Also haben wir

$$\varepsilon''_m = \frac{3}{2} \cdot \frac{m \sin^3 p}{\sin 1''}. \tag{14}$$

Für den Mond ist $m = \frac{1}{81}$, p im Mittel 57′; folglich

$$\varepsilon''_m = 0'',017.$$

Für die Sonne ist $m = 329000$, p im Mittel 8″,8; folglich

$$\varepsilon''_m = 0'',008.$$

Wir sehen somit, daß die maximale anziehende Wirkung der Sonne nur ungefähr halb so groß ist als die des Mondes.

Wir wollen nun sehen, wie die Änderung der Richtung der Lotlinie auf die Gleichgewichtslage des Pendels einwirkt.

Wir setzen wiederum voraus, daß das Horizontalpendel in jedem Moment die entsprechende Gleichgewichtslage annimmt.

In der nebenstehenden Fig. 156 bedeutet $O_1 Z_1$ die Richtung der normalen und OZ die Richtung der gestörten Lage des Lotes.

Fig. 156.

Fig. 157.

Die Ablenkung des Lotes geschieht immer in der Ebene, die durch die Richtung nach dem Zenit und die Richtung nach dem Gestirn geht, also in der Ebene des Azimuts des Gestirns, und immer in der Richtung nach dem Gestirn hin.

Es sei nun in Fig. 157 P der Pol, Z_1 die Lage der ungestörten Lotlinie, Z die der durch das Gestirn abgelenkten Lotlinie, J die der Drehungsachse des Horizontalpendels und L der Mond. Die Ablenkung des Lotes geht in der Ebene, die durch Z_1 und L hindurchgeht, d. h. in der Ebene ZZ_1 vor sich, wo bei Voraussetzung eines absolut starren Erdkörpers der Bogen $ZZ_1 = \varepsilon$ ist.

Digitized by Google

Zählt man das Azimut wie die Stundenwinkel von 0° bis 360° von der Südrichtung aus und bezeichnet mit α das Azimut des Mondes, so ist der Winkel

$$SZ_1Z = \alpha - 180^0.$$

Wir setzen voraus, daß das Horizontalpendel im Azimut $\alpha_0 = SZ_1J$ aufgestellt ist. Unter Ebene der Aufstellung des Pendels ist dabei die Ebene verstanden, welche durch die Richtung nach dem ungestörten Zenit und durch die Drehungsachse des Pendels hindurchgeht.

In Fig. 157 ist das die Ebene Z_1J, wo der Bogen $Z_1J = i$ der Winkel ist, den die Richtung der Drehungsachse mit der Vertikale bildet.

Bei ungestörter Lage des Zenits liegt der Schwerpunkt des Pendels bei Gleichgewicht in der Ebene Z_1J; bei der neuen Lage des Zenits verlegt sich der Schwerpunkt in die Ebene ZJ, d. h. das Pendel dreht sich um seine Achse um den Winkel

$$Z_1JZ = \theta.$$

In dem sphärischen Dreieck Z_1JZ haben wir

$$\frac{\sin\theta}{\sin(\alpha - \alpha_0 - 180^0)} = \frac{\sin\varepsilon}{\sin ZJ}.$$

Infolge der Kleinheit der Winkel ε und θ können wir $ZJ = i$ setzen. Ersetzt man die Sinusse der kleinen Winkel durch die Winkel selbst, so ergibt sich

$$\theta = -\frac{\varepsilon}{i}\cdot\sin(\alpha - \alpha_0). \tag{15}$$

Der entsprechende Ausschlag des Lichtpunktes auf der Trommel wird nach dem vorhergehenden

$$y = 2A\theta$$

oder

$$y = -\frac{2A\varepsilon\sin(\alpha - \alpha_0)}{i}. \tag{16}$$

Wir drücken den Winkel ε in Bogensekunden aus und setzen $y = 1$ mm. Dann ergibt sich aus der Formel (16)

$$\varepsilon''\sin(\alpha - \alpha_0) = -\frac{i}{2A\sin 1''}$$

oder, i in Bogensekunden ausgedrückt,

$$\varepsilon''\sin(\alpha - \alpha_0) = -\frac{i''}{2A}. \tag{17}$$

Setzt man $\alpha - \alpha_0 = 90^0$, so erhält man unabhängig vom Zeichen,

$$\varepsilon'' = \frac{i''}{2A}.$$

Digitized by Google

Diese Größe heißt der Wert eines Millimeters auf der Trommel oder die Reduktionskonstante. Wir haben bereits früher gesehen, wie man den Winkel i durch den Versuch bestimmen kann; diese Größe ist folglich bekannt.

Drückt man ε und i in Bogensekunden aus, so kann die Formel (16) in folgender Form ausgedrückt werden:

$$y = -\frac{2A\varepsilon'' \sin(\alpha - \alpha_0)}{i''}.$$

Wir setzen nun voraus, daß wir zwei Horizontalpendel haben, von denen das eine im Meridian ($\alpha_0 = 0^0$) und das andere im ersten Vertikal ($\alpha_0 = 90^0$) aufgestellt ist.

Fig. 158.

Die entsprechenden Ausschläge der Lichtpunkte auf der Registriertrommel bezeichnen wir mit y_M und y_V.

Berücksichtigt man, daß im Falle des absolut festen Erdkörpers nach den Formeln (13) und (14)

$$\varepsilon'' = \varepsilon''_m \sin 2z$$

ist und führt noch zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein

$$\omega = -\frac{2A\varepsilon''_m}{i''}, \tag{18}$$

so ergibt sich auf Grund der vorhergehenden Formel für das Pendel im Meridian

$$y_M = \omega \sin\alpha \cdot \sin 2z \tag{19}$$

und für das Pendel im ersten Vertikal

$$y_V = -\omega \cos\alpha \cdot \sin 2z. \tag{20}$$

Wir wollen nun α und z durch die Deklination δ und den Stundenwinkel des Mondes t ausdrücken.

In der in Fig. 158 dargestellten stereographischen Projektion auf den Horizont ist Z der Zenit des Ortes, P der Pol, der Bogen WME der Himmelsäquator, BAC der Deklinationskreis des Mondes ($AM = \delta$), NZS der Meridian des Ortes, L die Lage des Mondes, der Winkel LZM das Azimut des Mondes α, der Winkel LPM der entsprechende Stundenwinkel t und LZ die Zenitdistanz z des Mondes.

Die Breite φ des Ortes ist der Bogen $ZM = PN$.

In dem sphärischen Dreieck PLZ, wo

$$PL = 90^0 - \delta,$$
$$PZ = 90^0 - \varphi,$$
$$ZL = z$$

ist, haben wir

$$\cos z = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t \tag{21}$$

und

$$\frac{\sin\alpha}{\sin t} = \frac{\cos\delta}{\sin z}$$

oder

$$\sin\alpha \sin z = \cos\delta \cdot \sin t. \tag{22}$$

Aus der Formel (22) folgt

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \frac{\cos^2\delta \sin^2 t}{\sin^2 z}$$

oder

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = 1 - \cos^2 z - \cos^2\delta \sin^2 t.$$

Wir setzen hierin den Ausdruck $\cos z$ aus der Formel (21) ein.
Dann ergibt sich

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = 1 - \sin^2\delta \sin^2\varphi - \cos^2\delta \cos^2\varphi \cos^2 t - 2\sin\delta \sin\varphi \cos\delta \cos\varphi \cos t$$
$$- \cos^2\delta (1 - \cos^2 t)$$

oder

$$\cos^2\alpha \sin^2 z = (1 - \cos^2\delta) - \sin^2\delta \sin^2\varphi + \cos^2\delta \cos^2 t (1 - \cos^2\varphi)$$
$$- 2\sin\delta \sin\varphi \cos\delta \cos\varphi \cos t$$
$$= \sin^2\delta \cos^2\varphi + \cos^2\delta \sin^2\varphi \cos^2 t - 2\sin\delta \cos\varphi \cos\delta \sin\varphi \cos t$$
$$= [\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos t]^2,$$

folglich

$$\cos\alpha \sin z = \pm [\sin\delta \cos\varphi - \cos\delta \sin\varphi \cos t].$$

Um zu entscheiden, welches Zeichen wir zu nehmen haben, setzen wir $\alpha = 0$; dann ist $t = 0$ und L fällt mit A zusammen, wobei

$$z = ZM - \delta = \varphi - \delta$$

ist. Daraus ist zu ersehen, daß das Zeichen $-$ zu nehmen ist.
Also

$$\cos\alpha \sin z = -\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t. \tag{23}$$

Die Formeln (19) und (20) enthalten nicht $\sin z$, sondern $\sin 2z$.
Da

$$\sin 2z = 2 \sin z \cos z$$

ist, so erhalten wir auf Grund der Formeln (21), (22), (23)

$$\sin\alpha \sin 2z = 2\sin\alpha \sin z \cos z$$
$$= 2\cos\delta \sin t \{\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t\}$$
$$= \sin\varphi \sin 2\delta \cdot \sin t + \cos\varphi \cos^2\delta \cdot \sin 2t.$$

Digitized by Google

Andererseits ist (Formel (21) und (23))

$$\cos\alpha \sin 2z = 2\cos\alpha \sin z \cos z$$
$$= 2[-\cos\varphi \sin\delta + \sin\varphi \cos\delta \cos t][\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos t]$$
$$= -\sin^2\delta \sin 2\varphi + \{\sin^2\varphi \sin 2\delta - \cos^2\varphi \sin 2\delta\} \cos t$$
$$+ \cos^2\delta \sin 2\varphi \cos^2 t.$$

Berücksichtigt man noch, daß

$$\cos^2 t = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos 2t$$

und

$$\sin^2\varphi - \cos^2\varphi = 1 - 2\cos^2\varphi = 1 - (1 + \cos 2\varphi) = -\cos 2\varphi$$

ist, so ergibt sich

$$\cos\alpha \sin 2z = [-\sin^2\delta \sin 2\varphi + \tfrac{1}{2}\cos^2\delta \sin 2\varphi] - \sin 2\delta \cos 2\varphi \cos t$$
$$+ \tfrac{1}{2}\cos^2\delta \sin 2\varphi \cos 2t.$$

Setzt man nun die gefundenen Ausdrücke für $\sin\alpha \sin 2z$ und $\cos\alpha \sin 2z$ in die Formel (19) und (20) ein, so ergibt sich

$$y_M = \omega \sin\varphi \sin 2\delta \cdot \sin t + \omega \cos\varphi \cos^2\delta \cdot \sin 2t \tag{24}$$

und

$$y_V = \omega \sin 2\varphi \{\sin^2\delta - \tfrac{1}{2}\cos^2\delta\} + \omega \cos 2\varphi \sin 2\delta \cdot \cos t$$
$$- \tfrac{1}{2}\omega \sin 2\varphi \cos^2\delta \cdot \cos 2t. \tag{25}$$

Dies sind die Ausdrücke für die Ausschläge der Lichtpunkte bei den beiden Pendeln.

Wir sehen daraus, daß y_M und y_V ganztägige (mit $\sin t$ oder $\cos t$) und halbtägige Glieder (mit $\sin 2t$ und $\cos 2t$) enthalten. Wenn auch ein jedes Gestirn solche Bewegungen hervorbringt, so sind doch nur die der Sonne und des Mondes von Bedeutung. Wir wollen uns daher auf die Untersuchung der Sonnen- und Mondglieder, und zwar der halbtägigen und ganztägigen beschränken.

Die Absonderung dieser Glieder erfolgt durch die Methode der harmonischen Analyse[60]), deren Grundzüge im folgenden kurz gegeben werden sollen.

Man gruppiert zuerst die Beobachtungen nach Sonnenzeit und nimmt das Mittel aller Ordinaten, welche einem und demselben Stundenwinkel der Sonne entsprechen. Diesem bestimmten Stundenwinkel entsprechen bei einer genügend großen Zahl von Beobachtungen die verschiedensten Stundenwinkel des Mondes; folglich verschwinden im Mittel die Mondglieder und es bleiben nur die Sonnenglieder zurück.

Zur Absonderung der Mondglieder gruppiert man nun die Beobachtungen nach dem Stundenwinkel des Mondes; dann verschwinden im Mittel die Sonnenglieder.

Es sei noch besonders darauf hingewiesen, daß bei einer großen Anzahl von Beobachtungen auch die ganztägigen Mondglieder verschwinden,

Digitized by Google

denn bei $\cos t$ und $\sin t$ steht als Faktor $\sin 2\delta$, der im Laufe eines Monats positive und negative Werte annimmt.

Es gestatten also die Beobachtungen mit Horizontalpendeln den numerischen Wert (unabhängig vom Zeichen) des Koeffizienten ω (Formel (18)) und hieraus die Größe der Konstante ε_m'' zu bestimmen.

Für den Mond ist bei Annahme eines absolut starren Erdkörpers

$$\varepsilon_m'' = 0'',017.$$

Die Horizontalpendel ergeben für ε_m'' einen Wert, der etwa $\frac{2}{3}$ des theoretischen Wertes entspricht. Daraus ist zu schließen, daß der Erdkörper kein absolut starrer Körper ist, sondern daß er unter dem Einflusse der Attraktion des Mondes und der Sonne sich etwas deformiert.

Nach diesen Beobachtungen kann man sagen, daß sich der Erdball als Ganzes betrachtet seinen elastischen Eigenschaften nach etwa verhält wie eine gleich große Kugel aus Stahl.

Die Beobachtungen zeigen ferner, daß die Glieder, die von der Attraktion der Sonne abhängen, stark von verschiedenen meteorologischen Faktoren verdeckt werden, die einen ganztägigen Gang haben; sie verursachen Bewegungen des Pendels, die ebenfalls eine tägliche Periode enthalten.

Dieser Umstand ist durchaus bei der Bearbeitung der Beobachtungen zu berücksichtigen. Außerdem ist ebenfalls die Änderung der Deklination δ selbst in Betracht zu ziehen.

Für einen kleinen Zeitraum, etwa 24 Stunden, kann man δ mit t proportional annehmen.

Infolge dieser Gründe sollte man z. B. y_m besser durch eine Funktion folgender Form ausdrücken:

$$y_M = a + bt + B_1 \sin t + B_2 \sin 2t, \tag{26}$$

wo a, b, B_1 und B_2 Konstanten sind (für kleine Zeiträume), welche aus den Beobachtungen sich bestimmen lassen. Die Erfahrung lehrt, daß a und b sehr bedeutend sind und nicht so sehr von astronomischen Einflüssen wie von den verschiedenen meteorologischen Faktoren abhängen.

Die Summe der unperiodischen Glieder $a + bt$ in der Gleichung (26) bestimmt die Bewegung des Nullpunktes des Horizontalpendels.

Der meteorologische Einfluß der Sonne besteht unter anderem in der Erwärmung der oberen Erdschichten, wodurch Bewegungen des Horizontalpendels veranlaßt werden, die nichts mit der Attraktionswirkung gemein haben. Man muß daher bei den Beobachtungen über die Deformation der Erde die Pendel in einer größeren Tiefe unter der Erdoberfläche aufstellen. Es scheinen hierbei jedoch auch lokale Verhältnisse eine Rolle zu spielen, denn der Raum der seismischen Station in Dorpat, in dem Orlov seine Beobachtungen anstellte, ein alter Pulverkeller unter dem Domberg, erwies sich als sehr günstig, obwohl er nicht in großer Tiefe liegt. Die Beobachtungen, die in Freiberg in Sachsen in einer Tiefe von 189 m unter der Erdoberfläche angestellt wurden, zeigten dagegen, daß der Einfluß der ganztägigen Sonnenwelle auch in dieser Tiefe noch bemerkbar ist, obwohl

Digitized by Google

von einer täglichen Temperaturschwankung in einer solchen Tiefe gewiß keine Rede sein kann. Ein merkwürdiges Resultat ergaben die Beobachtungen in einem Schacht in Přibam in etwa 1100 m Tiefe unter der Erdoberfläche; es wurde hier nämlich eine Bewegung des ganzen Bergmassivs beobachtet, so daß die Station trotz ihrer großen Tiefe für die Untersuchungen der Deformationen der Erde sich als gänzlich unbrauchbar erwies.

Man ersieht hieraus, daß Untersuchungen dieser Art infolge der außerordentlichen Kleinheit der zu messenden Größe und des Einflusses verschiedener anderer Faktoren eine schwierige Aufgabe bilden.

Hecker hat seine Beobachtungen in Potsdam zuerst mit Pendeln nach v. Rebeur-Paschwitz mit Aufhängung auf Spitzen ausgeführt, Orlov dagegen mit Zöllnerschen Pendeln.

Die letztere Art von Pendeln ist wegen ihrer besonderen Empfindlichkeit, der Unabhängigkeit ihrer Periode von der Amplitude und der Abwesenheit der Reibung und des Druckes an den Spitzen für diese Aufgaben geeigneter, wie sich auch durch spezielle Vergleichsbeobachtungen mittels beider Arten, die von Hecker unternommen wurden, herausgestellt hat; an einzelnen russischen Stationen hat man schon früher die Vorzüge der Zöllnerschen Aufhängung erkannt. Übrigens wird in neuester Zeit eine längere Reihe von Beobachtungen mit beiden Pendelarten an der seismischen Station in Freiburg in Baden durchgeführt, deren Resultate noch nicht vorliegen.

Auf die Einzelheiten der Ausführung der Deformationsbeobachtungen wollen wir hier nicht eingehen. Es sind diese in den beiden Arbeiten: Hecker, „Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einflusse von Sonne und Mond", I. und II. Heft, Veröffentlichung des Königlich-Preußischen Geodätischen Instituts. Neue Folge, Nr. 32 und 49, Berlin 1907 und 1911, und Orlov, „Erste Reihe von Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation der Erde unter dem Einfluß des Mondes", Dorpat 1911, Dissertation, zu finden. Eine eingehende Anleitung zur Bearbeitung solcher Beobachtungen gibt die Arbeit von Schweydar, „Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond". Veröffentlichung des Königlich-Preußischen Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 59. Berlin 1914.

Es seien hier die wichtigsten, bisher erzielten Beobachtungsresultate kurz mitgeteilt. Betrachten wir zunächst die Phase der Deformationswelle. Alle neueren Beobachtungen ergeben, daß sie sehr klein ist. Wir können daraus also den sicheren Schluß ziehen, daß die innere Reibung bei der Deformation des Erdkörpers sehr klein ist. Es besteht hier somit eine erhebliche Abweichung gegenüber den Gezeiten des Meeres. Die Eintrittszeit der Flut fällt hier durchaus nicht immer zusammen mit dem Durchgang des Mondes durch den Meridian, sondern zeigt gegen dieselbe eine Differenz, die Hafenzeit genannt, die je nach der Lage des Beobachtungsortes bis zu 12 Stunden betragen kann. Die Art der Bildung der Meeresbecken und der Verteilung der Kontinente bewirken diesen Unterschied. Während also die statische Theorie der Ebbe und Flut auf die Meeresgezeiten keinesfalls

Digitized by Google

angewandt werden darf, läßt sie sich für die Untersuchungen der Deformation der Erde anwenden.

Wenn es die räumlichen Verhältnisse gestatten, was bei den Beobachtungen Heckers nicht zutraf, werden die Pendel in der Meridianebene und dem I. Vertikal aufgestellt.

Wir wollen hier auszugsweise einige Zahlen wiedergeben, die sich aus den Beobachtungen an dem in Dorpat von Orlov im I. Vertikal aufgestellten Pendel ergeben haben und zwar wollen wir zunächst die halbtägige Mondwelle ableiten.

Nach den Vorschriften der Methode der harmonischen Analyse werden die Beobachtungen zunächst nach Mondzeit geordnet und es wird hierauf das Mittel aus den Ordinaten y_r für eine jede Mondstunde t gebildet; es wird dann weiter das Mittel aus je zwei mittleren Werten der Ordinaten für die Momente t und $12 + t$ gebildet.

Umfassen die Beobachtungen einen genügend langen Zeitraum, so verschwinden die ganztägigen Glieder mit $\cos t$ (Formel (25)); andererseits entsprechen 12 Stunden dem Stundenwinkel π; folglich ist

$$\cos 2(t + \pi) = \cos 2t.$$

Der Koeffizient von $\cos 2t$ enthält nach Formel (25) außer dem Faktor $\frac{1}{2}\omega \sin 2\varphi$ noch den mittleren Wert $[\cos^2 \delta]_m$ für den ganzen Zeitraum der Beobachtungen. Diese Größe ist bekannt.

Die Beobachtungen in Dorpat haben folgende Werte für y_r geliefert.

Pendel im I. Vertikal.

t →	y_r	y_r ←	t	y_r (Mittel)
0^h	0,043 mm	0,000 mm	12^h	0,022 mm
1	0,091	0,046	13	0,068
2	0,209	0,140	14	0,174
3	0,363	0,318	15	0,340
4	0,529	0,465	16	0,497
5	0,629	0,590	17	0,610
6	0,652	0,656	18	0,654
7	0,577	0,633	19	0,605
8	0,463	0,539	20	0,501
9	0,299	0,394	21	0,346
10	0,151	0,231	22	0,191
11	0,054	0,105	23	0,080
12	0,000	0,079	24	0,040.

Digitized by Google

Die Tabelle zeigt, daß die zu messenden Größen des Ausschlags des Pendels y_v sehr klein sind und 0,7 mm nicht übersteigen.

Die Zahlen der letzten Kolumne können durch folgende Formel ausgedrückt werden

$$y_v = 0{,}333\ \text{mm} + 0{,}0015\ \text{mm}\ t - 0{,}311\ \text{mm} \cos 2t. \qquad (27)$$

Also ist der periodische Teil der Pendelbewegung

$$- 0{,}311\ \text{mm} \cos 2t.$$

Der Wert eines Millimeters auf der Trommel $\frac{i''}{2A}$ (Formel (17)) ist gleich 0″,0125; folglich ist der periodische Teil der Pendelbewegung in Sekunden

$$- 0'',00389 \cos 2t.$$

Wenn man die Zahlen der letzten Kolumne mit Hilfe der Reduktionskonstante 0″,0125 in Bogensekunden ausdrückt,

$$0{,}333\ \text{mm} + 0{,}0015\ \text{mm}\ t = 0'',00416 + 0'',00002\, t,$$

sie wegen der Bewegung des Nullpunktes korrigiert und sie dann mit den Zahlen, die nach der Formel $-0'',00389 \cos 2t$ berechnet worden sind, vergleicht, so ergeben sich die folgenden geringen Unterschiede zwischen Beobachtung und Rechnung.

Pendel im I. Vertikal.

t	Beob.—Rechn.	t	Beob.—Rechn.
0^h	0″,00000	6^h	+ 0″,00001
1	+ 0 ,00002	7	− 0 ,00009
2	− 0 ,00007	8	0 ,00000
3	+ 0 ,00004	9	− 0 ,00001
4	+ 0 ,00002	10	− 0 ,00001
5	0 ,00000	11	0 ,00000.

Die Zuverlässigkeit des endgültigen Resultates der Bestimmung von ε''_m (Formel (14)) hängt nach dem vorigen sehr von der genauen Bestimmung der Reduktionskonstanten $\frac{i''}{2A}$ ab.

Bei diesen Beobachtungen sind daher mehr systematische Fehler als zufällige zu befürchten.

Ist der Koeffizient von $\cos 2t$ aus den Beobachtungen bestimmt worden, so ist die gesuchte Größe ε''_m für den maximalen Ausschlag des Lotes leicht zu berechnen.

Im folgenden sind die Werte von ε''_m, wie sie sich aus den neuesten Beobachtungen ergeben haben, sowie die aus der Theorie unter Annahme eines völlig starren Erdkörpers folgenden Werte aufgeführt.

Digitized by Google

Im Meridian.

	Potsdam	Dorpat	Freiburg i. B.	Durlach i. B.
beobachtet	0″,00335	0″,00389	0″,00439$_5$	0″,00267
theoretisch	0 ,00788	0 ,00705	0 ,00790	0 ,00786$_5$.

Im I. Vertikal.

	Potsdam	Dorpat	Freiburg i. B.	Durlach i. B.
beobachtet	0″,00665	0″,00540	0″,00787	0″,00766
theoretisch	0 ,00999	0 ,00828	0 ,01063	0 ,01042.

Die beobachtete Größe ist also durchweg kleiner als die unter der angegebenen Annahme theoretisch abgeleitete, und zwar beträgt sie im Mittel nur 0,58 derselben. Es hat sich aber noch eine besondere Eigentümlichkeit bei diesen Beobachtungen ergeben, auf die Hecker zuerst hingewiesen hat. Es ist nämlich bei allen Beobachtungsreihen das Verhältnis der beobachteten Größe ε_m'' zur theoretischen für den Meridian und für den I. Vertikal verschieden; die folgende Tabelle gibt diese Verhältnisse.

	Potsdam	Dorpat	Freiburg i. B.	Durlach i. B.	im Mittel
Meridian	0,43	0,55	0,56	0,34	0,47
I. Vertikal	0,67	0,65	0,74	0,73	0,70.

Die Übereinstimmung zeigt, daß man diesen Unterschied nicht zufälligen Fehlern zuschreiben kann. Worin der Unterschied begründet ist, läßt sich noch nicht mit Sicherheit sagen.

Die Annahme Sir G. Darwins[61]), daß diese Differenz vielleicht durch den Einfluß der Rotation der Erde um ihre Achse herbeigeführt sein könne, konnte durch die Berechnungen des englischen Mathematikers Love[62]) nicht bestätigt werden.

Da die Differenz zwischen den Größen der Koeffizienten im Meridian und im I. Vertikal in Potsdam, das näher am Ozean liegt als Dorpat, größer ist als in Dorpat, liegt die Vermutung nahe, daß die Ursache dieser Erscheinung vielleicht in dem Einfluß des Steigens und Fallens der Wassermassen bei Ebbe und Flut auf die Gleichgewichtslage der Horizontalpendel zu suchen ist.

Aus den Berechnungen Loves ergibt sich, daß durch ein Steigen des Spiegels des Atlantischen Ozeans um nur ein Meter ein Ausschlag des Horizontalpendels in Potsdam veranlaßt werden würde, dessen Größe gleich $\frac{1}{4}$ des unbekannten Effektes, d. h. der Differenz der Aufzeichnung der Pendel im Meridian und im I. Vertikal wäre; die Periode würde dabei in Übereinstimmung mit der Ebbe und Flut des Meeres ebenfalls eine halbtägige sein.

Aus den letzten Beobachtungen Braaks[63]) in Batavia auf der Insel Java kann man jedenfalls schließen, daß die ozeanischen Fluten und Ebben tatsächlich die Gleichgewichtslage der Horizontalpendel beeinflussen.

Digitized by Google

Zur endgültigen Klärung dieser interessanten Frage sind noch neue spezielle Untersuchungen über die Deformation der Erde sowohl in der Nähe des Ozeans wie auch im Innern großer Festländer auszuführen.

Diese Frage wurde auf der letzten Tagung (Juli 1911) der Internationalen Seismologischen Assoziation in Manchester besprochen und es wurden die Mittel zur Organisation solcher Beobachtungen über die Deformation der Erde an vier neuen Stationen, in Sibirien (Tomsk), im zentralen Nordamerika, in Paris (im Keller des Observatoriums) und an einem Orte auf der südlichen Halbkugel, etwa in Südafrika bewilligt. Die Stationen in Tomsk und Paris sind bereits in Betrieb.

An dieser großen wissenschaftlichen Untersuchung wird auch die Internationale Erdmessung teilnehmen, die eine Station in Cobar in Australien gegründet hat.

Es sei übrigens noch bemerkt, daß nach Schweydar[64]) und nach Shida[65]) die in der Gezeitentheorie mit O bezeichnete Deklinationswelle sich besonders zur Ableitung der Starrheit des Erdkörpers eignet, da bei dieser der Einfluß der Meeresgezeiten nicht so zur Geltung kommt.

Wir dürfen jedenfalls erwarten, daß die Deformationsbeobachtungen neues Licht auf die noch ungeklärte Frage nach den elastischen Eigenschaften des Erdkörpers werfen werden.

Zwölftes Kapitel.

Theorie der mechanischen Registrierung.

§ 1. Elementare Theorie der mechanischen Registrierung.

Wir betrachten im folgenden als Seismographen wiederum ein Horizontalpendel, das die $N-S$-Komponente der Bodenverschiebung x registrieren möge.

Nach Formel (25) § 1, Kap. V lautet die Differentialgleichung seiner Bewegung:

$$\theta'' + 2\varepsilon\theta' + n^2\theta + \frac{x''}{l} = 0; \quad (1)$$

hierin ist

θ der Winkelausschlag des Pendels,

und

ε die Dämpfungskonstante,

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

wo

T die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung und

l die reduzierte Pendellänge

ist. Wir nehmen an, daß die Bewegung des Pendels mechanisch mittels eines Schreibstiftes auf berußtem Papier registriert wird.

Digitized by Google

Bezeichnet L die Entfernung des Schreibstiftes von der Drehungsachse des Pendels, y den Ausschlag des Stiftes von der Gleichgewichtslage, so können wir für kleine Winkel θ setzen

$$y = L\theta. \tag{2}$$

Ist der Seismograph mit einer Vergrößerungseinrichtung versehen und $\frac{b}{a}$ das Verhältnis des längeren Armes des Vergrößerungsapparates zu dem kürzeren, ist ferner L_0 die Entfernung des kürzeren Hebels bis zur Drehungsachse, so ist nach Formel (19) § 3, Kap. IV

$$L = L_0 \frac{b}{a} \cdot \tag{3}$$

Multiplizieren wir die Gleichung (1) mit L, dann ergibt sich

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L}{l} x'' = 0. \tag{4}$$

Nach Formel (114) § 4, Kap. V ist $\frac{L}{l}$ nichts anderes als die normale Vergrößerung des Apparates $\mathfrak{B}_0$ bei sehr schnellen harmonischen Bodenbewegungen:

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{L}{l} \cdot \tag{5}$$

Wir wollen nun die Eigenbewegung des Apparates untersuchen und setzen dazu in der Gleichung (4) $x'' = 0$.

Dann ist

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y = 0. \tag{6}$$

Fig. 159.

Die Reibung der Feder am berußten Papier führt eine Dämpfung ein. Falls das Moment dieser Reibungskräfte der Winkelgeschwindigkeit des Ausschlags des Pendels proportional ist, so enthält der Wert des Koeffizienten ε schon die entsprechende Größe der Dämpfung.

Das allgemeine Integral der Gleichung (6) für den Fall $\varepsilon < n$ liefert (Formel (37) § 2, Kap. V) eine gedämpfte Sinuslinie, die die vorstehende Fig. 159 darstellt.

Die Gleichung dieser Kurve lautet

$$y = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos \gamma t + C_2 \sin \gamma t], \tag{7}$$

wo C_1 und C_2 zwei willkürliche Integrationskonstanten sind und

$$\gamma = + \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \tag{8}$$

Digitized by Google

ist. Führen wir nun wie in § 2, Kap. V folgende Bezeichnungen ein

$$h = \frac{\varepsilon}{n} \quad \text{(Formel (56))} \tag{9}$$

$$\mu^2 = 1 - h^2 \quad \text{(Formel (57))} \tag{10}$$

$$\gamma = n\mu \quad \text{(Formel (58))}, \tag{11}$$

so ergibt sich das Dämpfungsverhältnis v gleich dem Verhältnis zweier aufeinander folgender maximaler Amplituden der Kurve $\frac{y_k}{y_{k+1}}$ unabhängig vom Vorzeichen aus der Formel

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}} = e^{\pi \frac{h}{\mu}} = e^{\pi \frac{\varepsilon}{\gamma}}. \tag{12}$$

Setzt man noch zur Abkürzung

$$m = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu}, \tag{13}$$

so ergibt sich

$$v = e^{\pi m}. \tag{14}$$

Das logarithmische Dekrement

$$\Lambda = \log_{10} v \tag{15}$$

wird unmittelbar durch den Versuch bestimmt; wir kennen somit v.

Nach Formel (61) § 2, Kap. V ist

$$h = 0{,}7330 \frac{\Lambda}{\sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}}. \tag{16}$$

Ist h bekannt, so läßt sich nach Formel (10) auch μ^2 bestimmen.

Die Konstanten n und ε aus der Gleichung (6) werden nach den Formeln (53) und (54) § 2, Kap. V bestimmt

$$n = \frac{2\pi}{T'} \cdot \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2} \tag{17}$$

$$\varepsilon = 4{,}6052 \cdot \frac{\Lambda}{T'}, \tag{18}$$

wo T' die Eigenperiode des Pendels mit Dämpfung ist; sie läßt sich auch unmittelbar durch den Versuch ermitteln.

Würde alles so einfach liegen, wie es hier ausgeführt ist, so würde die mechanische Registrierung praktisch keine Schwierigkeiten bieten und die Auswertung der Seismogramme und die Bestimmung der Pendelkonstanten könnten so ausgeführt werden, wie bei der direkten optischen Registrierung.

In Wirklichkeit zeigt aber die Erfahrung, daß die Differentialgleichung (6) infolge der Reibung der Feder am berußten Papier nicht vollständig

Digitized by Google

die wahre Pendelbewegung darstellt und daß deshalb ein Korrektionsglied eingeführt werden muß. Wenn nämlich das Pendel nach einer Reihe von Schwingungen in seine Ruhelage von der Seite der positiven Ordinaten zurückkehrt, so wird y nicht gleich Null, sondern es bleibt ein kleiner positiver Restausschlag, der Reibungsausschlag, der durch die Größe der Reibung im Ruhezustand bedingt wird. Kehrt das Pendel von der Seite der negativen Ordinaten zurück zur Ruhelage, so ist auch der Restausschlag negativ.

Diesen Umstand kann man berücksichtigen, indem man in der Differentialgleichung (6) zu y eine kleine Korrektion ϱ hinzufügt.

Dann lautet die Differentialgleichung der Eigenbewegung des Pendels

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \varrho) = 0. \qquad (19)$$

Aus dieser Formel folgt, daß im Ruhezustand, wenn y' und y'' beide gleich Null sind,

$$y = -\varrho \qquad (20)$$

ist. Daraus ersieht man, daß ϱ sein Zeichen zugleich mit y' ändern muß, wobei $\varrho < 0$ ist, wenn $y' < 0$ und $\varrho > 0$ ist, wenn $y' > 0$ ist.

Man kann aber nicht voraussetzen, daß die Einführung der Korrektion ϱ die Frage erschöpft und die Gleichung (19) nun vollständig genau der wahren Pendelbewegung genügt, sondern die Gleichung (19) kann nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit betrachtet werden.

Der Einfluß der Reibung der Feder am berußten Papier auf die Bewegung des Pendels kann in voller Strenge nicht so leicht berücksichtigt werden, denn erstens sind die Gesetze dieser Reibung sehr wenig erforscht und zweitens ist die Reibung selbst ein sehr variables Element, das von verschiedenen zufälligen Einflüssen abhängt, und das ist der Hauptmangel der mechanischen Registriermethode. Infolgedessen sollte man diese Methode auf den seismischen Stationen ersten Ranges, wo eine besondere Genauigkeit der Resultate verlangt wird, nicht anwenden. Für die seismischen Stationen zweiten Ranges, wo eine solche Genauigkeit nicht erforderlich ist, erscheint diese Methode dagegen wegen ihrer Billigkeit durchaus geeignet.

Man kann jedoch bei Berücksichtigung aller Korrektionen auch bei der mechanischen Registrierung sehr befriedigende Resultate bei der Untersuchung der wahren Bodenbewegungen bei Beben erzielen.

Die Einführung der Korrektion ϱ verbessert schon erheblich das Resultat der Auswertung von Seismogrammen.

Wir wollen nun sehen, wie die Einführung der Korrektion ϱ in die Differentialgleichung der Bewegung des Pendels (Gleichung (19)) unsere Formeln beeinflußt.

Denken wir uns, daß wir eine Kurve der Eigenbewegung des Seismographen, wie die in der Fig. 159 dargestellte, erhalten und einige maximale Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 usw. gemessen haben.

Digitized by Google

Das allgemeine Integral der Gleichung (19) nimmt dann die folgende Gestalt an

$$(y+\varrho) = e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t]. \tag{21}$$

Wir wollen zuerst die Kurve zwischen den Punkten A und B untersuchen, wobei wir als Anfang der Zeitzählung den Punkt A annehmen.

Zwischen A und B ist $y' < 0$ und folglich auch $\varrho < 0$.

Wir wollen unter ϱ eine positive Größe verstehen und können daher für das betreffende Intervall die vorige Formel in folgender Gestalt niederschreiben:

$$y = \varrho + e^{-\varepsilon t}[C_1 \cos\gamma t + C_2 \sin\gamma t]. \tag{22}$$

Hieraus ergibt sich

$$y' = e^{-\varepsilon t}[-\varepsilon C_1 \cos\gamma t - \varepsilon C_2 \sin\gamma t - \gamma C_1 \sin\gamma t + \gamma C_2 \cos\gamma t]. \tag{23}$$

Die Konstanten C_1 und C_2 lassen sich aus den Anfangsbedingungen bestimmen; für

$$t = 0, \quad \text{ist} \quad y = y_1 \quad \text{und} \quad y' = 0.$$

Setzt man in den Gleichungen (22) und (23) $t = 0$, so ergibt sich

$$y_1 = \varrho + C_1$$

und

$$0 = -\varepsilon C_1 + \gamma C_2.$$

Hieraus finden wir

$$C_1 = y_1 - \varrho$$

und

$$C_2 = \frac{\varepsilon}{\gamma}(y_1 - \varrho). \tag{24}$$

Setzt man diese Größen in die Gleichung (22) ein, so erhält man

$$(y-\varrho) = (y_1 - \varrho)e^{-\varepsilon t}\left[\cos\gamma t + \frac{\varepsilon}{\gamma}\sin\gamma t\right]. \tag{25}$$

Die folgende maximale Ordinate y_2 läßt sich aus der Bedingung $\frac{dy}{dt} = 0$ bestimmen.

Wir nehmen die Derivierte von der Gleichung (25)

$$\frac{dy}{dt} = (y_1 - \varrho)e^{-\varepsilon t}\left[-\varepsilon\cos\gamma t - \frac{\varepsilon^2}{\gamma}\sin\gamma t - \gamma\sin\gamma t + \varepsilon\cos\gamma t\right]$$

$$= -\frac{n^2}{\gamma}(y_1 - \varrho)e^{-\varepsilon t}\sin\gamma t.$$

Die zweite Wurzel t_m der Gleichung $\frac{dy}{dt} = 0$ ist

$$t_m = \frac{\pi}{\gamma}. \tag{26}$$

Digitized by Google

Folglich ist

$$\cos \gamma t_m = -1$$

und

$$e^{-\varepsilon t_m} = e^{-\varepsilon \frac{\pi}{\gamma}}.$$

Aber aus den Formeln (10), (12) und (13) folgt, daß

$$\frac{\varepsilon}{\gamma} = \frac{h}{\mu} = \frac{\sqrt{1-\mu^2}}{\mu} = m$$

ist; da aber nach der Formel (14)

$$e^{\pi m} = v$$

ist, so ergibt sich

$$e^{-\varepsilon t_m} = e^{-\pi m} = \frac{1}{v}.$$

Setzt man diese Größen in die Formel (25) ein, so findet man

$$(y_2 - \varrho) = -(y_1 - \varrho) \cdot \frac{1}{v}. \tag{27}$$

Für den Teil der Kurve zwischen den Punkten B und C, für welchen $y' > 0$ und $\varrho > 0$ ist, hätten wir in gleicher Weise die folgende Beziehung erhalten:

$$(y_3 + \varrho) = -(y_2 + \varrho) \cdot \frac{1}{v}. \tag{28}$$

Das Zeichen $-$ auf der rechten Seite der Gleichungen (27) und (28) bedeutet, daß die Ordinate $y_2 < 0$ ist, d. h. daß der Punkt B unter der Zeitachse liegt.

Wir wollen nun unter y_1, y_2, y_3, y_4 usw. immer die absoluten Werte der entsprechenden Ordinate verstehen, unabhängig vom Zeichen; dann muß man in den Formeln (27) und (28) statt y_2 setzen $-y_2$.

Dann ergibt sich

$$-(y_2 + \varrho) = -(y_1 - \varrho) \frac{1}{v}$$

und

$$(y_3 + \varrho) = (y_2 - \varrho) \frac{1}{v},$$

oder wenn man setzt

$$v = 1 + \xi, \tag{29}$$

so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} y_1 - \varrho &= (y_2 + \varrho)(1 + \xi) \\ y_2 - \varrho &= (y_3 + \varrho)(1 + \xi) \end{aligned}\right\}. \tag{30}$$

Im allgemeinen Fall, also für eine beliebige ganze Zahl k, ergibt sich

$$y_k - \varrho = (y_{k+1} + \varrho)(1 + \xi), \tag{31}$$

wo ϱ immer positiv ist.

Digitized by Google

Wir sehen also, daß das Verhältnis zweier benachbarter Ordinaten $v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}}$ uns die Größe des wahren Dämpfungsverhältnisses v nicht gibt, denn nach der Formel (31) ist

$$v = 1 + \xi = \frac{y_k - \varrho}{y_{k+1} + \varrho}. \tag{32}$$

Folglich ist immer

$$v < v_k,$$

wobei v_k nicht mehr konstant bleibt, sondern, wie die Erfahrung lehrt, mit der Abnahme von y_k anwächst.

Die Formel (31) dient als Grundlage für die Bestimmung der Pendelkonstanten ϱ und v.

Wir setzen jetzt voraus, daß drei benachbarte Ordinaten y_k, y_{k+1}, y_{k+2} ausgemessen worden sind.

Dann können wir schreiben

$$\left.\begin{aligned} y_k - \varrho &= (y_{k+1} + \varrho)(1 + \xi) \\ y_{k+1} - \varrho &= (y_{k+2} + \varrho)(1 + \xi) \end{aligned}\right\}. \tag{33}$$

Um den Einfluß eines möglichen Fehlers in der etwa unrichtig angenommenen Lage der Nullinie zu vermeiden, führen wir die Summe der absoluten Größen zweier benachbarter Ordinaten ein; dazu addieren wir die beiden Gleichungen

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\varrho = \{(y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\varrho\}(1 + \xi). \tag{34}$$

Um ϱ zu bestimmen, verfährt man am besten folgendermaßen:

Man sorgt dafür, daß die Dämpfung des Apparates möglichst gering wird; bei magnetischer Dämpfung erzielt man dieses, wenn man die Magnete ganz auseinander schiebt und die Pole eines jeden Magneten mit einer Eisenplatte in sich schließt, bei Luftdämpfung ist gewöhnlich ebenfalls eine Einrichtung vorhanden, die es ermöglicht, die Dämpfung auszuschalten.

Es unterscheidet sich dann v sehr wenig von 1 und man kann in erster Annäherung $\xi = 0$ setzen.

Dann haben wir aus der Formel (34)

$$\varrho = \tfrac{1}{4}(y_k - y_{k+2}). \tag{35}$$

ϱ ist also gleich $\frac{1}{4}$ der Differenz zweier benachbarter maximaler Ordinaten auf derselben Seite der Nullinie.

Um einen genaueren Wert für ϱ zu erhalten benutzen wir unter Beibehaltung der Größe ξ die Formel (34), wobei wir die Produkte der beiden kleinen Größen ξ und ϱ vernachlässigen. Es ergibt sich dann

$$(y_k + y_{k+1}) - 2\varrho = (y_{k+1} + y_{k+2}) + 2\varrho + (y_{k+1} + y_{k+2})\xi$$

oder

$$(y_{k+1} + y_{k+2})\xi + 4\varrho = (y_k - y_{k+2}). \tag{36}$$

Hat man zwei Gleichungen von der Gestalt (36), so lassen sich aus ihnen die Unbekannten ξ und ϱ bestimmen.

Digitized by Google

Man kann also die Kurve der Eigenbewegung des Pendels stückweise untersuchen, um zu sehen, ob die Größen ξ und ϱ für verschiedene Teile konstant und unabhängig von der mittleren Ordinate y_{k+1} sind.

Wenn ϱ bekannt ist, so schaltet man die nötige Dämpfung ein und geht zur Bestimmung von v über.

Bei der mechanischen Registriermethode ist es nicht nötig, v sehr groß zu wählen. Für Instrumente vom Typus der schweren Horizontalpendel der russischen seismischen Stationen II. Ordnung genügt es, v etwa gleich 4 oder 5 zu nehmen.

Zur Bestimmung von v aus der Kurve der Eigenbewegung des Apparates benutzt man die strenge Formel (34).

Führen wir zur Abkürzung folgende Bezeichnung ein

$$w_k = y_k + y_{k+1}, \tag{37}$$

so ergibt sich aus den Gleichungen (34) und (29)

$$w_k - 2\varrho = w_{k+1}v + 2\varrho v, \tag{38}$$

oder

$$v = \frac{w_k - 2\varrho}{w_{k+1} + 2\varrho}. \tag{39}$$

Da ϱ bekannt ist, so kann man nach dieser Formel das Dämpfungsverhältnis v bestimmen. Es genügt dazu, drei Ordinaten auszumessen.

Ist die Dämpfung verhältnismäßig gering, so daß man eine Reihe von Ordinaten y_k messen kann, so kann man die Formel (38) benutzen. Wir führen dazu folgende Bezeichnung ein:

$$u = 2\varrho(1 + v), \tag{40}$$

wo u eine neue Unbekannte ist.

Dann ergibt sich aus der Gleichung (38)

$$w_k = w_{k+1}v + u. \tag{41}$$

Hat man mehrere solcher Gleichungen, so kann man v und u einzeln bestimmen; ist aber u bekannt, so findet man ϱ sogleich nach der Formel

$$\varrho = \frac{u}{2(1 + v)}. \tag{42}$$

Zur Bestimmung von u und v nach der Formel (41) kann man folgende einfache Methode benutzen, auf die Orlov aufmerksam gemacht hat.

Wir setzen voraus, daß wir folgendes System von i Gleichungen haben:

$$\left.\begin{array}{l} w_1 = w_2 v + u \\ w_2 = w_3 v + u \\ \cdots\cdots\cdots \\ w_i = w_{i+1} v + u \end{array}\right\}. \tag{43}$$

Digitized by Google

Wir können eine Reihe solcher Gleichungen erhalten, wenn auch nur drei bis vier Ordinaten der Kurve auszumessen sind, wenn wir das Pendel die Kurve seiner Eigenbewegung mehrere Male aufschreiben lassen. Dann werden sich in den benachbarten Gleichungen die einzelnen Werte von w_k nicht immer wiederholen.

Bilden wir nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen und setzen dementsprechend

$$\left.\begin{aligned} w_m &= \frac{w_1 + w_2 + \cdots + w_i}{i} \\ w_{m_1} &= \frac{w_2 + w_3 + \cdots w_{i+1}}{i} \end{aligned}\right\}, \tag{44}$$

so wird

$$w_m = w_{m_1} v + u. \tag{45}$$

Ziehen wir diese Gleichung von jeder der Gleichungen (43) ab, so ergibt sich

$$\left.\begin{aligned} (w_1 - w_m) &= (w_2 - w_{m_1})v \\ (w_2 - w_m) &= (w_3 - w_{m_1})v \\ &\cdots\cdots\cdots \\ (w_i - w_m) &= (w_{i+1} - w_{m_1})v \end{aligned}\right\}. \tag{46}$$

Diese Gleichungen, die nur eine Unbekannte v enthalten, lassen sich nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln.

Ist v einmal bekannt, so berechnet man u nach der Gleichung (45) und alsdann ϱ nach der Formel (42).

Dies ist die elementare Theorie der mechanischen Registrierung. Als Grundformel für die verschiedenen Folgerungen diente uns die Formel (34), welche ϱ als konstante und positive Größe enthält.

Leider wird diese Voraussetzung durch die Versuche nicht gestützt, denn ϱ bleibt nicht konstant, sondern es nimmt mit der Abnahme von y_k stetig ab; bei sehr kleinen Werten von y_k wird auch ϱ sehr klein. Weiter bleibt auch das Dämpfungsverhältnis v, das nach der Formel (34) berechnet wird, nicht konstant, sondern es wächst mit der Abnahme von y_k, obwohl der Natur der Sache nach $v = e^{\varepsilon T_m}$ konstant bleiben soll (siehe die Abhandlung „Über ein neues schweres Horizontalpendel mit mechanischer Registrierung für seismische Stationen zweiten Ranges". Nachrichten der Permanenten Seismologischen Zentralkommission T. III, L. 3).

Daraus kann man schließen, daß die Einführung nur einer Korrektionsgröße ϱ noch nicht genügend ist, sondern, daß noch ein zweites Korrektionsglied eingeführt werden muß.

Trotzdem kann man sich aber dieser elementaren Theorie zur Bestimmung der Pendelkonstanten und der Auswertung der Seismogramme bedienen, wenn man die Ergebnisse nur als erste Annäherung an die Wirklichkeit betrachtet.

Es würde natürlich von Wert sein, wenn möglich, die Abhängigkeit des ϱ und v von y_k empirisch zu bestimmen und bei der Auswertung der Seismogramme (§ 3 dieses Kapitels) für eine jede gemessene Amplitude y_m die

Digitized by Google

entsprechenden Werte von v und ϱ einzuführen; da das aber sehr kompliziert ist, beschränkt man sich meistenteils auf die mittleren Werte von ϱ und v. Die Genauigkeit des Resultats leidet naturgemäß darunter.

Wenn man die Abhängkeit zwischen ϱ und y_k feststellen könnte, so würde man besser statt der Formel (39) die folgende

$$v = \frac{y_1 + y_2 - (\varrho_1 + \varrho_2)}{y_2 + y_3 + (\varrho_2 + \varrho_3)}, \tag{47}$$

benutzen, die sich unmittelbar aus den Gleichungen (33) ergibt, wenn man ϱ als eine Funktion von y_k auffaßt.

§ 2. Einführung einer zweiten Korrektionsgröße.

Wir wollen nun den Versuch machen, die Theorie der mechanischen Registrierung etwas zu vervollständigen, indem wir die Reibung der Feder am berußten Papier näher betrachten.

In Fig. 160 bedeute A den Schreibstift, welcher in der Entfernung b von der Drehungsachse O sich befindet.

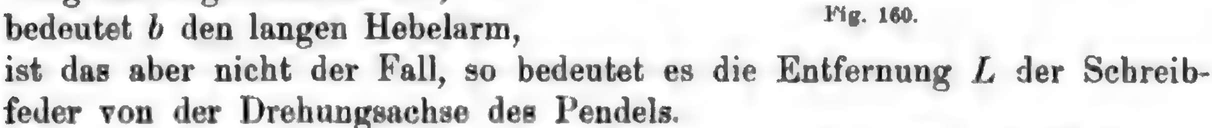


Fig. 160.

Besitzt das Pendel einen Vergrößerungsmechanismus, so bedeutet b den langen Hebelarm, ist das aber nicht der Fall, so bedeutet es die Entfernung L der Schreibfeder von der Drehungsachse des Pendels.

Es sei nun OA um den Winkel θ abgelenkt; dann wird die Entfernung y des Punktes A von der Zeitachse OM

$$y = b \sin \theta$$

oder für kleine Werte von θ

$$y = b\theta. \tag{48}$$

Bezeichnen wir mit θ' die Winkelgeschwindigkeit, d. h. den Zuwachs von θ in einer Sekunde, so wird nach dem Verlauf einer Sekunde der Punkt A sich nach B bewegen, wobei $AB = b\theta'$ wird. In derselben Zeit bewegt sich das berußte Papier um die Strecke $BC = \lambda$ von der Drehungsachse nach links, so daß also λ die Länge einer Sekunde auf der Registriertrommel ist. Es bewegt sich also der Schreibstift in einer Sekunde auf dem berußten Papier von A nach C. Die entsprechende Geschwindigkeit dieser Bewegung bezeichnen wir mit V. Es ist also

$$V = AC.$$

Wir wollen nun V berechnen.

Wegen der Kleinheit von AB können wir im Dreieck ABC den Winkel CBO gleich θ setzen.

Also

$$\angle ABC = 90^0 + \theta.$$

Bezeichnen wir den Winkel BAC mit ψ, dann ergibt sich

$$V^2 = (b\theta')^2 + \lambda^2 - 2b\theta'\lambda \cdot \cos(90^0 + \theta)$$

oder

$$V^2 = (b\theta')^2 + \lambda^2 + 2b\theta'\lambda \cdot \sin\theta. \qquad (49)$$

Andererseits ist

$$\frac{\sin\psi}{\sin(90^0 + \theta)} = \frac{\lambda}{V}$$

oder

$$\sin\psi = \frac{\lambda}{V}\cos\theta.$$

Hieraus ergibt sich

$$\cos\psi = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{V^2 - \lambda^2\cos^2\theta}.$$

Setzen wir hierin den Wert von V^2 aus der Formel (49) ein, so haben wir

$$\cos\psi = \frac{1}{V} \cdot \sqrt{(b\theta')^2 + \lambda^2\sin^2\theta + 2b\theta'\lambda\sin\theta}$$

$$= \frac{1}{V}[b\theta' + \lambda\sin\theta]. \qquad (50)$$

Wenn die Registriertrommel in der entgegengesetzten Richtung sich drehen würde, so müßte man in den früheren Formeln statt $+\lambda$ einsetzen $-\lambda$.

Die hemmende Kraft f der Reibung des Schreibstiftes am berußten Papier ist von C nach A gerichtet. Sie strebt immer die Vergrößerung von θ zu verhindern; deshalb wird das Moment dieser Kraft in bezug auf die Drehungsachse des Pendels immer negativ.

Die Kraft f kann der Natur der Sache nach nicht unmittelbar von der Größe des Winkelausschlags θ abhängen, sie muß eine Funktion der Geschwindigkeit V sein,

$$f = F(V).$$

Die Funktion ist uns unbekannt, wir können sie jedoch näherungsweise nach dem Maclaurinschen Satz in eine Reihe entwickeln

$$f = f_0 + \alpha V + \beta V^2, \qquad (51)$$

wo α und β zwei konstante Koeffizienten bedeuten.

Die dritte Konstante f_0 ist erfahrungsgemäß nicht 0, denn es gibt eine Reibung im Ruhezustande.

Das Moment $\mathfrak{M}_0$ dieser Kraft in bezug auf die Drehungsachse O wird

$$\mathfrak{M}_0 = f\cos\psi \cdot b,$$

Digitized by Google

oder nach den Formeln (50) und (51), in denen wir θ statt $\sin\theta$ setzen,

$$\mathfrak{M}_0 = \frac{b}{V}[b\theta' + \lambda\theta][f_0 + \alpha V + \beta V^2]. \tag{52}$$

Wir wollen nun das Moment $\mathfrak{M}_1$ dieser Kraft in bezug auf die Drehungsachse des Pendels selbst aufsuchen.

Es bedeute in Fig. 161 O_1 die Drehungsachse des Pendels, O die Drehungsachse der Vergrößerungseinrichtung, ω den Drehungswinkel des

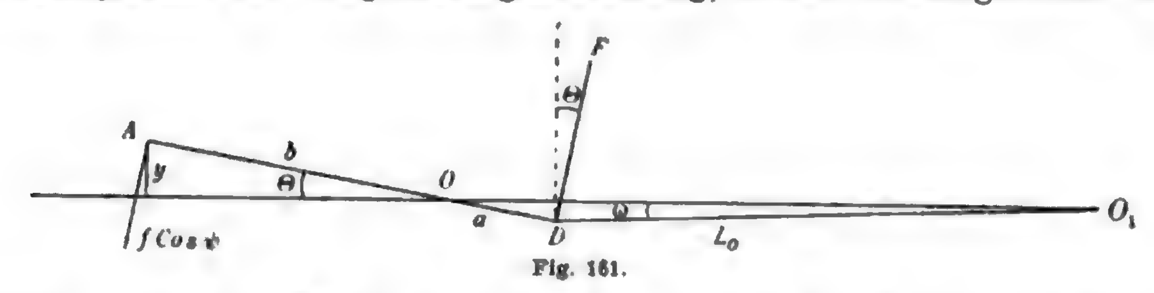


Fig. 161.

Pendels, der dem Winkel θ entspricht, a und b den kurzen und langen Hebelarm; es ist ferner $O_1D = L_0$.

Das Moment $\mathfrak{M}_0 = f\cos\psi \cdot b$ kann ersetzt werden durch das Moment einer Kraft F, welche in D angreift und senkrecht zu OD steht

$$F = \frac{1}{a}\mathfrak{M}_0.$$

Das Moment der Kraft F in bezug auf die Drehungsachse des Pendels wird gleich

$$\mathfrak{M}_1 = F\cos(\theta + \omega) \cdot L_0$$

oder wegen der Kleinheit von θ und ω

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{L_0}{a} \cdot \mathfrak{M}_0.$$

Setzt man hierin den Wert $\mathfrak{M}_0$ aus Formel (52) ein und führt

$$\nu = \frac{\lambda}{b} \tag{53}$$

ein, so ergibt sich

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{L_0 b^2}{a V} \cdot [\theta' + \nu\theta][f_0 + \alpha V + \beta V^2]. \tag{54}$$

Dies ist der Ausdruck für das Moment der Reibungskräfte in bezug auf die Drehungsachse des Pendels.

Wäre nun der Schreibstift gehoben und keine Reibung vorhanden, so ließe sich die Differentialgleichung der Pendelbewegung nach dem Satze der Mechanik, daß das Produkt aus dem Trägheitsmoment in bezug auf die Drehungsachse und der Winkelgeschwindigkeit des Pendels gleich dem Momente aller auf das System wirkenden Kräfte ist, in folgender Form schreiben:

$$K\omega'' = -P\omega - \mathfrak{M}. \tag{55}$$

Hierin bedeuten K das Trägheitsmoment des Systems in bezug auf die Drehungsachse des Pendels, $P\omega$ das Moment der Schwerkraft, das immer negativ ist und $\mathfrak{M}$ das Moment der übrigen dämpfenden Kräfte.

Nehmen wir wie üblich an, daß $\mathfrak{M}$ proportional der Winkelgeschwindigkeit ω' des Pendels ist, eine Bedingung, die bei Anwendung der magnetischen Dämpfung streng erfüllt wird, und setzen wir

$$n^2 = \frac{P}{K},$$

so läßt sich die Gleichung (55) folgendermaßen umschreiben:

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega = 0. \qquad (56)$$

Dies ist die gewöhnliche Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels (Formel (26) § 2, Kap. V).

Hierin bedeutet ε eine bestimmte Dämpfungskonstante und

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

wo T die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung ist.

Bei einer Bodenbewegung nimmt die Gleichung (56) folgende bekannte kanonische Form an:

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{1}{l}x'' = 0.$$

Bei Vorhandensein von Reibung muß man noch das Moment $\mathfrak{M}_1$ einführen. Dann ergibt sich

$$K\omega'' = -P\omega - \mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$$

oder wenn man die Gleichung durch K dividiert,

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{\mathfrak{M}_1}{K} = 0$$

und bei Bodenbewegung

$$\omega'' + 2\varepsilon\omega' + n^2\omega + \frac{\mathfrak{M}_1}{K} + \frac{1}{l}x'' = 0. \qquad (57)$$

Aus Fig. 161 ersieht man, daß für kleine Werte von θ

$$a\theta = L_0\omega$$

ist, folglich ist

$$y = b\theta = \frac{b}{a}L_0\omega.$$

Aber nach der Formel (3) wird

$$\frac{b}{a}L_0 = L,$$

$$y = L\omega.$$

Digitized by Google

Multipliziert man die Gleichung (57) mit L und berücksichtigt dabei, daß $\frac{L}{l}$ das normale Vergrößerungsverhältnis $\mathfrak{B}_0$ bedeutet, so ergibt sich

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0. \tag{58}$$

Es erübrigt also nur, den Wert von $\mathfrak{M}_1$ aus der Formel (54) einzusetzen.

Unter Berücksichtigung, daß

$$b\theta = y$$

ist, ergibt sich

$$\frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 = \frac{L^2}{K}\cdot\frac{1}{V}[y' + \nu y][f_0 + \alpha V + \beta V^2]. \tag{59}$$

Wenden wir uns nun zu der Formel (49).

Setzt man darin $\sin\theta = \theta$ und berücksichtigt die Beziehung (53), so erhält man

$$V = \sqrt{y'^2 + 2\nu y' y + b^2\nu^2}.$$

Infolge der verhältnismäßig langsamen Drehgeschwindigkeit der Registriertrommel ist ν eine sehr kleine Größe und deshalb könnten wir in dem vorigen Ausdruck das Glied $b^2\nu^2$ einfach vernachlässigen. Um so eher können wir es daher durch $y^2\nu^2$ ersetzen.

Dann ergibt sich

$$V = \sqrt{y'^2 + 2\nu y' y + \nu^2 y^2} = y' + \nu y. \tag{60}$$

Dieser Ausdruck ist nicht vollkommen streng, speziell für kleine Werte von y', aber wegen der Kleinheit von ν ist dies für das Endresultat der Rechnungen unwesentlich.

Diese Voraussetzung ist notwendig, denn sonst würde es sehr schwer sein, die Differentialgleichung (58) zu integrieren.

Setzen wir nun den Ausdruck für V aus der Formel (60) in die Gleichung (59) ein, so ergibt sich

$$\frac{L}{K}\mathfrak{M}_1 = \frac{L^2}{K}[f_0 + \alpha\{y' + \nu y\} + \beta\{y'^2 + 2\nu y' y + \nu^2 y^2\}].$$

Setzen wir diesen Ausdruck in die Formel (58) ein, so erhalten wir

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 y + \frac{L^2}{K}f_0 + \alpha\nu\frac{L^2}{K}y + \alpha\frac{L^2}{K}y' + \beta\frac{L^2}{K}\{y'^2 + 2\nu y' y + \nu^2 y^2\} + \mathfrak{B}_0 x'' = 0.$$

Wir führen nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} 2\varepsilon_0 &= \alpha\frac{L^2}{K} \\ n_1^2 &= n^2 + 2\nu\varepsilon_0 \\ \varepsilon_1 &= \varepsilon + \varepsilon_0 \\ \varrho_0 &= \frac{1}{n_1^2}\cdot\frac{L^2}{K}\cdot f_0 \\ \xi &= \beta\frac{L^2}{K} \end{aligned}\right\}. \tag{61}$$

Unsere vorige Gleichung nimmt dann die folgende Gestalt an

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2(y + \varrho_0) + \xi \{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0. \tag{62}$$

Dies ist die Differentialgleichung der Bewegung des Horizontalpendels bei Anwesenheit von Reibung am berußten Papier.

ε_1 bedeutet die resultierende, totale Dämpfungskonstante. Sie besteht aus zwei Teilen, von denen der erste, ε, von den übrigen dämpfenden Kräften und der zweite, ε_0, von der Reibung des Schreibstiftes abhängt.

Die Eigenperiode des Pendels $T_1 = \frac{2\pi}{n_1}$ wird sich etwas von der Periode $T = \frac{2\pi}{n}$ bei gehobenem Schreibstift unterscheiden, aber wegen der Kleinheit von ν ist der Unterschied unbedeutend, und zwar um so mehr, als T_1 direkt aus Schwingungsbeobachtungen entnommen wird.

Trotzdem läßt sich der Unterschied zwischen T und T_1 tatsächlich nachweisen, wenn man der Registriertrommel eine größere Rotationsgeschwindigkeit (verhältnismäßig großes ν) gibt. Die Beobachtungen bestätigen die Richtigkeit der Formel $n_1^2 = n^2 + 2\nu\varepsilon_0$.

Wir wollen nun die Eigenbewegung des Pendels untersuchen.

Setzt man $x'' = 0$, so ergibt sich

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2(y + \varrho_0) + \xi \{y' + \nu y\}^2 = 0. \tag{63}$$

Vergleicht man diese Gleichung mit der Gleichung (19), so sieht man, daß sie sich von dieser nur durch das zweite Korrektionsglied mit dem Faktor ξ unterscheidet. Dieses Glied berücksichtigt die Reibung, soweit sie von dem Quadrat der Geschwindigkeit V abhängig ist.

Nehmen wir nun an, daß wir in der Kurve der Eigenbewegung des Apparates (Fig. 159) einige maximale Ordinaten y_1, y_2, y_3, y_4 usw. ausgemessen haben; wir wollen nun diese Kurve zwischen den Punkten A und B untersuchen und nehmen hierbei die Abszisse des Punktes A als Anfangsmoment der Zeitzählung an. Zwischen den Punkten A und B, wo $y' < 0$ ist, soll auch ϱ_0 negativ sein; wir wollen aber vorläufig das Minuszeichen nicht einführen.

Die Differentialgleichung (63) mit dem Gliede $\xi(y' + \nu y)^2$ läßt sich nicht endlich integrieren; aber bei der Kleinheit von ξ können wir das entsprechende Integral durch sukzessive Annäherung finden.

Dementsprechend setzen wir zuerst $\xi = 0$ und suchen y als eine Funktion von t auf, indem wir die Anfangsbedingungen der Bewegung (für $t = 0$, $y = y_1$ und $y' = 0$) berücksichtigen. Dann finden wir den Wert der Funktion $\{y' + \nu y\}^2$. Wir setzen diese bekannte Funktion in die Gleichung (63) ein und integrieren sie von neuem. Dann erhalten wir den endgültigen Ausdruck für y.

Nach Formel (25) des § 1 lautet das Integral der Gleichung (63) für $\xi = 0$ folgendermaßen:

$$(y + \varrho_0) = (y_1 + \varrho_0) e^{-\varepsilon_1 t} \left[\cos \gamma_1 t + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \sin \gamma_1 t\right], \tag{64}$$

Digitized by Google

wo

$$\gamma_1 = +\sqrt{n_1^2 - \varepsilon_1^2} \tag{65}$$

ist. Aus der Gleichung (64) erhalten wir

$$y' = (y_1 + \varrho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left[-\varepsilon_1 \cos\gamma_1 t - \frac{\varepsilon_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t - \gamma_1 \sin\gamma_1 t + \varepsilon_1 \cos\gamma_1 t\right],$$

oder

$$y' = -(y_1 + \varrho_0)\frac{n_1^2}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t}\sin\gamma_1 t.$$

Ferner haben wir

$$y' + \nu y = -(y_1 + \varrho_0)\frac{n_1^2}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t}\sin\gamma_1 t$$
$$+ \nu(y_1 + \varrho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\cos\gamma_1 t + \frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t\right\} - \nu\varrho_0,$$

oder

$$y' + \nu y = (y_1 + \varrho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t + \nu\cos\gamma_1 t\right\} - \nu\varrho_0.$$

Wir erheben nun diesen Ausdruck zum Quadrat

$$(y' + \nu y)^2 = (y_1 + \varrho_0)^2 e^{-2\varepsilon_1 t}\left\{\left(\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\right)^2 \sin^2\gamma_1 t + \nu^2 - \nu^2 \sin^2\gamma_1 t\right.$$
$$\left. + 2\nu\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t \cdot \cos\gamma_1 t\right\}$$
$$- 2\nu\varrho_0(y_1 + \varrho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}\left\{\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}\sin\gamma_1 t + \nu\cos\gamma_1 t\right\} + \nu^2\varrho_0^2.$$

Dieser Ausdruck ist auf der rechten Seite der Gleichung (63) negativ. Dementsprechend setzen wir

$$\Phi(t) = -(y' + \nu y)^2.$$

Dann können wir $\Phi(t)$ durch eine Funktion folgender Gestalt ausdrücken:

$$\Phi(t) = (y_1 + \varrho_0)^2 e^{-2\varepsilon_1 t}[A\sin^2\gamma_1 t + B\sin\gamma_1 t \cdot \cos\gamma_1 t - \nu^2]$$
$$+ (y_1 + \varrho_0)\, e^{-\varepsilon_1 t}[C\sin\gamma_1 t + D\cos\gamma_1 t] - \nu^2\varrho_0^2, \tag{66}$$

wo die Koeffizienten A, B, C und D die Bedeutung haben

$$\left.\begin{aligned} A &= -\frac{(\nu\varepsilon_1 - n_1^2)^2 - \nu^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2} \\ B &= -2\nu\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ C &= 2\nu\varrho_0\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1} \\ D &= 2\nu^2\varrho_0 \end{aligned}\right\}. \tag{67}$$

Die Differentialgleichung (63) nimmt dann folgende Gestalt an

$$y'' + 2\varepsilon_1 y' + n_1^2(y + \varrho_0) = \xi\,\Phi(t). \tag{68}$$

Das Integral dieser Gleichung läßt sich in endlicher Form angeben. Die Variable der Gleichung ist $y + \varrho_0$.

Digitized by Google

Die Gleichung (68) ist ihrer Form nach der Gleichung (64) § 3, Kap. V ähnlich. Das Integral derselben ist durch die Formel (68) desselben Kapitels angegeben.

In unserem Falle ergibt sich

$$(y + \varrho_0) = e^{-\varepsilon_1 t}[\Gamma_1 \cos \gamma_1 t + \Gamma_2 \sin \gamma_1 t]$$
$$+ \frac{\xi}{\gamma_1} e^{-\varepsilon_1 t}\left[- \cos \gamma_1 t \int e^{\varepsilon_1 t} \sin \gamma_1 t \cdot \Phi(t)\, dt + \sin \gamma_1 t \int e^{\varepsilon_1 t} \cos \gamma_1 t \cdot \Phi(t)\, dt\right]. \quad (69)$$

Γ_1 und Γ_2 sind zwei Integrationskonstanten.

Nun haben wir die Ausdrücke für die beiden unbestimmten Integrale der Gleichung (69) aufzusuchen. Wir führen der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen ein:

$$\gamma_1 t = u \quad (70)$$

und

$$\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} = - a, \quad (71)$$

wo a selbst eine negative Größe ist.

Dann ergibt sich

$$dt = \frac{1}{\gamma_1} du$$

und

$$\varepsilon_1 t = - a u.$$

Die Funktion $\Phi(t)$ nimmt dann folgende Gestalt an:

$$\Phi(t) = \Psi(u) = (y_1 + \varrho_0)^2 e^{2au}[A \sin^2 u + B \sin u \cos u - \nu^2]$$
$$+ (y_1 + \varrho_0) e^{au}[C \sin u + D \cos u] - \nu^2 \varrho_0^2. \quad (72)$$

Wir führen noch folgende Bezeichnungen ein:

$$S_1 = \int e^{-au} \sin u \cdot \Psi(u)\, du \quad (73)$$

und

$$S_2 = \int e^{-au} \cos u \cdot \Psi(u)\, du. \quad (74)$$

Dann läßt sich die Gleichung (69) folgendermaßen ausdrücken:

$$(y + \varrho_0) = e^{au}[\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{au}[- \cos u \cdot S_1 + \sin u \cdot S_2]. \quad (75)$$

Setzen wir nun in die Ausdrücke für S_1 und S_2 den Wert der Funktion $\Psi(u)$ aus den Formeln (72) ein, so ergibt sich eine Reihe von unbestimmten Integralen, die wir folgendermaßen bezeichnen wollen:

$$\left.\begin{aligned} P_1 &= \int e^{au} \sin^2 u \cos u\, du \\ P_2 &= \int e^{au} \cos^2 u \sin u\, du \\ P_3 &= \int e^{au} \sin^3 u\, du \\ P_0 &= \int e^{au} \sin u\, du \\ P_\nu &= \int e^{-au} \sin u\, du \end{aligned}\right\} \quad (76)$$

und

$$\left.\begin{aligned} Q_1 &= \int \sin u \cos u \, du \\ Q_2 &= \int \sin^2 u \, du \\ Q_3 &= \int \cos^2 u \, du \\ Q_0 &= \int e^{a u} \cos u \, du \\ Q_\nu &= \int e^{-a u} \cos u \, du \end{aligned}\right\} . \tag{77}$$

Dann ergibt sich

$$S_1 = (y_1 + \varrho_0)^2 \{ A P_3 + B P_1 - \nu^2 P_0 \} + (y_1 + \varrho_0) \{ C Q_2 + D Q_1 \} - \nu^2 \varrho_0^2 P_\nu$$

und

$$S_2 = (y_1 + \varrho_0)^2 \{ A P_1 + B P_2 - \nu^2 Q_0 \} + (y_1 + \varrho_0) \{ C Q_1 + D Q_3 \} - \nu^2 \varrho_0^2 Q_\nu .$$

Führt man weiter die Bezeichnung

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{a u} [- \cos u \cdot S_1 + \sin u \cdot S_2], \tag{78}$$

ein, so erhält man nach der Gleichung (75)

$$y + \varrho_0 = e^{a u} [\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \eta, \tag{79}$$

wo η durch die folgende Funktion ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2} e^{a u} [& (y_1 + \varrho_0)^2 \{ A(P_1 \sin u - P_3 \cos u) + B(P_2 \sin u - P_1 \cos u) \\ & + \nu^2 (P_0 \cos u - Q_0 \sin u) \} \\ & + (y_1 + \varrho_0) \{ C(Q_1 \sin u - Q_2 \cos u) + D(Q_3 \sin u - Q_1 \cos u) \} \\ & + \nu^2 \varrho_0^2 \{ P_\nu \cos u - Q_\nu \sin u \}]. \end{aligned} \tag{80}$$

Wir wollen nun die Werte der Funktionen

$$(P_1 \sin u - P_3 \cos u), \quad (P_2 \sin u - P_1 \cos u) \quad \text{usw.},$$

die die Gleichung (80) enthält, berechnen.

Die unbestimmten Integrale, die durch die Beziehungen (76) und (77) definiert werden, lassen sich nach den bekannten Methoden der Integralrechnung leicht bestimmen. Man kann sie auch aus Integraltabellen, wie Láska, „Sammlung von Formeln der reinen und angewandten Mathematik", entnehmen.

Digitized by Google

Wir erhalten

$$\left.\begin{aligned}
P_1 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\,[3\sin^3 u + \{2\cos u + \sin^2 u \cos u\}\,a \\
&\qquad + \{-2\sin u + 3\sin^3 u\}\,a^2 + \sin^2 u\cos u \cdot a^3] \\
P_2 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\,[-3\cos^3 u + \{2\sin u + \sin u\cos^2 u\}\,a \\
&\qquad + \{2\cos u - 3\cos^3 u\}\,a^2 + \sin u\cos^2 u \cdot a^3] \\
P_3 &= \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)}\,[\{-3\sin^2 u\cos u - 6\cos u\} + \{\sin^3 u + 6\sin u\}\,a \\
&\qquad - 3\sin^2 u\cos u \cdot a^2 + \sin^3 u \cdot a^3] \\
P_0 &= \frac{e^{au}}{1+a^2}\,[-\cos u + \sin u \cdot a] \\
P_r &= \frac{e^{-au}}{1+a^2}\,[-\cos u - \sin u \cdot a]
\end{aligned}\right\} \tag{81}$$

und

$$\left.\begin{aligned}
Q_1 &= \frac{1}{2}\sin^2 u \\
Q_2 &= \frac{u}{2} - \frac{1}{2}\sin u\cos u \\
Q_3 &= \frac{u}{2} + \frac{1}{2}\sin u\cos u \\
Q_0 &= \frac{e^{au}}{1+a^2}\,[\sin u + \cos u \cdot a] \\
Q_r &= \frac{e^{-au}}{1+a^2}\,[\sin u - \cos u \cdot a]
\end{aligned}\right\}. \tag{82}$$

Auf Grund dieser Beziehungen kann man die erste Funktion

$$P_1 \sin u - P_3 \cos u$$

folgendermaßen ausdrücken

$$P_1 \sin u - P_3 \cos u = \frac{e^{au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \cdot \chi(u), \tag{83}$$

wo

$$\chi(u) = \chi_0(u) + \chi_1(u)a + \chi_2(u)a^2. \tag{84}$$

ist. $\chi_0(u)$, $\chi_1(u)$ und $\chi_2(u)$ lassen sich unmittelbar aus den Ausdrücken P_1 und P_3 bestimmen

$$\chi_0(u) = 3\sin^4 u + 3\sin^2 u\cos^2 u + 6\cos^2 u = 3(1+\cos^2 u), \tag{85}$$

$$\begin{aligned}\chi_1(u) &= 2\sin u\cos u + \sin^3 u\cos u - \sin^3 u\cos u - 6\sin u\cos u \\ &= -4\sin u\cos u,\end{aligned} \tag{86}$$

$$\chi_2(u) = -2\sin^2 u + 3\sin^4 u + 3\sin^2 u\cos^2 u = \sin^2 u. \tag{87}$$

Digitized by Google

Der Koeffizient von a^3 ist gleich Null.

Ebenso finden wir

$$P_2 \sin u - P_1 \cos u = \frac{e^{a u}}{(1 + a^2)(9 + a^2)} \cdot \Omega(u), \tag{88}$$

wo

$$\Omega(u) = \omega_0(u) + \omega_1(u) \cdot a + \omega_2(u) \cdot a^2 \tag{89}$$

und

$$\omega_0(u) = -3 \sin u \cos^3 u - 3 \sin^3 u \cos u = -3 \sin u \cos u, \tag{90}$$

$$\omega_1(u) = 2 \sin^2 u + \sin^2 u \cos^2 u - 2 \cos^2 u - \sin^2 u \cos^2 u$$

$$= 2(\sin^2 u - \cos^2 u), \tag{91}$$

$$\omega_2(u) = 2 \sin u \cos u - 3 \sin u \cos^3 u + 2 \sin u \cos u - 3 \sin^3 u \cos u$$

$$= \sin u \cos u \tag{92}$$

ist. Ferner haben wir

$$P_0 \cos u - Q_0 \sin u = \frac{e^{a u}}{1 + a^2}[-\cos^2 u + a \sin u \cos u - \sin^2 u - a \sin u \cos u]$$

$$= -\frac{e^{a u}}{1 + a^2}, \tag{93}$$

$$Q_1 \sin u - Q_2 \cos u = \varphi(u), \tag{94}$$

wo

$$\varphi(u) = \tfrac{1}{2} \sin^3 u - \tfrac{1}{2} u \cos u + \tfrac{1}{2} \sin u \cos^2 u = \tfrac{1}{2}[\sin u - u \cos u], \tag{95}$$

$$Q_3 \sin u - Q_1 \cos u = \psi(u), \tag{96}$$

$$\psi(u) = \tfrac{1}{2} u \sin u + \tfrac{1}{2} \sin^2 u \cos u - \tfrac{1}{2} \sin^2 u \cos u = \tfrac{1}{2} u \sin u, \tag{97}$$

und

$$P_r \cos u - Q_r \sin u = \frac{e^{-a u}}{1 + a^2}[-\cos^2 u - a \sin u \cos u - \sin^2 u + a \sin u \cos u]$$

$$= -\frac{e^{-a u}}{1 + a^2}. \tag{98}$$

Setzt man alle diese gefundenen Ausdrücke in die Formel (80) ein, so ergibt sich

$$\eta = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1 + \varrho_0)^2 \frac{e^{2 a u}}{(1 + a^2)(9 + a^2)} \{A\chi(u) + B\Omega(u) - (9 + a^2)\nu^2\}$$

$$+ (y_1 + \varrho_0) e^{a u} \{C\varphi(u) + D\psi(u)\} - \frac{1}{1 + a^2} \nu^2 \varrho_0^2\Big]. \tag{99}$$

Nachdem wir so den Ausdruck für η bestimmt und ihn in die Formel (79) eingesetzt haben, können wir die Bestimmung der Konstanten Γ_1 und Γ_2 vornehmen.

Die Anfangsbedingungen lauten: für $t = 0$ und $u = 0$ ist

$$y = y_1$$

Digitized by Google

und

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 \frac{dy}{du} = 0.$$

Da aber

$$\frac{dy}{dt} = \gamma_1 e^{au} [a\Gamma_1 \cos u + a\Gamma_2 \sin u - \Gamma_1 \sin u + \Gamma_2 \cos u] + \gamma_1 \cdot \frac{d\eta}{du},$$

$$= \gamma_1 e^{au} [(a\Gamma_1 + \Gamma_2)\cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1)\sin u] + \gamma_1 \cdot \frac{d\eta}{du} \tag{100}$$

ist, so haben wir für die Bestimmung der Konstanten Γ_1 und Γ_2, nach den Gleichungen (79) und (100) die beiden folgenden Beziehungen

$$y_1 + \varrho_0 = \Gamma_1 + (\eta)_{u=0} \tag{101}$$

und

$$0 = a\Gamma_1 + \Gamma_2 + \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0}. \tag{102}$$

Es ist also nur $(\eta)_{u=0}$ und $\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0}$ zu bestimmen.

Aus der Gleichung (99) haben wir

$$\frac{d\eta}{du} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1+\varrho_0)^2 \frac{e^{2au}}{(1+a^2)(9+a^2)} \{A(2a\chi(u) + \chi'(u)) + B(2a\Omega(u) + \Omega'(u) - 2a(9+a^2)v^2\} + (y_1+\varrho_0)e^{au}\{C(a\varphi(u) + \varphi'(u)) + D(a\psi(u) + \psi'(u))\}\Big]. \tag{103}$$

Bevor wir weitergehen, wollen wir die Ausdrücke für

$$\chi'(u), \quad \Omega'(u), \quad \varphi'(u) \quad \text{und} \quad \psi'(u)$$

aufsuchen.

Nach den Ausdrücken (85), (86) und (87) haben wir

$$\chi_0'(u) = -6 \sin u \cos u$$
$$\chi_1'(u) = -4(\cos^2 u - \sin^2 u)$$
$$\chi_2'(u) = 2 \sin u \cos u.$$

Folglich ist nach Formel (84)

$$\chi'(u) = -6 \sin u \cos u - 4(\cos^2 u - \sin^2 u)a + 2 \sin u \cos u \cdot a^2$$
$$\chi'(o) = -4a.$$

In derselben Weise finden wir (Formel (90), (91), (92) und (89))

$$\Omega'(u) = -3(\cos^2 u - \sin^2 u) + 8 \sin u \cos u \cdot a + (\cos^2 u - \sin^2 u) a^2,$$
$$\Omega'(o) = -3 + a^2.$$

Ferner haben wir auf Grund der Formeln (95) und (97)

$$\varphi'(u) = \tfrac{1}{2}[\cos u - \cos u + u \sin u] = \tfrac{1}{2} u \sin u$$

Digitized by Google

und

$$\varphi'(o) = 0,$$

und weiter

$$\psi'(u) = \tfrac{1}{2}[u \cos u + \sin u]$$

und

$$\psi'(o) = 0.$$

Andererseits ist auf Grund derselben Beziehungen,

$$\chi(o) = 6,$$

$$\Omega(o) = -2a,$$

$$\varphi(o) = 0,$$

$$\psi(o) = 0.$$

Setzt man nun in den Gleichungen (99) und (103) $u = 0$ und setzt die gefundenen Werte für die Funktionen χ, Ω usw. ein, so ergibt sich

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1+\varrho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)}\{6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2\} - \frac{1}{1+a^2}\nu^2\varrho_0^2 \tag{104}$$

und

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1+\varrho_0)^2 \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)}\{A(12a-4a)+B(-4a^2-3+a^2)-2a(9+a^2)\nu^2\}\Big]$$

oder

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}(y_1+\varrho_0)^2 \cdot \frac{1}{(1+a^2)(9+a^2)} \cdot \{8aA - 3(1+a^2)B - 2a(9+a^2)\nu^2\} \tag{105}$$

Zur Abkürzung führen wir nun folgende Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} \sigma &= \frac{(y_1+\varrho_0)^2}{(1+a^2)(9+a^2)}, \\ A_1 &= 6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2, \\ B_1 &= 8aA - 3(1+a^2)B - 2a(9+a^2)\nu^2 \\ \text{und} \quad \nu_1^2 &= \frac{1}{1+a^2}\nu^2\varrho_0^2. \end{aligned}\right\} \tag{106}$$

Dann ergibt sich

$$(\eta)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\{\sigma A_1 - \nu_1^2\}$$

und

$$\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\sigma B_1.$$

Setzt man diese Größen in die Formeln (101) und (102) ein, so erhält man

$$\Gamma_1 = (y_1+\varrho_0) - \frac{\xi}{\gamma_1^2}(\sigma A_1 - \nu_1^2) \tag{107}$$

Digitized by Google

und

$$\Gamma_2 = - a\Gamma_1 - \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} = - a(y_1 + \varrho_0) + \frac{\xi}{\gamma_1^2}(\sigma a A_1 - a v_1^2 - \sigma B_1). \quad (108)$$

Damit sind die Konstanten Γ_1 und Γ_2 bestimmt worden.

Wir kommen wieder auf die Formel (79) zurück,

$$y + \varrho_0 = e^{au}[\Gamma_1 \cos u + \Gamma_2 \sin u] + \eta, \quad (79)$$

und wollen die folgende maximale Ordinate y_2 finden, wenn $\frac{dy}{dt} = \gamma$, $\frac{dy}{du} = 0$ ist. Aus der Gleichung (79) folgt, daß

$$\frac{dy}{du} = e^{au}[a\Gamma_1 \cos u + a\Gamma_2 \sin u - \Gamma_1 \sin u + \Gamma_2 \cos u] + \frac{d\eta}{du}$$

$$= e^{au}[(a\Gamma_1 + \Gamma_2)\cos u + (a\Gamma_2 - \Gamma_1)\sin u] + \frac{d\eta}{du}$$

ist. Aus (108) haben wir aber

$$a\Gamma_1 + \Gamma_2 = - \left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0}.$$

Folglich ergibt sich, wenn man $\frac{dy}{du} = 0$ setzt,

$$\sin u = \frac{1}{a\Gamma_2 - \Gamma_1}\left[\left(\frac{d\eta}{du}\right)_{u=0} \cdot \cos u - e^{-au}\frac{d\eta}{du}\right].$$

Da aber nach der Formel (99) η proportional ξ ist, so können wir diese Gleichung in folgender Form ausdrücken:

$$\sin u = \xi F(u). \quad (109)$$

Die Form dieser Funktion $F(u)$ brauchen wir nicht zu kennen. Die angenäherte Wurzel dieser Gleichung bei $\xi = 0$ ist

$$u_0 = \pi.$$

Den genaueren Wert der Wurzel können wir also ausdrücken durch

$$u_0 = \pi + \delta \cdot \xi,$$

wo δ eine konstante Größe ist.

Wenn wir diese Größe in die Formel (109) einsetzten, so könnten wir den Wert von δ bestimmen, was aber nicht verlangt wird.

Setzt man den Wert für u_0 in die Formel (79) ein, so ergibt sich bis auf die Größen von der Ordnung ξ^2

$$(y_2 + \varrho_0) = e^{a(\pi + \delta\xi)}[\Gamma_1 \cos(\pi + \delta\xi) + \Gamma_2 \sin(\pi + \delta\xi)] + (\eta)_{u=\pi}$$

$$= e^{a\pi}[-\Gamma_1 - \delta\xi(\Gamma_2 + a\Gamma_1)] + (\eta)_{u=\pi}.$$

Digitized by Google

Nach der Formel (108) ist aber $\Gamma_2 + a\Gamma_1$ proportional zu ξ und man erhält daher bis auf Größen derselben Ordnung wie ξ^2

$$(y_2 + \varrho_0) = -\Gamma_1 e^{a\pi} + (\eta)_{u=\pi}. \tag{110}$$

Es erübrigt nun noch, $(\eta)_{u=\pi}$ zu berechnen.

Auf Grund der früheren Beziehungen erhalten wir

$$\chi_0(\pi) = 6,$$

$$\chi_1(\pi) = 0,$$

$$\chi_2(\pi) = 0;$$

folglich

$$\chi(\pi) = 6.$$

$$\omega_0(\pi) = 0,$$

$$\omega_1(\pi) = -2,$$

$$\omega_2(\pi) = 0;$$

und weiter

$$\Omega(\pi) = -2a.$$

$$\varphi(\pi) = \tfrac{1}{2}\pi,$$

$$\psi(\pi) = 0.$$

Setzt man diese Größen in die Formel (99) ein, so erhält man

$$(\eta)_{u=\pi} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[(y_1 + \varrho_0)^2 \frac{e^{2a\pi}}{(1+a^2)(9+a^2)}\{6A - 2aB - (9+a^2)\nu^2\}$$
$$+ \frac{1}{2}(y_1 + \varrho_0)e^{a\pi}\cdot \pi C - \frac{1}{1+a^2}\nu^2\varrho_0^2\Big]$$

oder nach den Bezeichnungen (106)

$$(\eta)_{u=\pi} = \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma\cdot A_1 e^{2a\pi} + \frac{1}{2}\pi C\cdot(y_1+\varrho_0)e^{a\pi} - \nu_1^2\Big].$$

Setzen wir nun diese Größe für $(\eta)_{u=\pi}$ und den Ausdruck für Γ_1 aus der Formel (107) in die Formel (110) ein, so ergibt sich

$$(y_2 + \varrho_0) = -\Big[(y_1 + \varrho_0) - \frac{\xi}{\gamma_1^2}(\sigma A_1 - \nu_1^2)\Big]e^{a\pi}$$
$$+ \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma A_1 e^{2a\pi} + \frac{1}{2}\pi C(y_1+\varrho_0)e^{a\pi} - \nu_1^2\Big]$$

oder

$$(y_2 + \varrho_0) = -(y_1 + \varrho_0)e^{a\pi}$$
$$+ \frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma A_1 e^{2a\pi} + \Big\{\frac{1}{2}\pi C(y_1+\varrho_0) + \sigma A_1 - \nu_1^2\Big\}e^{a\pi} - \nu_1^2\Big]. \tag{111}$$

Digitized by Google

Das negative Zeichen vor dem ersten Gliede auf der rechten Seite der Gleichung zeigt, daß die Ordinate y_2 negativ ist, denn der Punkt B (Fig. 159) liegt unter der Zeitachse.

Es seien jetzt, wie früher, alle gemessenen Ordinaten als positiv gerechnet. Dann muß man in der Gleichung (111) statt y_2 einsetzen $-y_2$. Andererseits wissen wir, daß zwischen den Punkten A und B ist $\varrho_0 < 0$, denn es ist $\frac{dy}{dt} < 0$.

Demgemäß setzen wir

$$\varrho = -\varrho_0,$$

indem wir unter ϱ immer eine positive Zahl verstehen.

Dann kann die Gleichung (111) in folgender Form ausgedrückt werden:

$$y_2+\varrho=(y_1-\varrho)e^{a\pi}-\frac{\xi}{\gamma_1^2}\Big[\sigma A_1 e^{2a\pi}+\Big\{\frac{1}{2}\pi C(y_1-\varrho)+\sigma A_1-\nu_1^2\Big\}e^{a\pi}-\nu_1^2\Big]. \quad (112)$$

In dieser Formel vernachlässigen wir die Glieder von der Ordnung ϱ^2 und $\varrho\xi$.

Mit Rücksicht darauf, daß nach der dritten Formel (67) C zu ϱ_0 und ν_1^2 zu ϱ_0^2 proportional ist (vierte Formel (106)), ergibt sich

$$(y_2+\varrho)=(y_1-\varrho)e^{a\pi}-\frac{\xi}{\gamma_1^2}\sigma A_1[e^{2a\pi}+e^{a\pi}],$$

oder, wenn man hierin den Wert σ aus der Formel (106) einsetzt und die Glieder von der Ordnung $\varrho\xi$ vernachlässigt,

$$(y_2+\varrho)=(y_1-\varrho)e^{a\pi}-\frac{\xi}{\gamma_1^2}\cdot\frac{y_1^2}{(1+a^2)(9+a^2)}\cdot A_1[e^{2a\pi}+e^{a\pi}].$$

Wir führen noch die folgende Bezeichnung ein:

$$\mathfrak{A}=\frac{A_1}{\gamma_1^2(1+a^2)(9+a^2)}. \quad (113)$$

Dann ergibt sich

$$(y_2+\varrho)=(y_1-\varrho)e^{a\pi}-\xi\mathfrak{A}y_1^2[e^{2a\pi}+e^{a\pi}]. \quad (114)$$

Hier sind y_1, y_2 und ϱ positive Größen. Wir wollen nun untersuchen, was die Größe $e^{a\pi}$ bedeutet. Zu diesem Zweck setzen wir hierin den Wert a aus der Formel (71) ein.

Dann ist

$$e^{a\pi}=e^{-\pi\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit der Formel (12) des vorhergehenden Paragraphen, so folgt, daß

$$e^{-a\pi}=e^{\pi\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}}$$

das wahre Dämpfungsverhältnis des Apparates darstellt, das wir erhalten hätten, wenn die Differentialgleichung der Pendelbewegung ihre kanonische

Digitized by Google

Form behalten hätte, d. h. wenn ϱ und ξ gleich Null wären. Diese Größe bezeichnen wir mit v.

Also

$$e^{a\pi} = \frac{1}{v}. \tag{115}$$

Naturgemäß soll v eine konstante Größe sein.

Bei Anwesenheit der Reibung der Feder am berußten Papier unterscheidet sich das tatsächliche Verhältnis der absoluten Größen zweier benachbarter Ordinaten etwas von v.

Wir setzen allgemein

$$v_k = \frac{y_k}{y_{k+1}}, \tag{116}$$

wo v_k bei Reibung schon eine Variable ist.

Nach der Bezeichnung (116) ist

$$\frac{y_1}{y_2} = v_1$$

oder

$$y_2 = \frac{1}{v_1} y_1. \tag{117}$$

Dividiert man nun die Gleichung (114) durch $(y_2 + \varrho)$ und setzt darin den Wert $e^{a\pi}$ aus der Formel (115) ein, so ergibt sich

$$1 = \frac{y_1}{y_2} \cdot \frac{1 - \frac{\varrho}{y_1}}{1 + \frac{\varrho}{y_2}} \cdot \frac{1}{v} - \xi \mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2\left(1 + \frac{\varrho}{y_2}\right)} \left[\frac{1}{v^2} + \frac{1}{v}\right].$$

Hier ist ϱ eine kleine Größe; es ergibt sich daher, wenn wir sehr kleine Ordinaten y_k (beispielsweise $y_k < 4$ mm) ausschließen und die Glieder von der Ordnung ϱ^2 und $\varrho\xi$ vernachlässigen,

$$v^2 = \frac{y_1}{y_2}\left\{1 - \left(\frac{1}{y_1} + \frac{1}{y_2}\right)\varrho\right\} v - \xi \mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2} \cdot v - \xi \mathfrak{A} \frac{y_1^2}{y_2}.$$

Setzt man hierin den Wert y_2 aus der Formel (117) ein, so erhält man

$$v^2 = v_1\left\{1 - \frac{1}{y_1}(v_1 + 1)\varrho\right\} v - \xi \mathfrak{A} y_1 v_1 v - \xi \mathfrak{A} y_1 v_1.$$

Wir führen vorläufig die folgenden Bezeichnungen ein

$$p = v_1\left\{1 - \frac{1}{y_1}(v_1 + 1)\varrho\right\}$$

und

$$q = \xi \mathfrak{A} y_1 v_1. \tag{118}$$

Dann kann die vorige Gleichung in folgender Gestalt geschrieben werden

$$v^2 - (p - q)v + q = 0. \tag{119}$$

Digitized by Google

Die wahre Größe des Dämpfungsverhältnisses v ist also die Wurzel dieser quadratischen Gleichung.

Folglich ist

$$v = \frac{p-q}{2} \pm \sqrt{\frac{(p-q)^2 - 4q}{4}}$$

oder unter Berücksichtigung, daß q selbst eine kleine Größe von der Ordnung ξ ist,

$$v = \frac{1}{2}\left[(p-q) \pm (p-q)\left\{1 - \frac{4q}{(p-q)^2}\right\}^{\frac{1}{2}}\right],$$

oder noch

$$v = \frac{1}{2}\left[(p-q) \pm (p-q)\left\{1 - \frac{2q}{p^2}\right\}\right].$$

In dieser Formel hat man das Zeichen + zu nehmen, weil sich v mit q zugleich nicht in 0 verwandelt. Also

$$v = \frac{1}{2}(p-q)\left[2 - \frac{2q}{p^2}\right] = p - q - \frac{q}{p} = p - \frac{1+p}{p}q.$$

Setzt man hierin die Werte p und q aus den Ausdrücken (118) ein und vernachlässigt die Glieder von der Ordnung $\xi\varrho$, so ergibt sich

$$v = v_1 - \frac{1}{y_1} v_1(v_1+1)\varrho - \frac{1+v_1}{v_1} \cdot \xi \mathfrak{A} y_1 v_1$$

oder schließlich

$$v + \frac{1}{y_1} v_1(v_1+1)\varrho + y_1(v_1+1)\mathfrak{A}\xi = v_1. \tag{120}$$

Die Formel (120) bezieht sich auf ein beliebiges Paar benachbarter Ordinaten, denn wir haben ganz willkürlich die erste Ordinate y_1 als positiv und die zweite als negativ angenommen.

Bezeichnet man also allgemein mit y_k eine beliebige Ordinate und betrachtet $\mathfrak{A}\xi$ als eine neue Variable ζ, da $\mathfrak{A}$ nicht von den Größen der Ordinaten, auch nicht von v_k abhängt,

$$\zeta = \mathfrak{A}\xi, \tag{121}$$

und berücksichtigt man weiter die Beziehung (116), so ergibt sich

$$v + b_k\varrho + c_k\zeta = v_k, \tag{122}$$

wo

$$\left.\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{y_k} \cdot v_k(v_k+1), \\ c_k &= y_k(v_k+1), \\ v_k &= \frac{y_k}{y_{k+1}} \end{aligned}\right\} \tag{123}$$

ist. Die Formel (122) bildet die Grundlage zur Bestimmung des wahren Dämpfungsverhältnisses v des Apparates und der beiden Koeffizienten der Reibung, ϱ und ξ, die beide kleine Größen sind.

Digitized by Google

Mit der Abnahme von y_k nimmt der Koeffizient c_k ab und b_k zu, da aber erfahrungsgemäß ϱ und ξ beide positive Größen sind und, wie wir gleich sehen werden, $\mathfrak{A}$ negativ ist, so wird bei Verkleinerung von y_k das scheinbare Dämpfungsverhältnis fortwährend zunehmen, was mit den Beobachtungen übereinstimmt.

Wäre $\xi = 0$, so wäre

$$v + b_k \varrho = v_k. \tag{124}$$

Diese Formel ergibt sich unmittelbar aus der Näherungsformel (32) des vorigen Paragraphen, nach der für nicht allzu kleine Werte von y_k

$$v = \frac{y_k - \varrho}{y_{k+1} + \varrho} = \frac{y_k}{y_{k+1}} \cdot \frac{1 - \frac{\varrho}{y_k}}{1 + \frac{\varrho}{y_{k+1}}} = v_k\left[1 - \varrho \frac{1}{y_k}(v_k + 1)\right]$$

oder

$$v + \frac{1}{y_k} \cdot v_k(v_k + 1)\varrho = v_k$$

ist. Es erübrigt noch den Wert des Koeffizienten $\mathfrak{A}$ zu berechnen. Dazu setzen wir in die Formel (113) den Ausdruck A_1 aus der zweiten Formel (106) ein und ersetzen den Wert a durch die entsprechende Größe aus der Formel (71) $\left(a = -\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}\right)$.

Dann ergibt sich

$$\mathfrak{A} = \frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)}\left[6A + 2\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1}B - \frac{1}{\gamma_1^2}(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)\nu^2\right].$$

Hierin setzen wir die Werte A und B aus den Formeln (67) ein,

$$\mathfrak{A} = \frac{\gamma_1^2}{(\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)}\Big[-6\frac{(\nu\varepsilon_1 - n_1^2)^2 - \nu^2\gamma_1^2}{\gamma_1^2} - 2\frac{\varepsilon_1}{\gamma_1} \cdot 2\nu\frac{\nu\varepsilon_1 - n_1^2}{\gamma_1}$$
$$- \frac{1}{\gamma_1^2}(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)\nu^2\Big]$$
$$= -\frac{1}{(\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)(9\gamma_1^2 + \varepsilon_1^2)}[6n_1^4 - 16\varepsilon_1 n_1^2\nu + (3\gamma_1^2 + 11\varepsilon_1^2)\nu^2].$$

Berücksichtigt man nun, daß nach der Formel (65)

$$\gamma_1^2 = n_1^2 - \varepsilon_1^2$$

ist und führt den Beziehungen (9) und (10) entsprechend die Bezeichnung ein

$$\mu_1^2 = 1 - \frac{\varepsilon_1^2}{n_1^2}, \tag{125}$$

so ergibt sich

$$\varepsilon_1 = n_1\sqrt{1 - \mu_1^2} \tag{126}$$

und

$$\gamma_1 = n_1\mu_1. \tag{127}$$

Digitized by Google

Der Koeffizient μ_1 charakterisiert den Dämpfungsgrad des Apparates.

Setzen wir nun diese Werte für ε_1 und γ_1 in den vorigen Ausdruck für $\mathfrak{A}$ ein, so erhalten wir endgültig

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{n_1^4(1+8\mu_1^2)}\left[6n_1^4 - 16n_1^3\sqrt{1-\mu_1^2}\cdot\nu + n_1^2(11-8\mu_1^2)\nu^2\right]$$

oder

$$\mathfrak{A} = -\frac{1}{(1+8\mu_1^2)}\left[6 - 16\sqrt{1-\mu_1^2}\cdot\frac{\nu}{n_1} + (11-8\mu_1^2)\frac{\nu^2}{n_1^2}\right]. \tag{128}$$

Dies ist der Ausdruck für $\mathfrak{A}$, in dem nach Formel (53) $\nu = \frac{\lambda}{b}$ ist.

$\frac{\nu}{n_1}$ ist immer eine kleine Größe, weil die Länge einer Sekunde λ auf der Registrierwalze immer sehr klein ist.

$\mathfrak{A}$ tritt als Multiplikator bei einer kleinen Größe ξ (Formel (121)) auf, und wir können daher mit hinreichender Annäherung setzen

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1+8\mu_1^2}. \tag{129}$$

$\mathfrak{A}$ ist eine negative Größe.

Ist das Pendel ganz ungedämpft, so ist $\mu_1^2 = 1$, und

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{2}{3}.$$

Für die Aperiodizitätsgrenze ($\mu_1^2 = 0$) ist

$$\mathfrak{A} = -6.$$

Das sind die Grenzwerte des Koeffizienten $\mathfrak{A}$.

Wir wollen nun sehen, wie die Gleichung (122) zu verwenden ist.

Ist das Pendel auf sehr schwache Dämpfung eingestellt, sind also bei magnetischer Dämpfung die Magnete auseinandergeschoben und die Pole eines jeden durch eine Eisenplatte geschlossen, oder sind bei der Luftdämpfung die Luftkammern geöffnet oder ist eine Verbindung zwischen ihnen hergestellt, so erteilt man der Pendelmasse einen kleinen Stoß und entnimmt der aufgezeichneten Kurve der Eigenbewegung eine Reihe maximaler Ordinaten $y_1, y_2, \ldots, y_i$.

Dabei muß die Rotationsgeschwindigkeit der Trommel dieselbe sein, wie sie bei den seismischen Beobachtungen angewandt wird.

Dann erhalten wir folgende Gruppe von Gleichungen:

$$\left.\begin{array}{l} v + b_1\varrho + c_1\zeta = v_1 \\ v + b_2\varrho + c_2\zeta = v_2 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ v + b_i\varrho + c_i\zeta = v_i \end{array}\right\}. \tag{130}$$

Digitized by Google

Bilden wir nun das arithmetische Mittel dieser Gleichungen und setzen dementsprechend

$$b_m = \frac{b_1 + b_2 + \cdots + b_i}{i}$$

$$c_m = \frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_i}{i}$$

$$v_m = \frac{v_1 + v_2 + \cdots + v_i}{i},$$

so ergibt sich

$$v + b_m \varrho + c_m \zeta = v_m. \tag{131}$$

Ziehen wir diese Gleichung von jeder der Gleichungen (130) ab, so bekommen wir:

$$\left.\begin{array}{l} (b_1 - b_m)\varrho + (c_1 - c_m)\zeta = (v_1 - v_m) \\ (b_2 - b_m)\varrho + (c_2 - c_m)\zeta = (v_2 - v_m) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (b_i - b_m)\varrho + (c_i - c_m)\zeta = (v_i - v_m) \end{array}\right\}. \tag{132}$$

Es treten hier nur die zwei Unbekannten ϱ und ζ auf.

Dieses Gleichungssystem läßt sich leicht nach der Methode der kleinsten Quadrate behandeln; wir erhalten daraus die gesuchten Werte der Unbekannten ϱ und ζ.

Sind nun ϱ und ζ bekannt, so ergibt sich sofort aus der Gleichung (131) der Wert von v.

Die Unbekannte ξ bestimmen wir aus der Formel (121):

$$\xi = \frac{\zeta}{\mathfrak{A}}. \tag{133}$$

Die Erfahrung lehrt, daß ζ in der Mehrzahl der Fälle negativ ist; da $\mathfrak{A}$ auch negativ ist, so wird ξ eine positive Größe sein.

Der Ausdruck des Koeffizienten $\mathfrak{A}$ enthält μ_1^2. Diese Größe findet man leicht aus der schon bekannten Größe v.

Der Beziehung (12) gemäß ist

$$v = e^{\pi \frac{\sqrt{1-\mu_1^2}}{\mu_1}};$$

folglich

$$\mu_1^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log v)^2} = \frac{1}{1 + 0{,}53720\, \Delta^2}, \tag{134}$$

wo $\Delta = \log_{10} v$ das gewöhnliche logarithmische Dekrement ist.

Zur Berechnung von μ_1^2 kann man sich sehr bequem der Tabelle IX der „Seismometrischen Tabellen“ bedienen, wo die Werte von

$$\log \sqrt{1 + 0{,}53720\, \Delta^2}.$$

zusammengestellt sind.

Digitized by Google

Wenn ϱ und ξ einmal bekannt sind, so schaltet man die für die seismischen Beobachtungen wünschenswerte Dämpfung (z. B. $v = 4$ oder 5) ein und läßt das Pendel wieder die Kurve seiner Eigenbewegung aufschreiben.

Es wird dann die Anzahl der Maximalordinaten y_k sehr gering.

Man entnimmt aus der Kurve den angenäherten Wert von v und bestimmt den angenäherten Wert von μ_1^2 und $\mathfrak{A}$ und weiter mit Hilfe der bekannten Größe ξ den entsprechenden Wert von ζ (Formel (121)). Dann tritt in der Gleichung (122) nur eine einzige Unbekannte v auf.

Der endgültige Wert des Dämpfungsverhältnisses ergibt sich als Mittel der so bestimmten Größen v.

Mit diesem Wert von v kann man $\mathfrak{A}$ nochmals berechnen und den zweiten Wert von v bestimmen; dies wird aber im allgemeinen wegen der Kleinheit von ξ überflüssig sein.

Wir haben bei Anwendung der Gleichung (122) vorausgesetzt, daß alle maximalen Ordinaten y_k richtig ausgemessen sind, mit anderen Worten, daß wir die richtige Lage der Nullinie kennen. Da dies aber nicht immer zutrifft, so ist es besser, die Gleichung (122) so umzugestalten, daß sie nur die Summe der absoluten Werte der benachbarten Ordinaten enthält

$$w_k = y_k + y_{k+1} \quad \text{(Formel (37))}.$$

Unter Berücksichtigung der Beziehung (123) nimmt die Gleichung (122) folgende Form an:

$$v + \frac{1}{y_k} \cdot \frac{y_k}{y_{k+1}}\left(\frac{y_k}{y_{k+1}} + 1\right)\varrho + y_k\left(\frac{y_k}{y_{k+1}} + 1\right)\zeta = \frac{y_k}{y_{k+1}}$$

oder

$$y_{k+1} \cdot v + \frac{y_k + y_{k+1}}{y_{k+1}} \cdot \varrho + y_k(y_k + y_{k+1})\zeta = y_k.$$

Führt man die Bezeichnung (37) ein, so erhält man

$$y_{k+1} \cdot v + \frac{w_k}{y_{k+1}}\varrho + y_k w_k \zeta = y_k. \tag{135}$$

In ganz ähnlicher Weise erhält man die Gleichung

$$y_{k+2} \cdot v + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}}\varrho + y_{k+1} \cdot w_{k+1}\zeta = y_{k+1}. \tag{136}$$

Wir wollen nun die Gleichungen (135) und (136) addieren

$$w_{k+1} \cdot v + \left(\frac{w_k}{y_{k+1}} + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}}\right)\varrho + (y_k w_k + y_{k+1} w_{k+1})\zeta = w_k.$$

Dividiert man diese Gleichung durch w_{k+1} und führt folgende Bezeichnungen ein

$$B_k = \frac{1}{w_{k+1}}\left\{\frac{w_k}{y_{k+1}} + \frac{w_{k+1}}{y_{k+2}}\right\} \tag{137}$$

Digitized by Google

$$C_k = \frac{1}{w_{k+1}} \{ y_k w_k + y_{k+1} w_{k+1} \} \tag{138}$$

und

$$m_k = \frac{w_k}{w_{k+1}}, \tag{139}$$

wo

$$w_k = y_k + y_{k+1}$$

ist, so ergibt sich endgültig

$$v + B_k \varrho + C_k \xi = m_k. \tag{140}$$

m_k enthält nur Summen zweier benachbarter Ordinaten, und deshalb wird diese Größe von der etwaigen Lage der Nullinie nicht beeinflußt.

Wenn aber in den Ausdrücken für B_k und C_k außer w_k und w_{k+1} noch die absoluten Werte der Ordinaten selbst, y_k, y_{k+1} und y_{k+2}, auftreten, so ist das von keiner Bedeutung, da B_k und C_k nur als Koeffizienten bei zwei kleinen Größen ϱ und ξ auftreten und folglich ein etwaiger kleiner Fehler in den Werten von B_k und C_k ohne Belang ist.

Die Gleichung (140) läßt sich in derselben Weise wie die Gleichung (122) behandeln.

Zuerst bestimmt man bei schwacher Dämpfung die wahrscheinlichsten Werte von ϱ und ξ.

Alsdann schaltet man die nötige starke Dämpfung ein, bestimmt $\mathfrak{A}$ und $\zeta = \mathfrak{A}\xi$ und berechnet dann nach Formel (140) die Größe des endgültigen Dämpfungsverhältnisses v. Hierfür sind bei starker Dämpfung drei Ordinaten y_1, y_2 und y_3 hinreichend, wobei y_3 nicht kleiner als 4 mm sein darf.

Bei der Bestimmung der Reibungskonstanten ϱ und ξ und der endgültigen Größe des Dämpfungsverhältnisses v ist die Gleichung (140) der Gleichung (122) vorzuziehen.

Die oben dargestellte Theorie wurde im Physikalischen Laboratorium der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg einer experimentellen Kontrolle unterzogen, von der einige Beobachtungsergebnisse mitgeteilt seien.

Wie früher bei der Ableitung der elementaren Theorie der mechanischen Registrierung, die den Einfluß des Korrektionsgliedes ξ nicht berücksichtigt, bemerkt wurde, bleiben ϱ und v nicht konstant. Es ergaben sich nun die folgenden Zahlen:

y_k	v
49 mm	1,3 mm
25	0,5
12	0,3
6	0,2

w_k	v	v_k
154,9 mm		
		1,91
81,2	1,82	
		2,00
40,7	1,93	
		2,07
19,7	1,96	
		2,19
9,0	2,06	
		2,37
3,8		

Wir sehen also, daß sogar bei Berücksichtigung der Korrektion für ϱ der Wert für v nicht konstant bleibt, sondern daß er mit der Verkleinerung der Amplituden zunimmt. Noch viel weniger konstant ist die Größe v_k, die das Dämpfungsverhältnis darstellen würde, wenn keine Reibung des Stiftes vorhanden wäre; sie nimmt mit abnehmenden Amplituden stark zu.

Um die strenge Theorie, welche die Korrektion für ξ berücksichtigt, und im einzelnen die Formel (122) zu prüfen, wurden etliche Kurven der Eigenbewegung des schweren Horizontalpendels (Kap. IV, § 3) aufgenommen und die entsprechenden Beobachtungsresultate nach der Methode der kleinsten Quadrate für die drei Unbekannten v, ϱ und ζ berechnet. Die Größe der mittleren Fehler liefert ein gutes Kriterium zur Beurteilung der Frage, inwieweit v und ϱ sich wirklich als konstant ergeben.

In diesem Falle erwies sich, daß v und ϱ innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler tatsächlich als konstante Größen auftreten, wie man aus den folgenden Angaben ersehen kann.

I. Kurve.

k	y_k	v_k	
1	39,75 mm	1,230	$\Delta v_k = 0{,}175$.
. . .	. . . . . .	. . .	
9	5,55	1,405	
10	3,95		

Nach der Formel (122) ergibt sich:

		Fehler in %
$v =$	$1{,}248 \pm 0{,}013$	1,0 %
$\varrho =$	$+\,0{,}278\text{ mm} \pm 0{,}024\text{ mm}$	8,6 %
$\zeta =$	$-\,0{,}000472 \pm 0{,}00017$	36,0 %.

Digitized by Google

II. Kurve.

k	y_k	v_k	
1	51,49 mm	1,0345	$\Delta v_k = 0{,}1710$
. . .	. . .	. . .	
37	4,57	1,2055	
38	3,79		

		Fehler in %
$v =$ 1,0429	$\pm$ 0,0021	0,2 %
$\varrho = +$ 0,299 mm	$\pm$ 0,0057 mm	1,9 %
$\zeta = -$ 0,000221	$\pm$ 0,0000257	11,6 %.

Die beiden folgenden Kurven entsprechen einer stärkeren Reibung.

III. Kurve.

k	y_k	v_k	
1	41,19 mm	1,131	$\Delta v_k = 0{,}497$
. . .	. . .	. . .	
8	8,30	1,628	
9	5,10		

		Fehler in %
$v =$ 1,363	$\pm$ 0,072	5,3 %
$\varrho = +$ 0,683 mm	$\pm$ 0,134 mm	19,6 %
$\zeta = -$ 0,00329	$\pm$ 0,00091	27,7 %.

IV. Kurve.

k	y_k	v_k	
1	71,28 mm	1,086	$\Delta v_k = 0{,}763$
. . .	. . .	. . .	
14	8,60	1,849	
15	4,65		

		Fehler in %
$v =$ 1,094	$\pm$ 0,023	2,1 %
$\varrho = +$ 1,279 mm	$\pm$ 0,052 mm	4,1 %
$\zeta = -$ 0,000359	$\pm$ 0,00020	55,7 %.

Die mittleren Fehler für v und ϱ sind sehr klein.

Obwohl der Fehler von ζ ziemlich erheblich ist, hat doch dieser Umstand keine große praktische Bedeutung, da ζ oder ξ in der Grundgleichung nur als kleines Korrektionsglied auftritt.

Digitized by Google

Die hier angeführten Beispiele mögen genügen, um zu zeigen, daß die Berücksichtigung der zweiten Reibungskonstante ξ sehr zweckmäßig ist.

Selbstverständlich kann die hier dargelegte Theorie der mechanischen Registrierung keineswegs als vollkommen streng betrachtet werden, sie erscheint im Vergleich zur elementaren Theorie nur als eine zweite Annäherung an die Wirklichkeit.

Auf den seismischen Stationen zweiten Ranges, wo Apparate mit mechanischer Registrierung aufgestellt sind, sollte man die letztere Methode der Bestimmung der Seismographenkonstanten benutzen.

§ 3. Bestimmung der Bodenverschiebungen in der Maximalphase eines Bebens.

In der Hauptphase eines Bebens treten mehr oder weniger regelmäßige harmonische seismische Wellen auf, wobei eine jede der drei Komponenten der wahren Bodenverschiebung durch eine einfache Sinuslinie dargestellt werden kann.

x sei eine solche Komponente.

Dann können wir setzen

$$x = x_m \sin(pt + \delta) \qquad (141)$$

wo

$$p = \frac{2\pi}{T_p}.$$

T_p ist die Wellenperiode, die bei genügend starker Dämpfung der Seismographen unmittelbar aus dem Seismogramm entnommen werden kann.

Die Aufgabe besteht darin, die größte Amplitude x_m der wahren Bodenbewegung für den Moment t_{x_m} zu finden.

Wir wissen bereits, wie diese Aufgabe bei der einfachen optischen und bei der galvanometrischen Registrierung (§ 4, Kap. X) gelöst wird.

Wir wollen nun die Lösung dieser Frage für die mechanische Registrierung unter Berücksichtigung der Korrektionsglieder für die Reibung der Feder am berußten Papier untersuchen.

Dazu gehen wir auf die allgemeine Differentialgleichung (62) zurück.

Sie enthält die Konstanten ε_1 und n_1, die selbst von der Reibung der Feder abhängen und direkt durch Versuche bestimmt werden können. Wir wollen den Index bei diesen Größen fallen lassen.

Dann lautet die Differentialgleichung der Bewegung des Seismographen:

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2(y + \varrho_0) + \xi\{y' + \nu y\}^2 + \mathfrak{B}_0 x'' = 0. \qquad (142)$$

Die Größen der Korrektionen für die Reibung ϱ_0 oder ϱ und ξ der Feder können wir bestimmen.

Sind sie bei schwacher Dämpfung schon bestimmt, so nähert man die Magnete der Kupferplatte und berechnet den endgültigen Wert des Dämpfungs-

Digitized by Google

verhältnisses v. Dann findet man nach der der Formel (134) analogen Formel die Größe

$$\mu^2 = \frac{\pi^2}{\pi^2 + (\log v)^2} = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Lambda^2}, \tag{143}$$

wo

$$\Lambda = \log_{10} v$$

und

$$\mu^2 = 1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2} \tag{144}$$

ist. n läßt sich aus der Kurve der Eigenbewegung des Seismographen mit Hilfe der Eigenperiode T' des Pendels ohne Dämpfung und der Größe des entsprechenden logarithmischen Dekrements Λ (Formel (17) § 1) bestimmen, wobei man Λ nur angenähert ermittelt, ohne eine Korrektion für die Reibung der Feder einzuführen, weil das Dekrement die Periode sehr wenig beeinflußt.

Die Eigenperiode des Pendels ohne Dämpfung ist

$$T = \frac{2\pi}{n}.$$

Man kann also alle Konstanten ε, n, ϱ_0, ξ, v und $\mathfrak{B}_0$, die die Gleichung (142) enthält, als bestimmt betrachten.

Diese Gleichung werden wir ebenfalls nach der Methode der sukzessiven Annäherung integrieren.

Dazu müssen wir zuerst ϱ_0 und ξ gleich Null setzen.

Ist die Dämpfung des Apparates genügend stark (v ca. 4—5) und die Zeit t nicht zu klein, so daß die Glieder des allgemeinen Integrals der Gleichung (142), die die Integrationskonstanten und $e^{-\varepsilon t}$ als Faktor enthalten, verschwinden, so ergibt sich nach Formel (103), § 4 des V. Kap.

$$y = \mathfrak{B}_0 x_m \frac{1}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \cdot \sin\{p(t-\tau)+\delta\}, \tag{145}$$

wo

$$u = \frac{T_p}{T} \tag{146}$$

$$f(u) = \left(\frac{2u}{1+u^2}\right)^2 \tag{147}$$

$$\mathfrak{B}_0 = \frac{L}{l} \tag{148}$$

und

$$\tau = \frac{T_p}{2\pi} \cdot \operatorname{arctg}\left\{\sqrt{1-\mu^2} \cdot \frac{2u}{u^2-1}\right\} \text{ (Formel (112), § 4, Kap. V)} \tag{149}$$

ist. Wir wollen nun der Einfachheit halber folgende Bezeichnungen einführen:

$$A_0 = \mathfrak{B}_0 \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}} \tag{150}$$

Digitized by Google

und

$$\psi = pt - p\tau + \delta. \tag{151}$$

Dann wird

$$y = A_0 \sin \psi. \tag{152}$$

Mit Hilfe dieses Ausdrucks für y hat man den Wert $\{y' + \nu y\}^2$ zu bestimmen und ihn in die Gleichung (142) einzusetzen

$$y' = \frac{dy}{dt} = A_0 \cos \psi \cdot \frac{d\psi}{dt} = A_0 p \cos \psi;$$

folglich

$$y' + \nu y = A_0 \{p \cos \psi + \nu \sin \psi\}$$

$$= A_0 \sqrt{p^2 + \nu^2} \cdot \left[\frac{p}{\sqrt{p^2 + \nu^2}} \cos \psi + \frac{\nu}{\sqrt{p^2 + \nu^2}} \sin \psi\right].$$

Führen wir noch folgende Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} \frac{p}{\sqrt{p^2 + \nu^2}} &= \sin \beta \\ \frac{\nu}{\sqrt{p^2 + \nu^2}} &= \cos \beta \end{aligned}\right\} \tag{153}$$

oder

$$\frac{p}{\nu} = \operatorname{tg} \beta$$

und

$$A = A_0^2 (p^2 + \nu^2) \tag{154}$$

und setzen diese Größen in die vorige Gleichung ein, so ergibt sich

$$\{y' + \nu y\}^2 = A \sin^2 (\psi + \beta). \tag{155}$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung (141) können wir unsere Differentialgleichung (142) folgendermaßen ausdrücken

$$y'' + 2\varepsilon y' + n^2 (y + \varrho_0) = \mathfrak{B}_0 p^2 x_m \sin (pt + \delta) - \xi A \sin^2 (\psi + \beta). \tag{156}$$

Die Variable dieser Gleichung ist $y + \varrho_0$.

Auf Grund der Formeln (145), (150) und (151), sowie der allgemeinen Integralformel (68), § 3, Kap. V, kann das allgemeine Integral der Gleichung (156) in folgender Gestalt geschrieben werden:

$$y + \varrho_0 = e^{-\varepsilon t} [\Gamma_1 \cos \gamma t + \Gamma_2 \sin \gamma t] + A_0 \sin \psi + \eta, \tag{157}$$

wo

$$\gamma = + \sqrt{n^2 - \varepsilon^2} \tag{158}$$

und

$$\eta = \xi \frac{A}{\gamma} \cdot e^{-\varepsilon t} \Big[\cos \gamma t \cdot \int e^{\varepsilon t} \sin \gamma t \cdot \sin^2 (\psi + \beta) dt$$

$$- \sin \gamma t \cdot \int e^{\varepsilon t} \cos \gamma t \cdot \sin^2 (\psi + \beta) dt\Big] \tag{159}$$

Digitized by Google

ist. Ist die Dämpfung genügend groß und t nicht sehr klein, so können wir die beiden ersten Glieder auf der rechten Seite der Gleichung (157) vernachlässigen und haben dann einfach

$$y + \varrho_0 = A_0 \sin \psi + \eta. \tag{160}$$

Wir wollen nun η ausrechnen.

Dazu führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$a = \psi + \beta = pt - p\tau + \delta + \beta \quad \text{(Formel (151))} \tag{161}$$

$$b = \gamma t \tag{162}$$

$$S_1 = \int e^{\varepsilon t} \sin b \sin^2 a\, dt \tag{163}$$

und

$$S_2 = \int e^{\varepsilon t} \cos b \sin^2 a\, dt. \tag{164}$$

Dann ergibt sich nach Formel (159)

$$\eta = \xi \frac{A}{\gamma} \cdot e^{-\varepsilon t} [\cos b \cdot S_1 - \sin b \cdot S_2]. \tag{165}$$

Nun wollen wir die unbestimmten Integrale S_1 und S_2 berechnen. Auf Grund der bekannten Formeln der Trigonometrie haben wir

$$\sin M \cdot \sin N = \tfrac{1}{2} \{\cos(M - N) - \cos(M + N)\}$$

und

$$\sin M \cdot \cos N = \tfrac{1}{2} \{\sin(M + N) + \sin(M - N)\};$$

folglich

$$\begin{aligned} \sin b \sin^2 a &= \tfrac{1}{2} \sin a \{\cos(a - b) - \cos(a + b)\} \\ &= \tfrac{1}{4} [2 \sin b + \sin(2a - b) - \sin(2a + b)] \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \cos b \sin^2 a &= \tfrac{1}{2} \sin a \{\sin(a + b) + \sin(a - b)\} \\ &= \tfrac{1}{4} [2 \cos b - \cos(2a - b) - \cos(2a + b)]. \end{aligned}$$

Wir führen nun die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} G &= \int e^{\varepsilon t} \sin b\, dt \\ G_1 &= \int e^{\varepsilon t} \sin(2a - b)\, dt \\ G_2 &= \int e^{\varepsilon t} \sin(2a + b)\, dt \end{aligned}\right\} \tag{166}$$

und

$$\left.\begin{aligned} H &= \int e^{\varepsilon t} \cos b\, dt \\ H_1 &= \int e^{\varepsilon t} \cos(2a - b)\, dt \\ H_2 &= \int e^{\varepsilon t} \cos(2a + b)\, dt \end{aligned}\right\}. \tag{167}$$

Dann erhalten wir

$$S_1 = \tfrac{1}{4} [2G + G_1 - G_2]$$

Digitized by Google

und

$$S_2 = \tfrac{1}{4}[2H - H_1 - H_2],$$

und folglich nach Formel (165)

$$\eta = \frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot e^{-\varepsilon t}[2\{G\cos b - H\sin b\} + \{G_1\cos b + H_1\sin b\}$$
$$+ \{-G_2\cos b + H_2\sin b\}]. \tag{168}$$

Es erübrigt noch, die sechs unbestimmten Integrale G, G_1, G_2 und H, H_1, H_2 zu bestimmen, was wir mit Hilfe der Integralformeln (81), § 3, Kap. V ausführen,

$$\left.\begin{aligned} I_1 &= \int e^{\varepsilon t}\cos(qt+\sigma)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[q\sin(qt+\sigma) + \varepsilon\cos(qt+\sigma)] \\ I_2 &= \int e^{\varepsilon t}\sin(qt+\sigma)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q^2}[\varepsilon\sin(qt+\sigma) - q\cos(qt+\sigma)] \end{aligned}\right\}. \tag{169}$$

Berücksichtigt man die Bezeichnungen (161) und (162), so ergibt sich

$$2a - b = (2p - \gamma)t - p\tau + \delta + \beta$$

und

$$2a + b = (2p + \gamma)t - p\tau + \delta + \beta.$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} q_1 &= 2p - \gamma \\ q_2 &= 2p + \gamma \end{aligned}\right\}, \tag{170}$$

und

dann ist

$$2a - b = q_1 t - p\tau + \delta + \beta$$

$$2a + b = q_2 t - p\tau + \delta + \beta.$$

Außerdem ist $b = \gamma t$.

Also haben wir auf Grund der Formeln (169)

$$G = \int e^{\varepsilon t}\sin b\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+\gamma^2}[\varepsilon\sin b - \gamma\cos b]$$

$$G_1 = \int e^{\varepsilon t}\sin(2a-b)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_1^2}[\varepsilon\sin(2a-b) - q_1\cos(2a-b)]$$

$$G_2 = \int e^{\varepsilon t}\sin(2a+b)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}[\varepsilon\sin(2a+b) - q_2\cos(2a+b)]$$

und

$$H = \int e^{\varepsilon t}\cos b\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+\gamma^2}[\gamma\sin b + \varepsilon\cos b]$$

$$H_1 = \int e^{\varepsilon t}\cos(2a-b)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_1^2}[q_1\sin(2a-b) + \varepsilon\cos(2a-b)]$$

$$H_2 = \int e^{\varepsilon t}\cos(2a+b)\,dt = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}[q_2\sin(2a+b) + \varepsilon\cos(2a+b)].$$

Digitized by Google

Auf Grund dieser Ausdrücke erhalten wir

$$G\cos b - H\sin b = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+\gamma^2}[\varepsilon\{\sin b\cos b - \cos b\sin b\} + \gamma\{-\cos^2 b - \sin^2 b\}]$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (158)

$$G\cos b - H\sin b = -\frac{\gamma}{n^2}e^{\varepsilon t}.$$

Ferner

$$G_1\cos b + H_1\sin b = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_1^2}[\varepsilon\{\sin(2a-b)\cos b + \cos(2a-b)\sin b\}$$
$$+ q_1\{-\cos(2a-b)\cos b + \sin(2a-b)\sin b\}]$$
$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_1^2}\{\varepsilon\sin 2a - q_1\cos 2a\}$$

und

$$-G_2\cos b + H_2\sin b = \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}[\varepsilon\{-\sin(2a+b)\cos b + \cos(2a+b)\sin b\}$$
$$+ q_2\{\cos(2a+b)\cos b + \sin(2a+b)\sin b\}]$$
$$= \frac{e^{\varepsilon t}}{\varepsilon^2+q_2^2}\{-\varepsilon\sin 2a + q_2\cos 2a\}.$$

Wir setzen nun die gefundenen Ausdrücke in die Formel (168) ein

$$\eta = \frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot\left[-\frac{2\gamma}{n^2} + \varepsilon\left\{\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\sin 2a + \left\{\frac{-q_1}{\varepsilon^2+q_1^2} + \frac{q_2}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\cos 2a\right].$$

Diese Formel können wir folgendermaßen darstellen:

$$\eta = -\frac{1}{2}\xi\frac{A}{n^2} + \frac{1}{4}\xi\frac{A}{\gamma}\cdot P, \tag{171}$$

wo

$$P = \varepsilon\left\{\frac{1}{\varepsilon^2+q_1^2} - \frac{1}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\sin 2a + \left\{\frac{-q_1}{\varepsilon^2+q_1^2} + \frac{q_2}{\varepsilon^2+q_2^2}\right\}\cos 2a \tag{172}$$

ist. Wir wollen nun P umgestalten,

$$P = \frac{1}{(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)}[\varepsilon(q_2^2-q_1^2)\sin 2a + (-\varepsilon^2 q_1 - q_1 q_2^2 + \varepsilon^2 q_2 + q_1^2 q_2)\cos 2a]$$
$$= \frac{q_2-q_1}{(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2)}[\varepsilon(q_2+q_1)\sin 2a + (\varepsilon^2 - q_1 q_2)\cos 2a].$$

Ferner folgt aus den Bezeichnungen (170) und (158)

$$q_2 - q_1 = 2\gamma$$
$$q_2 + q_1 = 4p$$
$$q_1 q_2 = 4p^2 - \gamma^2$$
$$\varepsilon^2 - q_1 q_2 = n^2 - 4p^2$$
$$\varepsilon^2 + q_1^2 = \varepsilon^2 + 4p^2 - 4p\gamma + \gamma^2 = n^2 + 4p^2 - 4p\gamma$$
$$\varepsilon^2 + q_2^2 = \varepsilon^2 + 4p^2 + 4p\gamma + \gamma^2 = n^2 + 4p^2 + 4p\gamma,$$

folglich

$$(\varepsilon^2+q_1^2)(\varepsilon^2+q_2^2) = (n^2+4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2.$$

Digitized by Google

Setzt man diese Ausdrücke in die vorhergehende Formel für P ein, so ergibt sich

$$P = \frac{2\gamma}{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2}[4\varepsilon p \sin 2a - (4p^2 - n^2)\cos 2a].$$

Führen wir noch die Bezeichnungen ein

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_1 &= \frac{4p^2 - n^2}{\sqrt{(4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}} \\ \cos\beta_1 &= \frac{4\varepsilon p}{\sqrt{(4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2}} \end{aligned}\right\}, \tag{173}$$

oder

$$\operatorname{tg}\beta_1 = \frac{4p^2 - n^2}{4\varepsilon p} \tag{174}$$

und berücksichtigt, daß

$$\begin{aligned} (4\varepsilon p)^2 + (4p^2 - n^2)^2 &= 16\varepsilon^2 p^2 + 16p^4 - 8p^2n^2 + n^4 \\ &= (n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2 \end{aligned}$$

ist, so ergibt sich

$$P = \frac{2\gamma}{\sqrt{(n^2 + 4p^2)^2 - 16p^2\gamma^2}}\sin(2a - \beta_1). \tag{175}$$

Andererseits ist

$$u = \frac{T_p}{T} = \frac{n}{p},$$

$$\gamma^2 = n^2 - \varepsilon^2 = n^2\left(1 - \frac{\varepsilon^2}{n^2}\right) = n^2\mu^2 \qquad \text{(Formel (144))}$$

und

$$\varepsilon = n\sqrt{1 - \mu^2};$$

folglich können wir die Formeln (173) und (175) in der Gestalt darstellen

$$\left.\begin{aligned} \sin\beta_1 &= \frac{4 - u^2}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2}} \\ \cos\beta_1 &= \frac{4u\sqrt{1 - \mu^2}}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2}} \end{aligned}\right\} \tag{176}$$

und

$$P = \frac{2\gamma}{p^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2}}\sin(2a - \beta_1).$$

Berücksichtigt man noch, daß nach der Bezeichnung (161)

$$a = \psi + \beta$$

ist, und führt eine neue Größe

$$\beta_2 = 2\beta - \beta_1 \tag{177}$$

ein, so ergibt sich endgültig

$$P = \frac{2\gamma}{p^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2}}\cdot\sin(2\psi + \beta_2).$$

Digitized by Google

Setzt man diesen Ausdruck für P in die Formel (171) ein, so ergibt sich unter Bezugnahme auf die Beziehung (154)

$$A = A_0^2(p^2 + \nu^2)$$

folgender endgültiger Ausdruck für η

$$\eta = -\frac{1}{2}\xi \cdot \frac{A_0^2\left\{1+\left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\}}{u^2} + \frac{1}{2}\xi \cdot \frac{A_0^2\left\{1+\left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\}}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \sin(2\psi + \beta_2).$$

Für die Koeffizienten dieser Formel führen wir besondere Bezeichnungen ein:

$$\left.\begin{aligned} B_0 &= \frac{A_0^2}{2u^2}\left\{1+\left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\} \\ B_1 &= \frac{A_0^2}{2\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}\left\{1+\left(\frac{\nu}{p}\right)^2\right\} \end{aligned}\right\}. \tag{178}$$

Dann nimmt η folgende Gestalt an:

$$\eta = -\xi B_0 + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2). \tag{179}$$

Setzt man diese Größe in die Formel (160) ein, so ergibt sich

$$y + (\varrho_0 + B_0\xi) = A_0 \sin\psi + \xi B_1 \sin(2\psi + \beta_2), \tag{180}$$

wo nach Formel (150) und (151)

$$A_0 = \mathfrak{B}_0 \frac{x_m}{(1+u^2)\sqrt{1-\mu^2 f(u)}}$$

und

$$\psi = p(t - \tau) + \delta$$

ist. Dies ist der Ausdruck für y bei einer harmonischen Bodenbewegung unter Berücksichtigung der Reibungskonstanten und unter der Bedingung, daß die Dämpfung hinreichend groß und die Zeit t nicht zu klein ist.

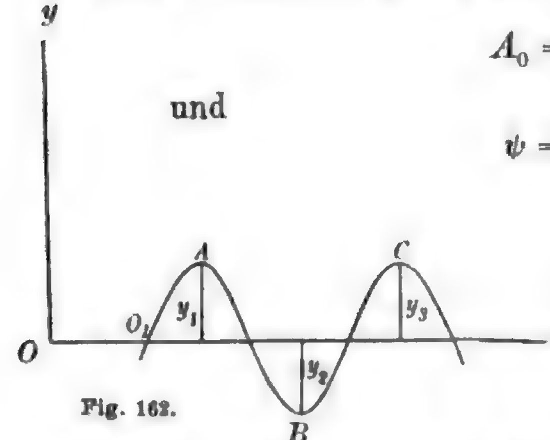


Fig. 162.

Wir wollen nun den Ausdruck für die maximale Ordinate y_1 finden und bestimmen dazu die Wurzel der Gleichung

$$\frac{dy}{dt} = 0.$$

Aus dieser Gleichung erhalten wir

$$\frac{dy}{d\psi} \cdot \frac{d\psi}{dt} = p\frac{dy}{d\psi} = 0$$

oder

$$\frac{dy}{d\psi} = 0. \tag{181}$$

Fassen wir ψ als Variable auf, dann wird der Gang der Funktion y von ψ abhängig und durch die Kurve Fig. 162 dargestellt.

Digitized by Google

Wir wollen nun die erste maximale Ordinate y_1 aufsuchen; die entsprechende Größe ψ bezeichnen wir mit ψ_1.

Aus den Gleichungen (180) und (181) haben wir

$$0 = A_0 \cos\psi + 2\xi B_1 \cos(2\psi + \beta_2). \tag{182}$$

Die erste kleinste angenäherte Wurzel dieser Gleichung ist

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2}.$$

Die genauere Wurzel ergibt sich, wenn man

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi \tag{183}$$

setzt, wo δ_1 eine konstante Größe ist.

Um δ_1 zu bestimmen, setzen wir diesen Ausdruck für ψ_1 in die Formel (182) ein. Unter Vernachlässigung der Glieder höherer Ordnung ergibt sich

$$0 = -A_0 \delta_1 \xi - 2\xi B_1 \cos\beta_2$$

$$\delta_1 = -\frac{2B_1}{A_0}\cos\beta_2. \tag{184}$$

Setzt man nun den Ausdruck für ψ_1 aus der Formel (183) in die Gleichung (180) ein, so ergibt sich

$$y_1 + \varrho_0 + B_0\xi = A_0 \sin\left\{\frac{\pi}{2} + \delta_1\xi\right\} + \xi B_1 \sin(\pi + \beta_2)$$

oder unter Vernachlässigung der Glieder von der Ordnung ξ^2,

$$y_1 + \varrho_0 + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0. \tag{185}$$

Da $y_1 > 0$ und zwischen den Punkten O_1 und A in Fig. 162 $\frac{dy}{dt} > 0$ ist, so ist folglich auch

$$\varrho_0 > 0.$$

Wir wollen nun das zweite Maximum y_2 aufsuchen; den entsprechenden Wert von ψ bezeichnen wir mit ψ_2.

Die zweite Wurzel der Gleichung (182) wird

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_2\xi.$$

Setzen wir diese Größe in dieselbe Gleichung (182) ein, dann finden wir den entsprechenden Wert von δ_2

$$0 = A_0 \delta_2 \xi - 2\xi B_1 \cos\beta_2$$

$$\delta_2 = 2\frac{B_1}{A_0}\cos\beta_2 = -\delta_1.$$

Digitized by Google

Folglich

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} - \delta_1 \xi. \tag{186}$$

Setzt man diese Größe in die Gleichung (180) ein, so erhält man

$$y_2 + \varrho_0 + B_0 \xi = - A_0 - \xi B_1 \sin \beta_2$$

oder

$$y_2 + \varrho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2)\xi = - A_0. \tag{187}$$

Diese Formel zeigt, daß y_2 negativ ist.

In dem Intervall zwischen A und B (Fig. 162) ist $\frac{dy}{dt} < 0$; folglich wird ϱ_0 in der Formel (187) als negative Größe auftreten, weil ϱ_0 sein Vorzeichen zugleich mit $\frac{dy}{dt}$ ändert. Wie sich leicht zeigen läßt, ändert auch ξ sein Vorzeichen mit ϱ_0. Um das nachzuweisen, gehen wir zur Gleichung (51) zurück, die die Reibungskraft f als eine Funktion der Geschwindigkeit v des Schreibstiftes auf dem berußten Papier angibt

$$f = f_0 + \alpha V + \beta V^2.$$

Wir können V nach der Formel (60) für kleine Drehungsgeschwindigkeiten der Trommel (ν klein) durch y' ersetzen.

Dann wird

$$f = f_0 + \alpha y' + \beta y'^2.$$

Nach der Formel (61) ist f_0 zu ϱ_0 und β zu ξ proportional.

Der absolute Wert der Kraft f kann der Natur der Sache nach nicht von der Richtung der Bewegung, also von dem Vorzeichen von y' abhängig sein.

Folglich müssen unbedingt f_0 und β oder ϱ_0 und ξ ihr Vorzeichen mit y' zugleich ändern, wobei, wenn $y' > 0$ ist, auch $\xi > 0$ ist. Die Richtung der Kraft f hängt von dem Zeichen von y' ab, nicht aber die Größe der Kraft selbst.

Also müssen wir in der Formel (187) statt ϱ_0 und ξ, $-\varrho_0$ und $-\xi$ einsetzen, indem wir unter ϱ_0 eine positive Größe verstehen. Andererseits ist auch y_2 negativ.

Wir wollen nun, wie üblich, unter den verschiedenen maximalen Ordinaten y_m immer die absoluten Werte derselben verstehen, unabhängig vom Zeichen; dann können wir die Formel (187) folgendermaßen schreiben

$$y_2 + \varrho_0 + (B_0 + B_1 \sin \beta_2)\xi = A_0. \tag{188}$$

Folglich wird auch

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_1 \xi.$$

Hier sind y_2, ϱ_0 und ξ positive Größen.

Digitized by Google

Lassen wir nun den Index bei ϱ_0 fallen und verstehen immer unter ϱ und ξ die absoluten Werte der entsprechenden Reibungskonstanten, so haben wir

$$y_1 + \varrho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0,$$

$$\psi_1 = \frac{\pi}{2} + \delta_1\xi$$

und

$$y_2 + \varrho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0,$$

$$\psi_2 = 3\frac{\pi}{2} + \delta_1\xi$$

oder im allgemeinen Falle

$$y_m + \varrho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi = A_0 \tag{189}$$

und

$$\psi_m = (2m - 1)\frac{\pi}{2} + \delta_1\xi, \tag{190}$$

wo die Größe δ_1 aus der Formel (184) sich bestimmen läßt.

ξ ist nach § 2 eine positive Größe.

Setzen wir nun in die Formel (189) den Wert A_0 aus der Formel (150) ein, dann ergibt sich

$$x_m = \frac{1}{\mathfrak{B}_0}(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)}\,[y_m + \varrho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi].$$

Aber nach der Bezeichnung (107), § 4, Kap. V ist

$$(1 + u^2)\sqrt{1 - \mu^2 f(u)} = U,$$

wobei die Größe log U in der Tabelle V der „Seismometrischen Tabellen" mit den Argumenten μ^2 und u gegeben ist.

Setzen wir diese Größe für U in die vorige Formel ein, so erhalten wir schließlich

$$x_m = \frac{1}{\mathfrak{B}_0} U \cdot (y_m + \Delta y_m), \tag{191}$$

wo

$$\Delta y_m = \varrho + (B_0 + B_1 \sin\beta_2)\xi \tag{192}$$

ist. Wir sehen also, daß die Berechnung der absoluten Größe x_m der maximalen wahren Bodenverschiebung bei mechanischer Registrierung ganz auf dieselbe Weise wie bei der direkten optischen Registrierung ausgeführt wird, nur mit dem Unterschied, daß man zu den aus dem Seismogramm entnommenen Ordinaten y_m die Korrektion Δy_m (aus der Formel (192)) hinzu zu addieren hat.

Die Konstanten ϱ und ξ, die der Ausdruck Δy_m enthält, werden zuvor aus der Kurve der Eigenbewegung des Seismographen bei schwacher Dämpfung berechnet.

Wir wollen nun den endgültigen Ausdruck für Δy_m aufsuchen und die Verspätung des Momentes t_m eines Maximums auf dem Seismogramm

Digitized by Google

gegen den Moment t_{x_m} des Maximums der wahren Bodenverschiebung berechnen.

Dazu setzen wir die Ausdrücke B_0 und B_1 aus den Formeln (178) in den Ausdruck für Δy_m ein.

Da die Drehungsgeschwindigkeit der Registriertrommel, folglich auch ν sehr klein ist und da B_0 und B_1 mit einer sehr kleinen Größe ξ multipliziert werden, so können wir in den Formeln (178) mit ausreichender Genauigkeit $\left(\frac{\nu}{p}\right)^2$ im Vergleich zu 1 vernachlässigen und es ergibt sich dann

$$\Delta y_m = \varrho + \frac{A_0{}^2}{2}\left\{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}\sin\beta_2\right\}\xi.$$

Setzt man hierin den Wert A_0 aus der Formel (189) ein, so haben wir bis auf Glieder höherer Ordnung

$$\Delta y_m = \varrho + \frac{1}{2} y_m^2 \left\{\frac{1}{u^2} + \frac{1}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}\sin\beta_2\right\}\xi. \tag{193}$$

Wir wollen nun die Werte von $\sin\beta_2$ und $\cos\beta_2$ berechnen.

Nach der Bezeichnung (177) ist

$$\beta_2 = 2\beta - \beta_1;$$

folglich

$$\sin\beta_2 = \sin 2\beta \cdot \cos\beta_1 - \cos 2\beta \cdot \sin\beta_1$$

$$\cos\beta_2 = \cos 2\beta \cdot \cos\beta_1 + \sin 2\beta \cdot \sin\beta_1.$$

Da $\sin\beta_2$ in der Formel (193) und $\cos\beta_2$ in der Formel (190) (siehe den Ausdruck für δ_1 in Formel (184)) mit der kleinen Größe ξ multipliziert werden, so können wir mit ausreichender Genauigkeit in den Formeln (153) $\frac{\nu}{p}$ gleich Null setzen.

Dann wird

$$\sin\beta = 1$$

und

$$\cos\beta = 0;$$

folglich

$$\beta = \frac{\pi}{2}$$

und

$$2\beta = \pi.$$

Also ergibt sich

$$\sin\beta_2 = +\sin\beta_1$$

$$\cos\beta_2 = -\cos\beta_1$$

oder mit Rücksicht auf die Beziehung (176)

$$\sin\beta_2 = \frac{4-u^2}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \tag{194}$$

$$\cos\beta_2 = -\frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}}. \tag{195}$$

Digitized by Google

Setzen wir nun den Ausdruck für $\sin\beta_2$ aus der Formel (194) in die Formel (193) ein. Dann ergibt sich

$$\Delta y_m = \varrho + \frac{1}{2}\, y_m^2 \left[\frac{(4+u^2)^2 - 16\mu^2u^2 + u^2(4-u^2)}{u^2\{(4+u^2)^2 - 16\mu^2u^2\}}\right]\xi$$

$$= \varrho + \frac{1}{2}\, y_m^2 \cdot \frac{16 + 8u^2 + u^4 - 16\mu^2u^2 + 4u^2 - u^4}{u^2\{(4+u^2)^2 - 16\mu^2u^2\}}\,\xi$$

und schließlich

$$\Delta y_m = \varrho + y_m^2 F(u)\xi, \tag{196}$$

wo

$$F(u) = 2 \cdot \frac{4 + (3 - 4\mu^2)u^2}{u^2\{(4+u^2)^2 - 16\mu^2u^2\}} \tag{197}$$

ist. Die Formeln (196) und (197) bieten die Möglichkeit, für einen jeden besonderen Fall die Korrektion Δy_m der ausgemessenen Ordinate y_m zu berechnen. Für kleine Amplituden ist die zweite Korrektion sehr klein.

Wir wollen nun die Zeitverspätung bei dem Eintreffen des Maximums auf dem Seismogramm berechnen.

Aus der Gleichung (141)

$$x = x_m \sin(pt + \delta)$$

folgt, daß das erste Maximum t_{x_1} eintrifft, wenn

$$pt_{x_1} + \delta = \frac{\pi}{2}$$

ist. Für das zweite Maximum ist

$$pt_{x_2} + \delta = 3\,\frac{\pi}{2},$$

und folglich für das m-te Maximum

$$pt_{x_m} + \delta = (2m-1)\,\frac{\pi}{2}\,. \tag{198}$$

Setzt man in die Formel (190) den Wert ψ aus der Formel (151) ein, so ergibt sich

$$pt_m - p\tau + \delta = (2m-1)\,\frac{\pi}{2} + \delta_1\xi. \tag{199}$$

Zieht man die Gleichung (198) von der Gleichung (199) ab, so erhält man

$$p(t_m - t_{x_m}) - p\tau = \delta_1\xi$$

oder

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{\delta_1}{p}\cdot\xi,$$

oder auch

$$t_m - t_{x_m} = \tau + \frac{T_p}{2\pi}\cdot\delta_1\xi. \tag{200}$$

Jetzt bestimmen wir δ_1 mit Hilfe der Formel (184).

Digitized by Google

Setzt man in diese den Wert B_1 aus der zweiten Formel (178) ein, so hat man mit derselben Annäherung

$$\delta_1 = -\frac{A_0}{\sqrt{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}} \cos\beta_2.$$

Ersetzt man hierin den Wert von A_0 aus der Formel (189) und $\cos\beta_2$ durch den Wert aus der Formel (195), so erhält man unter Vernachlässigung von Gliedern höherer Ordnung

$$\delta_1 = y_m \cdot \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2}.$$

Führt man die Bezeichnung

$$F_1(u) = \frac{4u\sqrt{1-\mu^2}}{(4+u^2)^2 - 16\mu^2 u^2} \tag{201}$$

ein, so ergibt sich schließlich

$$t_m - t_{x_m} = T_p\left[\frac{\tau}{T_p} + \frac{1}{2\pi}\cdot y_m F_1(u)\xi\right]. \tag{202}$$

Bei der Bestimmung des wahren Momentes t_m auf dem Seismogramm muß man, wie wir früher in § 3, Kap. IV gesehen haben, von der Größe der Abszisse des Maximums M eine Korrektion wegen der Kreisbewegung des Schreibstiftes abziehen. Diese Korrektion ist negativ. Ihre absolute Größe gibt die Formel (21) des IV. Kap. an, nämlich

$$\Delta t'_m = \frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda}, \tag{203}$$

wo λ die Länge einer Sekunde auf der Registrierwalze ist.

Bedeutet nun t'_m die Abszisse des Punktes M, so ist

$$t_m = t'_m - \Delta t'_m. \tag{204}$$

Folglich haben wir für die Bestimmung des gesuchten Momentes t_{x_m} folgende endgültige Formel

$$t_{x_m} = t'_m - \frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda} - \tau - \frac{T_p}{2\pi}\cdot y_m F_1(u)\cdot\xi. \tag{205}$$

In demselben § 3 des IV. Kap. haben wir gesehen, daß die ausgemessene maximale Ordinate keine Korrektion für die Kreisbewegung des Schreibstiftes erfordert.

Wir wollen nun die hier durchgeführte Theorie durch ein Zahlenbeispiel erläutern.

Wir setzen voraus, daß die Beobachtungen bei schwacher Dämpfung die Werte von v, ϱ und ζ ergeben haben, die der früher betrachteten Kurve I entsprechen, nämlich

$$v = 1{,}248$$

$$\varrho = +0{,}28 \text{ mm}$$

$$\zeta = -0{,}00047.$$

Digitized by Google

Folglich

$$\Delta = \log_{10} v = 0{,}0962.$$

Aus IX der „Seismometrischen Tabellen“ entnimmt man

$$\log s = \log \sqrt{1 + 0{,}53720\,\Delta^2} = 0{,}00108$$

oder

$$\log(1 + 0{,}53720\,\Delta^2) = 0{,}00216.$$

Nach der Formel (134) wird

$$\mu^2 = \frac{1}{1 + 0{,}53720\,\Delta^2};$$

folglich

$$\log \mu^2 = \bar{1}{,}99784$$

$$\mu^2 = 0{,}9950.$$

Weiter erhält man nach der Formel (129)

$$\mathfrak{A} = -\frac{6}{1 + 8\mu^2},$$

$$\mathfrak{A} = -0{,}670.$$

Folglich

$$\xi = \frac{\zeta}{\mathfrak{A}} = 0{,}00070.$$

Wir setzen nun voraus, daß die Eigenperiode des Seismographen ohne Dämpfung $T = 25^s{,}0$ beträgt und daß bei eingeschalteter Dämpfung $\mu^2 = 0{,}80$ ist.

Diesem Werte entspricht nach der Tabelle I der „Seismometrischen Tabellen“ ein Dämpfungsverhältnis $v = 4{,}81$.

Es sei ferner die Länge des langen Hebelarmes der Vergrößerungsvorrichtung $b = 30$ cm und die Länge einer Sekunde λ auf der Registriertrommel 0,5 mm.

Aus dem Seismogramm sei entnommen

$$T_p = 25^s{,}0$$

$$y_m = 80 \text{ mm}.$$

Dann wird

$$u = 1.$$

Mit diesen Werten von μ^2 und u findet man folgende Werte der Funktionen $F(u)$ und $F_1(u)$ (Formel (197) und (201))

$$F(u) = 2\,\frac{4 + (3 - 4\mu^2)u^2}{u^2\{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2\}} = 0{,}623$$

$$F_1(u) = \frac{4u\sqrt{1 - \mu^2}}{(4 + u^2)^2 - 16\mu^2u^2} = 0{,}147.$$

Digitized by Google

Folglich ergibt sich nach der Formel (196)

$$\Delta y_m = \varrho + y_m^2 F(u)\xi = 0{,}28 + 6400 \times 0{,}623 \times 0{,}00070 = 3{,}07 \text{ mm}.$$

Die Korrektion für ξ kann man nicht vernachlässigen. Dabei beträgt $\frac{\Delta y_m}{y_m} = 3{,}8\%$.

Bei kleinen Werten von y_m hat die Korrektion für ξ weniger Bedeutung, aber es kommt dann der Einfluß von ϱ relativ mehr zur Geltung. So ist für $y_m = 10$ mm

$$\Delta y_m = 0{,}28 + 100 \times 0{,}623 \times 0{,}00070 = 0{,}32 \text{ mm}.$$

Dabei beträgt $\frac{\Delta y_m}{y_m} = 3{,}2\%$.

Wir wollen nun die Verspätung des Maximums berechnen. Nach der Formel (205) wird

$$t_{x_m} = t'_m - \frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda} - \tau - \frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u)\xi.$$

Auf Grund der angeführten Angaben haben wir für $y_m = 80$ mm

$$\frac{1}{2}\frac{y_m^2}{b\lambda} = 21^s{,}33.$$

Nach der Tabelle VI der „Seismometrischen Tabellen" finden wir für $\mu^2 = 0{,}80$ und $u = 1$

$$\frac{\tau}{T_p} = 0{,}250;$$

folglich

$$\tau = 6^s{,}25.$$

Ferner

$$\frac{T_p}{2\pi} \cdot y_m F_1(u) \cdot \xi = \frac{25}{6{,}28} \times 80 \times 0{,}147 \times 0{,}00070 = 0^s{,}03.$$

Also beträgt die totale Verspätung des Maximums $27^s{,}61$.

Wir sehen somit, daß der Einfluß der Korrektion ξ hier sehr unbedeutend ist. Die beiden anderen Korrektionen haben aber eine große Bedeutung. In den Berichten genügt es t_{x_m} bis auf eine Sekunde genau anzugeben.

Die Theorie zeigt also, daß außer einer gewöhnlichen Zeitverspätung τ, welche durch die Eigenschaften des Seismographen selbst bedingt wird, (wobei die Größe $\frac{\tau}{T_p}$ aus der Tabelle VI der „Seismometrischen Tabellen" entnommen werden kann), noch eine Zusatzverspätung vorhanden ist, die von der Reibung der Feder am berußten Papier abhängt. Doch ist diese Korrektion so klein, daß man sie vernachlässigen kann.

Die Formel (191) gestattet die maximale Amplitude der wahren Bodenverschiebung bei mechanischer Registrierung zu berechnen; die entsprechende Korrektion Δy_m der gemessenen Ordinate kann leicht nach den Formeln (196) und (197) ermittelt werden.

Digitized by Google

Die Zeitverspätung des Maximums auf dem Seismogramm wird nach Formel (202) berechnet, wobei $F_1(u)$ durch die Formel (201) bestimmt wird; diese Korrektion kann jedoch vernachlässigt werden.

Was die Periode der seismischen Welle T_p anbetrifft, so kann dieselbe, wenn der Seismograph mit starker Dämpfung versehen ist, direkt aus dem Seismogramm entnommen werden (Formel (180)).

Man kann also auch bei mechanischer Registrierung die drei gesuchten Elemente der Bodenbewegung T_p, x_m und t_{x_m} bestimmen. Die Korrektionen ϱ und ξ haben ihre Bedeutung nicht so sehr für die Bearbeitung der Seismogramme zwecks Bestimmung der wahren Größen von x_m und t_{x_m}, als für die Bestimmung der wahren Größe des Dämpfungsverhältnisses v und der Größe μ^2.

Es ist hieraus ersichtlich, daß die Auswertung von Seismogrammen bei mechanischer Registrierung wesentlich komplizierter ist, als bei der direkten optischen oder auch der galvanometrischen Registrierung, da sie noch eine Bestimmung der Reibungskonstanten ϱ und ξ erfordert. Letzteres wäre ja nun leicht auszuführen, es kommt jedoch noch ein sehr ungünstiger Umstand hinzu, nämlich der, daß diese Konstanten in Wirklichkeit nicht konstant sind. Es hängen nämlich ϱ und ξ in hohem Maße von verschiedenen Zufälligkeiten ab, wie z. B. von der Dicke der Rußschicht auf dem Papier u. dgl. Sie ändern sich daher nicht nur von Bogen zu Bogen, sondern sind auch oft verschieden an verschiedenen Stellen desselben Bogens. Es ist daher wünschenswert, bei mechanischer Registrierung möglichst oft die Konstanten ϱ und ξ bei schwacher Dämpfung zu bestimmen.

Bei der Bestimmung der Phasen P und S ist die Reibung der Feder nicht so schädlich, weil die entsprechenden Erscheinungen einen plötzlichen Charakter tragen; wenn nur die Impulse genügend stark gewesen sind, so lassen sich diese Momente (besonders mit Hilfe einer Lupe) ziemlich zuverlässig bestimmen.

Die Minutenmarken werden auf dem Seismogramm im allgemeinen durch kurze Unterbrechungen der Kurve gegeben, was durch ein leichtes Aufheben der Feder bewirkt wird, obwohl dieses Verfahren nicht sehr zweckmäßig ist, da dadurch die Regelmäßigkeit der Bewegung des Seismographen gestört werden kann.

Bei einzelnen Seismographen wird auch durch eine besondere Feder mittels eines Elektromagneten jede Minute eine Marke auf dem Seismogramm eingezeichnet. In diesem Falle muß man bei der Bestimmung verschiedener Momente unbedingt die Parallaxe berücksichtigen. Sie wird jedesmal bei dem Papierwechsel in der Weise bestimmt, daß man im Moment der Aufzeichnung einer Minutenmarke dem Seismographen einen kleinen Anstoß gibt; damit läßt sich die lineare Entfernung der beiden Federn bestimmen, die man leicht in Sekunden umrechnen kann, wenn man die Länge einer Minute auf der Trommel des Registrierapparates kennt.

Die mechanische Registriermethode hat freilich einen wesentlichen Vorzug, nämlich ihre Billigkeit und sie hat daher eine weite Verbreitung auf

Digitized by Google

den verschiedenen seismischen Stationen gefunden. Ein zweiter Vorzug besteht darin, daß man die Aufzeichnungen der Seismographen stets sofort beobachten kann, während bei der optischen und galvanometrischen Registrierung auf den Seismogrammen bis zum Entwickeln nichts zu sehen ist. Es sind daher die Instrumente mit mechanischer Registrierung auch für seismische Stationen ersten Ranges nützlich.

In allen anderen Punkten sind die anderen Methoden besser, und zwar besonders wegen der Genauigkeit der sich ergebenden Resultate. Die mechanische Registriermethode ist, wenn man danach strebt, gute und zuverlässige Resultate zu erhalten, keine einfache und mit vielen praktischen Schwierigkeiten verknüpft.

In dem vorliegenden Kapitel sind zwar verschiedene Methoden zur Beseitigung dieser Schwierigkeiten behandelt, doch kann die Theorie nicht als streng aufgefaßt werden. Sie hat nur den Charakter einer gewissen Annäherung und das ist unvermeidlich, denn keine strenge Theorie könnte die verschiedenen zufälligen Änderungen in den Elementen der Reibung berücksichtigen. Die Veränderlichkeit der Reibungskoeffizienten ist der Hauptmangel der mechanischen Registrierung.

Nichtsdestoweniger kann diese Methode jedoch bei einem erfahrenen Beobachter und bei sorgfältiger Untersuchung der Eigenbewegung des Seismographen befriedigende Resultate geben und zwar auch in der Frage nach der Bestimmung des Charakters der wahren Bodenbewegung, einer Frage, deren Lösung das Hauptproblem der modernen Seismometrie bildet.

Digitized by Google

Literatur.

1. Helmert, F. R., Die Schwerkraft im Hochgebirge, insbesondere in den Tiroler Alpen, in geodätischer und geologischer Beziehung. Veröffentl. des Königl. Preußischen Geodätischen Institutes und Zentralbureaus der Internationalen Erdmessung. Berlin 1890.
— Dr. Heckers Bestimmung der Schwerkraft auf dem Atlantischen Ozean. Sitzungsberichte der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1902.
2. Hayford, John F., The figure of the earth and isostasy from measurements in the United States; Coast and Geodetic Survey, Washington 1909.
— Supplementary investigation in 1909 of the figure of the earth and isostasy. Washington 1910.
3 Kusakabe, S., Kinetic Measurements of the Modulus of Elasticity Journal of the College of Science, Tokyo. Bd. 20, Nr. 10, und Rigidity of Rocks and Hysteresis Funktion, ebenda Nr. 6.
4. Oddone, Emilio, Déterminations dynamiques des modules d'élasticité de Young des roches. Comptes rendus des Séances de l'Association Internationale de Sismologie à Manchester 1911, Budapest 1912.
5. Zöppritz, K. und Geiger, L., Über Erdbebenwellen. III. Nachrichten der Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1909.
6. Rayleigh, Lord, London Math. Society. Proc. vol. 30. 1899.
7. Lamb, H., Phil. Trans. Royal Society. Vol 203. 1904.
8. Wiechert, E. und Zöppritz, K., Über Erdbebenwellen. I. Nachrichten der Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1907, und Zöppritz und Geiger, wie Nr. 5.
9. Zeißig, K., Auch abgedruckt: Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg 1910. Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, Tome III, Livr. III.
10. Wiechert, E., wie 8.
11. Wiechert E., Zöppritz, K., Geiger, L. und Gutenberg, B., Über Erdbebenwellen. V. Nachrichten d. Kgl. Gesellsch. der Wissenschaften zu Göttingen. Math.-phys. Kl. 1912; siehe auch 5 und 8.
12. Zöppritz, K. und Geiger, L., wie 5.
13. Omori, F., Horizontal Pendulum observations of earthquakes at Hitotsubashi (Tokyo) 1900. Publ. of the Earthquake Investigation Committee in foreign languages Nr. 13. Tokyo 1903.
14. Wiechert, E., wie 8.
15 Grunmach, Leo, Über neue Methoden und Apparate zur Messung von Erderschütterungen kleinster Periode. (Nach gemeinsam mit Herrn Dr. Franz Weidert ausgeführten Untersuchungen.) (Sitzungsberichte d. Kgl. Akad. d. Wissensch. zu Berlin. 1909.) Physikal. Zeitschrift 10. Jahrgang. 1909.
16. Love, A. E. H., Some problems of Geodynamics. Cambridge: at the University Press, 1911
17. v Rebeur-Paschwitz, E., Horizontalpendelbeobachtungen auf der K. Universitätssternwarte zu Straßburg 1892—1894, Beiträge zur Geophysik, Bd. 2, 1894 und: Das Horizontalpendel . . . Nova acta der Ksl. Leop. Carol. Deutschen Akademie der Naturforscher, Bd. 60, Nr. 1, Halle 1892.

Digitized by Google

18. Kortazzi, I. J., Investia Russk. Astron. Obshchestva, Teil IV, 1895, und Teil V, 1896.
19. Ehlert, R., Horizontalpendelbeobachtungen im Meridian zu Straßburg i. Els., Beiträge zur Geophysik, Bd. III, Leipzig 1898 und ebenda Bd. IV, 1899.
20. Schweydar, W., Untersuchung der Oszillationen der Lotlinie auf dem Astrometr. Institut der Großh. Sternwarte zu Heidelberg. Beiträge zur Geophysik, Bd. VII, Leipzig 1905.
21. Hecker, O., Beobachtungen an Horizontalpendeln über die Deformation des Erdkörpers unter dem Einfluß von Sonne und Mond. Veröffentl. des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes, Heft I, neue Folge Nr. 32, Berlin 1907 und Heft II, unter Mitwirkung und mit Beiträgen von O. Meißner, neue Folge, Nr. 49, Berlin 1911.
22. Orlov, Beobachtungen über die Deformation der Erde unter dem Einfluß der Mondanziehung ausgeführt in Jurjew mit Zöllnerschen Horizontalpendeln (russisch). Bulletin de l'Académie Impériale des Sciences de St.-Petersburg, 1910.
23. Haid, M., Gezeiten und Starrheitskoeffizient $\varkappa$ der festen Erde. 17. Allgemeine Konferenz der Internat. Erdmessung zu Hamburg, Sept. 1912.
24. Hecker, O., Seismometrische Beobachtungen in Potsdam in der Zeit vom 1. Januar bis 31. Dez. 1905, Veröffentl. des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes, Neue Folge, Nr. 29, Berlin 1906.
25. Walker, G. W., Verhandl. d. Intern. Seismol. Assoziation in Manchester 1911, Budapest 1912.
26. v. Everdingen, E., macht in den Verhandl. der Intern. Seismolog. Assoziation in Manchester 1911, eine Mitteilung über die Beobachtungen von G. van Dyk.
27. Hecker, O., Verhandl. d. Intern. Seismol. Assoziation in Zermatt 1909, Budapest 1910 und in Manchester 1911, Budapest 1912, und Mitteil. des Zentralbureaus der Intern. Seismol. Assoziation Nr. 2, Leipzig 1913.
28. Wiechert, E., Verhandl. d. Intern. Seismol. Konferenz im Jahre 1903 zu Straßburg. Beiträge zur Geophysik, Ergänzungsband II, Leipzig 1904.
29. Gutenberg, B., Die seismische Bodenunruhe. Beiträge zur Geophysik, Bd. XI. Leipzig 1911.
30. Klotz, O., Microseisms. Ottawa 1910. Transactions of the Royal Society of Canada. Third series 1908—1910, und: On microseisms, Verhandl. d. Intern. Seismol. Konferenz im Jahre 1909 in Zermatt, Budapest 1910
31. Schuster, A., An Apparatus to determine the period of Ocean Waves. Comptes rendus des séances de l'Association Internationale de Sismologie, à Manchester 1911. Budapest 1912.
32 und 33. Wilip, J., Über die mikroseismischen Bewegungen. Nach den Aufzeichnungen der Pulkowaer seismischen Station für die Zeit vom 20. August 1908 bis 27. Januar 1909. St. Petersburg 1910.
34. wie 29.
35. Baron v. Eötvös, Bestimmung der Gradienten der Schwerkraft und ihrer Niveauflächen mit Hilfe der Drehwage, Verhandl. der XV. Allgem. Konferenz der Int. Erdmessung in Budapest 1906 Berlin 1908.
36. v. Kövesligethy, R., Sur l'hystérésis sismique. Math. und nat. Berichte aus Ungarn, XXVI, 1908 (1910).
37. Omori, F., The After-shocks of the Zenkoji (1847) and the Tenpo (1830) Earthquakes. Bulletin of the Imp. Earthquake Invest. Comm. Vol. II, Tokyo 1908.
38. Pomeranzeff, B. J., Kaiserl. Akademie der Wissenschaften zu St. Petersburg. Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. Tome I. Livraison I, 1904.
39. Arnold, H., Die Erdbewegung während des ersten Vorläufers eines Erdbebens. Beiträge zur Geophysik, Bd. X, Leipzig 1909.
40. Dutton, C. E., On the Depth of Earthquake Foci, Transactions of the Academy of New York, Bd. VI.
41. Wiechert, E., Erschütterungsmesser, erwähnt in 8.
42. Mintrop, L., Über die Ausbreitung der von den Massendrucken einer Großgasmaschine erzeugten Bodenschwingungen. (Dissertation.) Göttingen 1911.

Digitized by Google

43. wie 15.
44. Hecker, O., Einrichtung für eine variable Dämpfung des Horizontalpendels, Zeitschr. für Instrumentenkunde, Bd. XXVII, Berlin 1907.
45. Wiechert, E., wie 8.
46. Schlüter, W., Schwingungsart und Weg der Erdbebenwellen, I. Teil, Beiträge zur Geophysik, Bd. V, Leipzig 1903.
47. Davison, C., History of the Horizontal and Bifilar Pendulums. Appendix to Brit. Assoc. Reports on Earth Tremors, Ipswich meeting 1895.
48. Walker, G. W., Graphical construction for the epizentre of an Earthquake. Meteorological office observatories, Geophysical Memoirs Nr. 3. London 1912.
49. Rosenthal, E, Sur la détermination de l'épicentre d'un tremblement de terre lointain, Boll. della Soc. Sism. Ital. Vol. XIII, Nr. 6, Roma 1909.
50. Klotz, O., Über die stereographische Methode zur Herdbestimmung von Beben. Beiträge zur Geophysik, Bd. XI, Leipzig 1911.
51. Zeißig, G., Zwei graphische Methoden der Herdbestimmung von Erdbeben, Beiträge zur Geophysik, Bd. XI, Leipzig 1912, und Graphische Bestimmung eines Erdbeben-Epizentrums aus den Ankunftszeiten. Physik. Zeitschrift, 10. Jahrgang, Leipzig 1912.
52. Grablowitz, G., Planisfero ad uso della geodinamica, Bolletino della Società sismologica Italiana, Vol. VII. Modena 1901.
53. Geiger, L., Herdbestimmung bei Erdbeben aus den Ankunftszeiten, Nachrichten der Kgl. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen, Math.-phys. Kl. 1910.
54. Wiechert, E., wie 8.
55. — Die Erdbebenforschung, ihre Hilfsmittel und ihre Resultate für die Geophysik, Physikal. Zeitschrift, Bd. IX, Leipzig 1908.
56. Roesener, F., Vergleichende Untersuchungen über die Perioden der Erdbebenwellen mit besonderer Berücksichtigung der Nachläuferwellen, Beiträge zur Geophysik, Bd. XII, Leipzig 1912.
57. Pomeranzeff, I., Recherches concernant le sismogramme tracé à Strassbourg le 24. Juin 1901, Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente, T. I, St. Petersburg 1904.
58. Orlov, A., Sur l'étude des sismogrammes d'un pendule periodique. Comptes rendus des séances de la Commission sismique permanente. T. 3, St. Petersbourg 1909.
59. Arnold, H., wie 39.
60. Börgen, Die harmonische Analyse der Gezeitenbeobachtungen, Annalen der Hydrographie, Bd. XII 1884 und Schweydar, W., Harmonische Analyse der Lotstörungen durch Sonne und Mond, Veröffentl. des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes, Neue Folge Nr. 59, Berlin 1914.
61. Sir Darwin, G. Diese Vermutung ist unter anderem mitgeteilt in 16, Seite 57.
62. Love, A. E. H., wie 16.
63. Braak, C., Das Wiechertsche astatische Pendelseismometer und die Deformation des Erdkörpers, Beiträge zur Geophysik, Bd. XI, Leipzig 1912.
64. Schweydar, W., Untersuchungen über die Gezeiten der festen Erde und die hypothetische Magmaschicht. Veröffentl. des Kgl. Preuß. Geodätischen Institutes. Neue Folge Nr. 54, Potsdam 1912.
65. Shida, Toshi, On the Elasticity of the Earth and the Earth's Crust, Memoirs of the College of Science and Engineering, Kyoto Imperial University, Vol. IV, Kyoto 1912.

UNIV. OF MICHIGAN,
JUL 23 1914

Digitized by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

Lehrbuch der kosmischen Physik. Von Dr. Wilhelm Trabert, ord. Professor an der Universität und Direktor der K. K. Zentralanstalt für Meteorologie und Geodynamik in Wien. Mit 149 Figuren und 1 Tafel. 1911. Geh. ℳ 20.—, in Leinwand geb. ℳ 22.—

Diese Physik des Kosmos unterscheidet sich von ähnlichen Werken, welche verknüpfen, was örtlich vereinigt ist, dadurch, daß sie nicht eine lose Aneinanderreihung verschiedener Disziplinen, wie Astrophysik, Physik des Festen und Flüssigen auf der Erde und Physik der Atmosphäre in einem Buche sein will, sondern daß sie das zu verknüpfen sucht, was sachlich zusammengehört, gleichgültig, wo wir es im Weltall finden. Es ist eine Anwendung der Gesetze der allgemeinen Physik auf den Kosmos, dieser aufgefaßt als ein einheitliches Ganzes, und ihre Aufgabe soll sein, das Geschehen im Weltall zu erörtern, dieses zu behandeln in einer Lehre vom Zustande und den Zustandsänderungen des Weltalls. Die Anwendung der Mathematik ist auf ein Minimum beschränkt.

„Das Buch ist unbestreitbar eines der besten seiner Art. Es faßt auf einem verhältnismäßig kleinen Raum in wissenschaftlicher Weise alles Wichtige der kosmischen Physik zusammen, ist dazu mit guter Disposition und in einer im allgemeinen frischen und klaren Sprache geschrieben." (Allgemeines Literaturblatt.)

Physik der Sonne. Von E. Pringsheim, Professor an der Universität Breslau. Mit 235 Abbild. und 7 Tafeln. 1910. Geh. ℳ 16.—, geb. ℳ 18.—

Das Buch soll in allgemeinverständlicher Form eine erweiterte Wiedergabe der Vorlesungen bieten, die der Verfasser an der Universität Berlin wiederholt gehalten hat. Auf dem Gebiete der Sonnenphysik ist alles noch im Fluß, die Anschauungen über die wichtigsten Grundfragen gehen noch viel auseinander. Daher ist das Hauptaugenmerk des Verfassers darauf gerichtet, Beobachtungstatsachen und Hypothesen streng voneinander zu trennen, die Methoden und Resultate der Beobachtung, unterstützt durch gute Abbildungen, möglichst anschaulich darzustellen und die zur Deutung des Beobachteten dienenden Hypothesen unparteiisch und kritisch zu beleuchten.

„Das Buch wendet sich nicht allein an Physiker und Astronomen, sondern ist bei aller Wissenschaftlichkeit so einfach und ausführlich gehalten, daß es auch den Leser, welcher den Fachwissenschaften fernsteht, befähigt, dem Laufe der Darstellung mit Verständnis und Interesse zu folgen . . Die klare Disponierung des ungemein reichen Stoffes und die faßliche Art der Darstellung sollten dem verdienstvollen Werk auch einen Platz in den Bibliotheken der höheren Schulen für die Hand der Schüler sichern." (Naturwissenschaftliche Rundschau.)

Populäre Astrophysik. Von Dr. J. Scheiner, Professor an der Universität Berlin. Mit 30 Tafeln u. 240 Fig. 2., ergänzte Aufl. 1912. In Leinw. geb. ℳ 14.—

„Daß es gerade Scheiner, einer unserer besten und erfolgreichsten Astrophysiker, ist der sich entschließt, die bestehende Lücke durch ein eingehendes Lehrbuch der Astrophysik auszufüllen, ist ganz besonders zu begrüßen... Trotzdem einige mathematische Vorkenntnisse verlangt werden, merkt man dem Buche doch an, daß der Verfasser lieber mit Worten als mit Formeln erklären will. Dieses Bestreben wird sehr unterstützt durch den klaren und präzisen Stil. Und dadurch ist das Buch zum mindesten für den Laien zu einem Kompendium der Astrophysik geworden. Sehr unterstützt wird der Text durch ein passend gewähltes und vorzüglich ausgeführtes Illustrationsmaterial." (Deutsche Literaturzeitung.)

Astronomie. (Die Kultur der Gegenwart, ihre Entwicklung und ihre Ziele. Herausgegeben von P. Hinneberg. Teil III, Abt. III, Band 3.) Unter Redaktion von J. Hartmann. [Unter der Presse.]

Inhalt. Anfänge der Astronomie, Zusammenhang mit der Religion: F. Boll. Chronologie und Kalenderwesen: F. K. Ginzel. Zeitmessung: J. Hartmann. Astronomische Ortsbestimmung: L. Ambronn. Erweiterung des Raumbegriffs: A. v. Flotow. Mechanische Theorie des Planetensystems: J. v. Hepperger. Physische Erforschung des Planetensystems: K. Graff. Die Physik der Sonne: E. Pringsheim. Die Physik d. Fixsterne: J. W. Ristenpart. Das Sternsystem: H. Kobold. Beziehungen der Astronomie zu Kunst und Technik: L. Ambronn. Organisation: F. W. Ristenpart.

Die mathematischen Instrumente. Von A. Galle. Mit 86 Abbildungen und Figuren. 1912. Geh. ℳ 4.40, geb. ℳ 4.80.

„. . . Der Fachmann, der mit mathematischen Instrumenten zu tun bekommt und den Wunsch hegt, die Grundlagen und Einzelheiten ihrer Konstruktion zu erfahren, sowie in die Feinheit und Genauigkeit ihrer Herstellung einzudringen, wird in diesem Werke vollauf Befriedigung finden, wie auch der Praktiker, der die Einrichtungen dieser Instrumente mit Erklärungen und Hinweisen auf ihre Anwendungen kennen zu lernen begehrt." (Österr. Zeitschr. f. Vermessungswesen.)

Taschenbuch für Mathematiker und Physiker. Unter Mitwirkung zahlreicher Fachgenossen herausgeg. von Felix Auerbach u. Rudolf Rothe. III. Jahrg. 1913/14. Mit einem Bildnis Fr. Kohlrauschs. In Leinw. geb. ℳ 6.—

„. . . Die Reichhaltigkeit und Vielseitigkeit, die sich schon beim Durchblättern zeigen und die Gediegenheit des Inhalts, die sich dem eingehenderen Studium erschließt, machen im Verein mit der übersichtlichen Stoffanordnung das Taschenbuch zu einem Orientierungsmittel von großer Verwendbarkeit und Zuverlässigkeit; jedem Freunde der exakten Wissenschaften kann daher die Anschaffung des vorzüglichen Buches angelegentlich empfohlen werden." (Naturwissensch. Wochenschr.)

Digitized by Google

GEOGRAPHISCHE ABHANDLUNGEN

Herausgegeben von Professor **Dr. Albrecht Penck** in Berlin.

In zwanglosen Bänden bzw. Heften. Mit vielen Abbild., Karten u. Plänen. gr. 8. Geh.

1. Band.	1. Heft.	**Brückner**: Die Vergletscherung des Salzachgebietes	ℳ 9.—
1. —	2. —	**Neumann**: Orometrie des Schwarzwaldes	„ 3.—
1. —	3. —	**Böhm**: Einteilung der Ostalpen	„ 8.—
1. —	komplett		„ 20.—
2. —	1. Heft.	**Geiger**: Die Pamir-Gebiete	„ 8.—
2. —	2. —	**Hann**: Die Verteilung des Luftdruckes über Mittel- u. Südeuropa	„ 12.—
2. —	3. —	**Soyka**: Die Schwankungen des Grundwassers	„ 3.—
2. —	komplett		„ 28.—
3. —	1. Heft.	**Sievers**: Die Cordillere von Merida	„ 12.—
3. —	2. —	**Günther**: Joh. Keppler u. der tellurisch-kosmische Magnetismus	„ 3.—
3. —	3. —	**Woeikof**: Der Einfluß ein. Schneedecke a. Boden, Klima u. Wetter	„ 6.—
3. —	komplett		„ 21.—
4. —	1. Heft.	**Kretschmer**: Die physische Erdkunde im Mittelalter	„ 5.—
4. —	2. —	**Brückner**: Klimaschwankungen seit 1700	„ 15.—
4. —	komplett		„ 20.—
5. —	1. Heft:	Arbeiten des geogr. Institutes der k. k. Universität Wien	„ 5.—
		Sonderdrucke aus Band V, Heft 1:	
		Heiderich: Die mittleren Erhebungsverhältnisse d. Erdoberfläche	„ 2.—
		Kurowski: Die Höhe der Schneegrenze	„ 1.80
		Swarowsky: Die Eisverhältnisse der Donau	„ 2.—
5. Band.	2. Heft.	**Partsch**: Philipp Clüver	„ 2.—
5. —	3. —	**Cvijić**: Das Karstphänomen	„ 4.—
5. —	4. —	**Forster**: Die Temperatur fließender Gewässer Mitteleuropas	„ 4.—
5. —	5. —	**Ruvarac**: Die Abfluß- u. Niederschlagsverhältnisse von Böhmen, nebst **Penck**: Untersuchungen über Verdunstung und Abfluß von größeren Landflächen	„ 5.—
5. —	komplett		„ 20.—
6. —		**Atlas der österreichischen Alpenseen.**	
	1. Lieferung.	**Müllner**: Die Seen des Salzkammergutes	„ 8.50
	2. —	**Richter**: Seen von Kärnten, Krain und Südtirol	„ 8.50
6. —	1. Heft.	**Müllner**: Die Seen des Salzkammergutes und die österr. Traun	„ 6.50
6. —	2. —	**Richter**: Seenstudien	„ 4.20
6. —	3. —	**Penck**: Friedrich Simony	„ 12.—
6. —	komplett (ohne Atlas)		„ 22.70
7. —	1. Heft.	**Müllner**: Die Seen am Reschen-Scheideck	„ 3.—
7. —	2. —	**Müllner**: Die Vereisung der österreichischen Alpenseen in den Wintern 1894/95 bis 1900/01	„ 2.40
7. —	3. —	**Grund**: Die Karsthydrographie. Studien aus Westbosnien	„ 6.80
7. —	4. —	**Vujević**: Die Theiß. Eine potamologische Studie	„ 4.—
7. —	komplett		„ 16.20
8. —	1. Heft.	**Grund**: Die Veränderungen der Topographie im Wiener Walde und Wiener Becken	„ 10.—
8. —	2. —	**Krebs**: Die nördlichen Alpen zwischen Enns, Traisen u. Mürz	„ 4.—
8. —	3. —	**Hassinger**: Geomorphologische Studien aus dem inneralpinen Wiener Becken und seinem Randgebirge	„ 8.—
8. —	komplett		„ 22.—
9. —	1. Heft.	**Götzinger**: Beiträge zur Entstehung der Bergrückenformen	„ 6.—
9. —	2. —	**Krebs**: Die Halbinsel Istrien. Landeskundliche Studie	„ 6.—
9. —	3. —	**Grund**: Beiträge zur Morphologie des Dinarischen Gebirges	„ 8.—
9. —	komplett		„ 20.—
10. —	1. Heft.	**Gröber**: Der südliche Tiën-schan. [Unter der Presse.]	
10. —	2. —	**Berg**: Das Problem d. Klimaänderung i. gesch. Zeit. [U. d. Pr.]	
———	Neue Folge. 1. Heft.	**Lautensach**: Die Übertiefung des Tessingebietes	„ 6.—
———	— 2. —	**v. Reinhard**: Beiträge zur Kenntnis der Eiszeit im Kaukasus. [U. d. Pr.]	

Die Sammlung wird fortgesetzt.

:: :: **Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin** :: ::

Digitized by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

W. M. Davis

Professor an der Universität Cambridge (Mass.)

Grundzüge der Physiogeographie

Von **W. M. Davis** und Professor Dr. **G. Braun**

Mit 126 Abbildungen. gr. 8. 1911. In Leinw. geb ℳ 6.60

„Von diesem Werke nun auch eine deutsche Bearbeitung zu erhalten, können wir nur mit großer Freude begrüßen, und wir sind überzeugt, daß dieselbe dem deutschen Studierenden ebenso nützen wird wie das Original dem amerikanischen; denn mit Geschick und Umsicht haben die beiden Bearbeiter zahlreiche Beispiele charakteristischer Landschaftstypen speziell vom deutschen und mitteleuropäischen Boden zur Illustrierung der theoretischen Auseinandersetzungen eingeflochten.... Ein großer Vorzug der Physiogeographie besteht in der Art ihrer Illustrierung. Meisterhafte kleine Skizzen von Davis' Hand, welche zugleich Ansicht und Profil einer typischen Landschaft bieten, sog. Blockdiagramme, sind eingestreut. Daneben laufen Landschaftsbilder, Wiedergaben von Photographien. .... Man kann das Werk in Wirklichkeit als ein neues bezeichnen, und zwar nicht bloß wegen seiner häufigen Bezugnahme auf deutsche Verhältnisse, sondern auch der Sprache nach. Die Übersetzung ist allenthalben eine sehr flüssige." **(Albr. Penck i. d. Zeitschr. d. Gesellschaft f. Erdkunde z. Berlin.)**

Zur Ergänzung zu Grundzüge der Physiogeographie befindet sich in Vorbereitung:

Praktische Übungen in physischer Geographie

Von **W. M. Davis.** Deutsch herausgegeben von Professor Dr. **K. Oestreich**

Die erklärende Beschreibung der Landformen

Von **W. M. Davis.** Deutsch bearbeitet von Privatdozent Dr. **A. Rühl**

Mit 212 Abbildungen und 13 Tafeln. gr. 8. 1912. In Leinw. geb. ℳ 12.—

„Die Bedeutung der Davisschen Methode für die geographische Wissenschaft ist längst anerkannt, aber in keinem Buch tritt sie so klar hervor als in dem vorliegenden, umfangreichen Werk. Die zahlreichen Beispiele, die herangezogen werden, lassen den Leser tief in die Probleme eindringen, desgleichen die jedem Kapitel beigefügten ‚Praktischen Übungen an tatsächlichen Formen'. Das neue Werk von Davis wird dem Geographen und dem Geologen ein unentbehrliches Handbuch sein, aber auch dem Geographielehrer bietet sich hier ein dankbares Feld für didaktische Überlegungen." **(Zeitschrift für den naturwissenschaftlichen Unterricht.)**

Die Anwendung der Davisschen Lehren auf praktische Beispiele ist niedergelegt in:

Eine geographische Studienreise durch das westliche Europa

Von **W. Hanns, A. Rühl, H. Spethmann, H. Waldbaur.** Mit einer Einleitung von **W. M. Davis.** Herausgegeben vom Verein der Geographen a. d. Universität Leipzig

Mit 37 Abbildungen. gr. 8. 1913. Steif geh. ℳ 2.40

Das vorliegende Buch gibt nun in der Form einer anziehenden Reisebeschreibung eine Anwendung der Davisschen Methoden auf praktische Beispiele aus den verschiedensten Gebieten Westeuropas. Zunächst legt Davis selbst, der Leiter dieser Studienreise, nochmals einige seiner wissenschaftlichen Grundanschauungen dar. Dann schildert H. Waldbaur das Snowdongebiet in Wales, H. Spethmann den auf Cornwall fallenden Teil der Exkursion, hierauf führt uns A. Rühl von der Insel Jersey nach der Bretagne und zuletzt entrollt uns W. Hanns im Haslital das großartige Bild einer typischen Gletscherlandschaft.

Geographische Zeitschrift

Herausgegeben von Professor Dr. **A. Hettner**

XX. Jahrgang. 1914. Jährlich 12 Hefte. Halbjährlich M. 10.—

Die „Geographische Zeitschrift" stellt sich die Aufgabe, die Fortschritte des geographischen Wissens und die Veränderungen der geographischen Zustände in übersichtlicher Weise zusammenzufassen und zu allgemeiner Kenntnis zu bringen. Sie wendet sich daher keineswegs nur an den Geographen von Beruf, sondern an alle, die an geographischen Dingen Anteil nehmen, an die Lehrer der Geographie, an die Vertreter der Naturwissenschaften, an die gebildeten Laien. Sie bringt also keine Spezialarbeiten, die nur vom Fachmann verstanden werden und nur für ihn Interesse haben, sondern behandelt nur Gegenstände von allgemeinem Interesse in allgemeinverständlicher und dabei möglichst reiner und fließender Sprache. Aber sie ruht dabei doch auf durchaus wissenschaftlicher Grundlage, alle Artikel sind von tüchtigen Fachmännern verfaßt, und sie zählt die hervorragendsten Geographen zu ihren Mitarbeitern.

Digitized by Google

Verlag von B. G. Teubner in Leipzig und Berlin

WISSENSCHAFT UND HYPOTHESE.

Sammlung von Einzeldarstellungen aus dem Gesamtgebiet der Wissenschaften mit besonderer Berücksichtigung ihrer Grundlagen und Methoden, ihrer Endziele und Anwendungen.

8. In Leinwand geb.

Die Sammlung will die in den verschiedenen Wissensgebieten durch rastlose Arbeit gewonnenen Erkenntnisse von umfassenden Gesichtspunkten aus im Zusammenhang miteinander betrachten. Die Wissenschaften werden in dem Bewußtsein ihres festen Besitzes, in ihren Voraussetzungen dargestellt, ihr pulsierendes Leben, ihr Haben, Können und Wollen aufgedeckt. Andererseits aber wird in erster Linie auch auf die durch die Schranken der Sinneswahrnehmung und der Erfahrung überhaupt bedingten Hypothesen hingewiesen.

I: **Wissenschaft und Hypothese.** Von H. Poincaré in Paris. Autorisierte deutsche Ausgabe mit erläuternden Anmerkungen von F. und L. Lindemann in München. 2., verbesserte Aufl. 1906. Geb. ℳ 4.80. (3. Auflage in Vorb.)

II: **Der Wert der Wissenschaft.** Von H. Poincaré in Paris. Deutsch von E. Weber. 2. Auflage. 1910. Geb. ℳ 3.60.

III: **Mythenbildung und Erkenntnis.** Eine Abhandlung über die Grundlagen der Philosophie. Von G. F. Lipps in Leipzig. 1907. Geb. ℳ 5.—

IV: **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Von R. Bonola in Pavia. Autorisierte deutsche Ausgabe von H. Liebmann in Leipzig. Mit 76 Figuren. 1908. Geb. ℳ 5.—

V: **Ebbe und Flut** sowie verwandte Erscheinungen im Sonnensystem. Von G. H. Darwin in Cambridge. Autorisierte deutsche Ausgabe von A. Pockels in Braunschweig. 2. Aufl. Mit einem Einführungswort von G. v. Neumayer in Hamburg. Mit 52 Illustrationen. 1911. Geb. ℳ 8.—

VI: **Das Prinzip der Erhaltung der Energie.** Von M. Planck in Berlin. 3. Aufl. 1913. Geb. ℳ 6.—

VII: **Grundlagen der Geometrie.** Von D. Hilbert in Göttingen. 4., durch Zusätze und Literaturhinweise von neuem vermehrte und mit sieben Anhängen versehene Auflage. 1913. Geb. ℳ 6.—

VIII: **Geschichte der Psychologie.** Von O. Klemm in Leipzig. 1911. Geb. ℳ 8.—

IX: **Erkenntnistheoretische Grundzüge der Naturwissenschaften und ihre Beziehungen zum Geistesleben der Gegenwart.** Von P. Volkmann in Königsberg i. P. 2. Auflage. 1910. Geb. ℳ 6.—

X: **Wissenschaft und Religion in der Philosophie unserer Zeit.** Von É. Boutroux in Paris. Deutsch von E. Weber in Straßburg i. E. Mit einem Einführungswort von H. Holtzmann. 1910. Geb. ℳ 6.—

XI: **Probleme der Wissenschaft.** Von F. Enriques in Bologna. Deutsch von K. Grelling in München. 2 Teile. 1910. Geb.
I. Teil: **Wirklichkeit und Logik.** ℳ 4.— II. Teil: **Die Grundbegriffe der Wissenschaft.** ℳ 5.—

XII: **Die logischen Grundlagen der exakten Wissenschaften.** Von P. Natorp in Marburg. 1910. Geb. ℳ 6.60.

XIII: **Die pflanzengeographischen Wandlungen der deutschen Landschaft.** Von Prof. Dr. H. Hausrath in Karlsruhe. 1911. Geb. ℳ 5.—

XIV: **Das Weltproblem vom Standpunkte des relativistischen Positivismus aus.** Von Dr. J. Petzoldt in Charlottenburg. 2. Auflage. 1912. Geb. ℳ 3.—

XV: **Wissenschaft und Wirklichkeit.** Von Dr. M. Frischeisen-Köhler in Berlin. 1912. Geb. ℳ 8.—

XVI: **Das Wissen der Gegenwart in Mathematik und Naturwissenschaft.** Von É. Picard in Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann in München. 1913. Geb. ℳ 6.—

XVII: **Wissenschaft und Methode.** Von H. Poincaré in Paris. Deutsch von F. u. L. Lindemann in München. 1914. Geb. ℳ 5.—

XVIII: **Probleme d. Sozialphilosophie.** Von R. Michels i. Basel. 1914. Gb. ℳ 4.80.

XIX: **Ethik als Kritik der Weltgeschichte.** Von A. Görland. [U. d. Pr.]

Weitere Bände in Vorbereitung.

Digitized by Google

Digitized by Google

To renew the charge, book must be brought to the desk.

TWO WEEK BOOK

DO NOT RETURN BOOKS ON SUNDAY

DATE DUE

Form 7079 7-51 30M S

Digitized by Google